MPSI

# Programme de colle - semaine 18 du 10/02/2025 au 16/02/2025

## 1 Polynômes

- Selon le programme, en MPSI, les polynômes sont à coefficients dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
  Écriture $\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ ou $\sum_{k \geqslant 0} a_k X^k$ (avec $(a_k)$ presque nulle). Notation $\mathbb{K}[X]$. Opérations, coefficients de la somme, du produit. Identification des coefficients en cas d'égalité.
  *La construction de $\mathbb{K}[X]$ n'a pas été vue (la notion de polynôme n'a pas été définie formellement en tant qu'objet mathématique), ne pas demander de démonstration sur tous ces points.* **Mais l'expression des coefficients du produit est à connaître.**
- Composition. Degré, propriétés. Degré de la somme, du produit. Notation $\mathbb{K}_n[X]$.
- Structure algébrique de $\mathbb{K}[X]$ (anneau intègre). Polynômes constants. Polynômes inversibles.
- Divisibilité, division euclidienne (démonstration non exigible).
- Fonction polynômiale associée à un polynôme $P$ (notée $\widetilde{P}$, ou souvent $P$ par abus de notation). Si deux polynômes ont la même fonction associée, alors ils sont égaux (à savoir traduire avec des quantificateurs). Racine. Caractérisation à l'aide de la divisibilité (**démonstration avec la division euclidienne**). Ordre de multiplicité.
- Dérivée d'un polynôme. Formule de Taylor. Caractérisation de l'ordre de multiplicité avec les dérivées successives (*).
- Les résultats déjà vus il y a quelques mois n'ont pas été revus mais sont à savoir en remplaçant "fonction polynômiale" par "polynôme". Par exemple : tout polynôme non constant admet une racine dans $\mathbb{C}$, tout polynôme de degré $\leqslant n$ ayant $n+1$ racines distinctes est nul, etc.
- Polynômes irréductibles.
  - Dans $\mathbb{C}[X]$ ce sont les polynômes de degré 1.
  - Si $\alpha$ est racine de $P \in \mathbb{R}[X]$, alors $\overline{\alpha}$ est racine de $P$. Polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$. Obtention de la factorisation dans $\mathbb{R}[X]$ à partir de la factorisation dans $\mathbb{C}[X]$.
- Relations coefficients-racines. On n'insistera pas sur les formules générales (utilisant les expressions symétriques), mais il faut être capable d'exprimer au moins la somme et le produit des racines (comptées avec leur ordre de multiplicité) en fonction des coefficients (voir exercice ci-dessous).
- Interpolation de Lagrange : existence et unicité d'une solution. Savoir énoncer le résultat + démonstration guidée (voir exo ci-dessous).
- **Pas encore vu** : Arithmérique des polynômes (PGCD, Bézout, etc).

## 2 Exercices faits

1. *Changer les paramètres*

   a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le reste de la division euclidienne de $X^n$ par $X^2 - 3X + 2$.

   b) Soit $M = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.
   Vérifier que $M^2 - 3M + 2I_2 = 0$. En déduire $M^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   *Remarque : aucune connaissance sur les polynômes (annulateurs) de matrices n'est au programme en première année. Ne pas soulever de difficulté.*

2. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $r \in \mathbb{N}^*$. Montrer que si $a$ est racine de $P$ de multiplicité $r$, alors $a$ est racine de $P'$ de multiplicité $r-1$ (en utilisant uniquement la définition en terme de divisibilité et pas la caractérisation avec les dérivées successives).

3. **D'après CCINP exo 87**
Soit $a_0, \ldots, a_n$ $n+1$ réels distincts.

a) Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Déterminer un polynôme $L_k$ de degré inférieur ou égal à $n$ tel que

$$\forall i \in [\![0, n]\!],\ L_k(a_i) = \begin{cases} 0 \text{ si } i \neq k \\ 1 \text{ si } i = k \end{cases}$$

b) Montrer que si $b_0, \ldots, b_n$ sont $n+1$ réels quelconques, alors il existe un unique polynôme $P$ vérifiant

$$\deg P \leqslant n \quad \text{et} \quad \forall i \in [\![0, n]\!],\ P(a_i) = b_i$$

c) Prouver que $\forall p \in [\![0, n]\!],\ \sum\limits_{k=0}^{n} a_k^p L_k = X^p$.

4. Déjà vu il y a quelques mois avec des fonctions polynômiales, pas refait récemment.
Montrer que le polynôme $P = 2X^3 - 6X + 1$ a trois racines réelles distinctes. On les note $\alpha$, $\beta$, $\gamma$.
Calculer $\alpha\beta\gamma$, $\alpha + \beta + \gamma$, $\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma$.