MPSI

Programme de colle - semaine 17 du 03/02/2025 au 09/02/2025

1 Arithmétique dans $\mathbb{Z}$

- Programme de la semaine dernière (ne pas demander de démonstration dessus) : divisibilité, division euclidienne, PGCD, algorithme d'Euclide, entiers premiers entre eux, relation et théorème de Bézout.
- Lemme de Gauss (si $a|bc$ et $a \wedge b = 1$, alors $a|c$) et propriété sans nom (si $a|c$, $b|c$ et $a \wedge b = 1$, alors $ab|c$) (ces 2 propriétés *).
- Généralisation à n entiers ($n \geqslant 3$) : PGCD, entiers premiers entre eux dans leur ensemble / premiers entre eux deux à deux. Relation et théorème de Bézout.
- PPCM de deux entiers naturels non nuls. Relation entre le PGCD et le PPCM. Équivalence entre $(a|m \quad \text{et} \quad b|m)$ et $a \vee b|m$.
- Nombres premiers : définition, l'ensemble est infini (*). Théorème de décomposition en produit de facteurs premiers (existence et unicité) (démonstration non exigible). Si un nombre premier divise un produit de facteurs, alors il divise l'un des facteurs (*). Valuation p-adique d'un entier > 0, utilisation pour le calcul du PGCD, PPCM.
- Petit théorème de Fermat (*).
  Les ensembles $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ne sont pas au programme en MPSI.

2 Exercices faits

1. **Équation diophantienne linéaire**
   L'exercice est long, ne pas hésiter à n'en donner qu'une partie, ou travailler directement sur un exemple.
   Soit a, b, c des entiers (a et b non nuls). Le but de l'exercice est de décrire la méthode générale permettant de résoudre l'équation $(E)\ :\ ax + by = c$, d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$.
   a) Montrer que si (E) admet des solutions, alors $a \wedge b|c$.
      Dans toute la suite, on suppose que $a \wedge b|c$.
   b) Donner $a', b', c' \in \mathbb{Z}$ avec $a' \wedge b' = 1$, tels que (E) soit équivalente à $a'x + b'y = c'$.
   c) Montrer que (E) admet au moins une solution.
   d) On considère l'équation $(E_0)\ :\ a'x + b'y = 0$.
      Montrer que si (x, y) est solution de (E_0), alors $a'|y$.
   e) Décrire l'ensemble des solutions de (E_0) puis l'ensemble des solutions de (E).
   f) Un exemple à résoudre

2. **CCINP exo 94**
   a) Énoncer le théorème de Bézout dans $\mathbb{Z}$.
   b) Soit a et b deux entiers naturels premiers entre eux. Soit $c \in \mathbb{N}$.
      Prouver que : $(a|c \quad \text{et} \quad b|c) \quad \Leftrightarrow \quad ab|c$.
   c) On considère le système $(S)\ :\ \begin{cases} x \equiv 6 & [17] \\ x \equiv 4 & [15] \end{cases}$ dans lequel l'inconnue x appartient à $\mathbb{Z}$.
      i) Déterminer une solution particulière x_0 de (S) dans $\mathbb{Z}$.
      ii) *Déduire des questions précédentes* la résolution dans $\mathbb{Z}$ du système (S).

3. Questions indépendantes

a) Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $u_n = 5^{2^n} - 1$.

   i) Déterminer $v_2(u_0)$, $v_2(u_1)$ (v_2 : valuation 2-adique).

   ii) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_2(u_n) = n + 2$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Vérifier que $(2n+1)\binom{2n}{n} = (n+1)\binom{2n+1}{n+1}$. En déduire que $n+1$ divise $\binom{2n}{n}$.