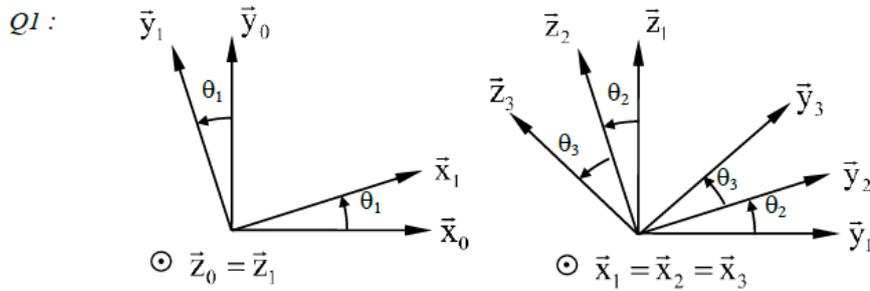


Problème 1 : Robot de soudage



Q2 : En cinématique du solide : $\overrightarrow{V(O_4 \in 4/0)} = \overrightarrow{V(O_4 \in 4/3)} + \overrightarrow{V(O_4 \in 3/2)} + \overrightarrow{V(O_4 \in 2/1)} + \overrightarrow{V(O_4 \in 1/0)}$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{d}{dt/3}(\overrightarrow{O_3 O_4}) + \overrightarrow{V(O_2 \in 3/2)} + \overrightarrow{O_4 O_2} \wedge \overrightarrow{\Omega_{3/2}} + \overrightarrow{V(O_1 \in 2/1)} + \overrightarrow{O_4 O_1} \wedge \overrightarrow{\Omega_{2/1}} + \overrightarrow{V(O_1 \in 1/0)} + \overrightarrow{O_4 O_1} \wedge \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \\
 &= \frac{d}{dt/3}(-L_3 \vec{z}_3) + (L_3 \vec{z}_3 - L_2 \vec{y}_3) \wedge \dot{\theta}_3 \vec{x}_{321} + (L_3 \vec{z}_3 - L_2 \vec{y}_3 - L_1 \vec{y}_2) \wedge \dot{\theta}_2 \vec{x}_{321} + (L_3 \vec{z}_3 - L_2 \vec{y}_3 - L_1 \vec{y}_2) \wedge \dot{\theta}_1 \vec{z}_1 \\
 &= -\dot{L}_3 \vec{z}_3 + L_3 \dot{\theta}_3 \vec{y}_3 + L_2 \dot{\theta}_3 \vec{z}_3 + L_3 \dot{\theta}_2 \vec{y}_3 + L_2 \dot{\theta}_2 \vec{z}_3 + L_1 \dot{\theta}_2 \vec{z}_2 + L_3 \dot{\theta}_1 \vec{z}_3 \wedge \vec{z}_1 - L_2 \dot{\theta}_1 \vec{y}_3 \wedge \vec{z}_1 - L_1 \dot{\theta}_1 \vec{y}_2 \wedge \vec{z}_1
 \end{aligned}$$

Or

$$\vec{z}_1 = \cos(\theta_2 + \theta_3) \vec{z}_3 + \sin(\theta_2 + \theta_3) \vec{y}_3 \quad \text{et} \quad \vec{z}_1 = \cos \theta_2 \vec{z}_2 + \sin \theta_2 \vec{y}_2$$

D'où

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{V(O_4 \in 4/0)} &= -\dot{L}_3 \vec{z}_3 + L_3(\dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_2) \vec{y}_3 + L_2(\dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_2) \vec{z}_3 + L_1 \dot{\theta}_2 \vec{z}_2 - L_3 \dot{\theta}_1 \sin(\theta_2 + \theta_3) \vec{x}_{321} \\
 &\quad - L_2 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_2 + \theta_3) \vec{x}_{321} - L_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_2 \vec{x}_{321}
 \end{aligned}$$

Ce qui donne dans R_3 :

$$\overrightarrow{V(O_4 \in 4/0)} = \begin{matrix} \left. \begin{array}{l} -L_3 \dot{\theta}_1 \sin(\theta_2 + \theta_3) - L_2 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_2 + \theta_3) - L_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_2 \\ L_3(\dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_2) + L_1 \dot{\theta}_2 \sin \theta_3 \\ -\dot{L}_3 + L_2(\dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_2) + L_1 \dot{\theta}_2 \cos \theta_3 \end{array} \right\} \end{matrix}$$

Q2 : En cinématique du point.

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{V(O_4 \in 4/0)} &= \frac{d}{dt/0}(\overrightarrow{O_0 O_4}) = \frac{d}{dt/0}(\overrightarrow{O_0 O_1} + \overrightarrow{O_1 O_2} + \overrightarrow{O_2 O_3} + \overrightarrow{O_3 O_4}) = \frac{d}{dt/0}(L_0 \vec{z}_0 + L_1 \vec{y}_2 + L_2 \vec{y}_3 - L_3 \vec{z}_3) \\
 &= L_1 \frac{d\vec{y}_2}{dt/0} + L_2 \frac{d\vec{y}_3}{dt/0} - \dot{L}_3 \vec{z}_3 - L_3 \frac{d\vec{z}_3}{dt/0}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d\vec{y}_2}{dt/0} &= \overrightarrow{\Omega_{2/0}} \wedge \vec{y}_2 = (\overrightarrow{\Omega_{2/1}} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}}) \wedge \vec{y}_2 = (\dot{\theta}_2 \vec{x}_{321} + \dot{\theta}_1 \vec{z}_1) \wedge \vec{y}_2 = \dot{\theta}_2 \vec{z}_2 + \dot{\theta}_1 (\cos \theta_2 \vec{z}_2 + \sin \theta_2 \vec{y}_2) \wedge \vec{y}_2 \\
 &= \dot{\theta}_2 \vec{z}_2 - \dot{\theta}_1 \cos \theta_2 \vec{x}_3 = \dot{\theta}_2 (\cos \theta_3 \vec{z}_3 + \sin \theta_3 \vec{y}_3) - \dot{\theta}_1 \cos \theta_2 \vec{x}_3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d\vec{z}_3}{dt/0} &= \overrightarrow{\Omega_{3/0}} \wedge \vec{z}_3 = (\overrightarrow{\Omega_{3/2}} + \overrightarrow{\Omega_{2/1}} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}}) \wedge \vec{z}_3 = ((\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) \vec{x}_{321} + \dot{\theta}_1 \vec{z}_1) \wedge \vec{z}_3 = \\
 &= -(\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) \vec{y}_3 + \dot{\theta}_1 (\cos(\theta_2 + \theta_3) \vec{z}_3 + \sin(\theta_2 + \theta_3) \vec{y}_3) \wedge \vec{z}_3 = -(\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) \vec{y}_3 + \dot{\theta}_1 \sin(\theta_2 + \theta_3) \vec{x}_3
 \end{aligned}$$

$$\text{D'où } \overrightarrow{V(O_4 \in 4/0)} = \begin{matrix} \left. \begin{array}{l} -L_3 \dot{\theta}_1 \sin(\theta_2 + \theta_3) - L_2 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_2 + \theta_3) - L_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_2 \\ L_3(\dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_2) + L_1 \dot{\theta}_2 \sin \theta_3 \\ -\dot{L}_3 + L_2(\dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_2) + L_1 \dot{\theta}_2 \cos \theta_3 \end{array} \right\} \end{matrix}$$

Q3 : $\alpha = (\vec{z}_0, \vec{z}_3)$ donc pas de changement d'orientation de 4/0. $\vec{V}(O_4 \in S_4/S_0) = V\vec{y}_0$ avec $V = \text{cste}$ donc mouvement de translation rectiligne de direction \vec{y}_0 .

$$Q4 : \overrightarrow{\Omega}_{4/0} = \vec{0} = \overrightarrow{\Omega}_{4/3} + \overrightarrow{\Omega}_{3/2} + \overrightarrow{\Omega}_{2/1} + \overrightarrow{\Omega}_{1/0} = \vec{0} + \dot{\theta}_3 \vec{x}_{321} + \dot{\theta}_2 \vec{x}_{321} + \dot{\theta}_1 \vec{z}_1$$

$$D'où : \dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_2 = 0 \quad \Rightarrow \theta_2 + \theta_3 = \alpha = \text{cste} \quad \text{et} \quad \dot{\theta}_1 = 0$$

Cela donne :

$$\overrightarrow{V}(O_4 \in 4/0) = (L_1 \dot{\theta}_2 \cos \theta_3 - \dot{L}_3) \vec{z}_3 + L_1 \dot{\theta}_2 \sin \theta_3 \vec{y}_3$$

Q5 : par projection dans R_0 :

$$V = -(L_1 \dot{\theta}_2 \cos \theta_3 - \dot{L}_3) \sin \alpha + L_1 \dot{\theta}_2 \sin \theta_3 \cos \alpha$$

$$0 = (L_1 \dot{\theta}_2 \cos \theta_3 - \dot{L}_3) \cos \alpha + L_1 \dot{\theta}_2 \sin \theta_3 \sin \alpha$$

Q6 : pour $\alpha = 0$, on a donc $V = L_1 \dot{\theta}_2 \sin \theta_3$ d'où :

$$V_{\max} = L_1 \dot{\theta}_2 \max$$

A.N. : $V_{\max} = L_1 \dot{\theta}_2 \max = 0.021 \text{ m/s} < 0.05 \text{ m/s}$. Le CDC est respecté.

Problème 2 : houlogénératrice

$$Q1. \overrightarrow{V}_{A,1/0} = \overrightarrow{V}_{O,1/0} + \overrightarrow{AO} \wedge \overrightarrow{\Omega}_{1/0} = \vec{0} - d\vec{x}_1 \wedge \dot{\alpha} \vec{z} = d\dot{\alpha} \vec{y}_1$$

$$Q2. \overrightarrow{V}_{G,2/0} = \overrightarrow{V}_{A,2/0} + \overrightarrow{GA} \wedge \overrightarrow{\Omega}_{2/0} = \overrightarrow{V}_{A,1/0} - L\vec{x}_2 \wedge (\dot{\alpha} + \dot{\theta}) \vec{z} = d\dot{\alpha} \vec{y}_1 + L(\dot{\alpha} + \dot{\theta}) \vec{y}_2$$

Q3. Expression du moment cinétique :

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}_{A,2/0} &= J\vec{\Omega} + m_2 \overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{V}_{A,2/0} = J(\dot{\alpha} + \dot{\theta}) \vec{z} + m_2 L \vec{x}_2 \wedge d\dot{\alpha} \vec{y}_1 \\ &= \left[J(\dot{\alpha} + \dot{\theta}) + m_2 dL \dot{\alpha} \cos \theta \right] \vec{z}_0 \end{aligned}$$

Q4. Expression du moment dynamique :

$$\begin{aligned} \vec{\delta}_{A,2/0} &= \left. \frac{d\vec{\sigma}_{A,2/0}}{dt} \right|_{\mathcal{R}_0} + m_2 \overrightarrow{V}_{A,1/0} \wedge \overrightarrow{V}_{G,2/0} \\ &= \left[J(\ddot{\alpha} + \ddot{\theta}) + m_2 dL(\ddot{\alpha} \cos \theta - \dot{\alpha} \dot{\theta} \sin \theta) \right] \vec{z}_0 + m_2 d\dot{\alpha} \vec{y}_1 \wedge \left[d\dot{\alpha} \vec{y}_1 + L(\dot{\alpha} + \dot{\theta}) \vec{y}_2 \right] \\ &= \left[J(\ddot{\alpha} + \ddot{\theta}) + m_2 dL(\ddot{\alpha} \cos \theta + \dot{\alpha}^2 \sin \theta) \right] \vec{z}_0 \end{aligned}$$

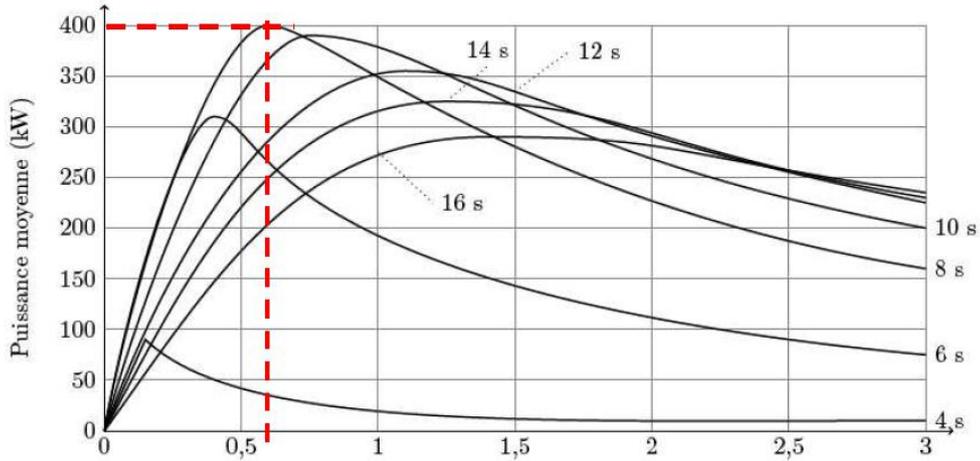
Q5. Application du théorème du moment dynamique :

$$\vec{\delta}_{A,2/0} \cdot \vec{z}_0 = (\overrightarrow{AG} \wedge m_2 \vec{g}) \cdot \vec{z}_0 - \lambda \dot{\theta} = -m_2 g L \sin(\alpha + \theta) - \lambda \dot{\theta}$$

Soit l'équation projetée selon \vec{z}_0 :

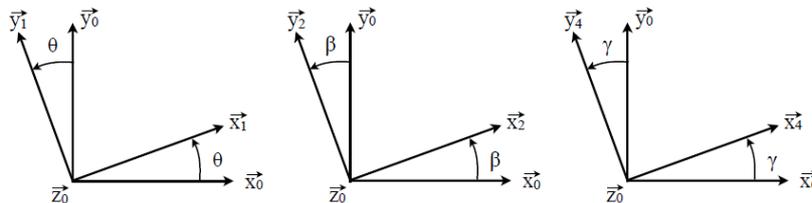
$$J(\ddot{\alpha} + \ddot{\theta}) + m_2 dL(\ddot{\alpha} \cos \theta + \dot{\alpha}^2 \sin \theta) = -m_2 g L \sin(\alpha + \theta) - \lambda \dot{\theta}$$

Q6. Puissance maximale récupérable :



La puissance maximale récupérable est donc de $400kW$, pour une houle de période $8s$ et une valeur de $\lambda = 0,6N.m.s$.

Q7. Figures de projection :



Q8. Roulement sans glissement en I entre 1 et 2 :

$$\begin{aligned} \vec{V}_{I,2/1} &= \vec{0} = \vec{V}_{I,2/0} - \vec{V}_{I,1/0} \\ &= \vec{V}_{A,2/0} + \vec{IA} \wedge \vec{\Omega}_{2/0} - \vec{V}_{O,1/0} - \vec{IO} \wedge \vec{\Omega}_{1/0} \\ &= r_2 \vec{y}_0 \wedge \dot{\beta} \vec{z}_0 + r_1 \vec{y}_0 \wedge \dot{\theta} \vec{z}_0 = [r_2 \dot{\beta} + r_1 \dot{\theta}] \vec{x}_0 \end{aligned}$$

Donc $\vec{V}_{I,1/0} = -r_1 \dot{\theta} \vec{x}_0$ et $\vec{V}_{I,2/0} = r_2 \dot{\beta} \vec{x}_0$

Q9. On en déduit la relation : $r_1 \dot{\theta} = -r_2 \dot{\beta}$.

Q10. Les torseurs cinématiques en B sont :

$$\{\mathcal{V}_{2/0}\} = \left\{ \begin{matrix} \dot{\beta} \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_A = \left\{ \begin{matrix} \dot{\beta} \vec{z}_0 \\ \vec{0} + \vec{BA} \wedge \dot{\beta} \vec{z}_0 \end{matrix} \right\}_B = \left\{ \begin{matrix} \dot{\beta} \vec{z}_0 \\ -b \vec{y}_2 \wedge \dot{\beta} \vec{z}_0 = -b \dot{\beta} \vec{x}_2 \end{matrix} \right\}_B$$

De plus, on a $\vec{V}_{B,3/0} = \vec{V}_{B,3/2} + \vec{V}_{B,2/0} = \vec{V}_{B,2/0}$ car B est le centre de la liaison pivot entre 2 et 3. Donc :

$$\{\mathcal{V}_{3/0}\} = \left\{ \begin{matrix} (\dot{\beta} + \omega_{3/2}) \vec{z}_0 \\ -b \dot{\beta} \vec{x}_2 \end{matrix} \right\}_B$$

Q11 . Torseur cinématique d'une liaison pivot glissant. Donc 1ddl en translation $v_{4/3}$ et 1ddl en rotation $\omega_{4/3}$ suivant l'axe \vec{y}_4 .

Q12. On en déduit donc :

$$\begin{aligned} \vec{V}_{B,4/3} &= \vec{V}_{B,4/0} - \vec{V}_{B,3/0} \\ &= \vec{V}_{C,4/0} + \overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{\Omega_{4/0}} + b\dot{\beta}\vec{x}_2 = \vec{0} + L_v\vec{y}_4 \wedge \dot{\gamma}\vec{z}_0 + b\dot{\beta}\vec{x}_2 \\ &= L_v\dot{\gamma}\vec{x}_4 + b\dot{\beta}\vec{x}_2 \end{aligned}$$

La norme de $\vec{V}_{B,4/3}$ se calcule donc en écrivant les composantes de $\vec{V}_{B,4/3}$ dans une base ortho-normée. Ici, on sait que $\vec{V}_{B,4/3}$ est porté par \vec{y}_4 . On projette donc dans la base \mathcal{B}_4 :

$$\vec{x}_2 = \cos(\gamma - \beta)\vec{x}_4 - \sin(\gamma - \beta)\vec{y}_4$$

Donc :

$$\vec{V}_{B,4/3} = L_v\dot{\gamma}\vec{x}_4 + b\dot{\beta}(\cos(\gamma - \beta)\vec{x}_4 - \sin(\gamma - \beta)\vec{y}_4) = [L_v\dot{\gamma} + b\dot{\beta}\cos(\gamma - \beta)]\vec{x}_4 - b\dot{\beta}\sin(\gamma - \beta)\vec{y}_4$$

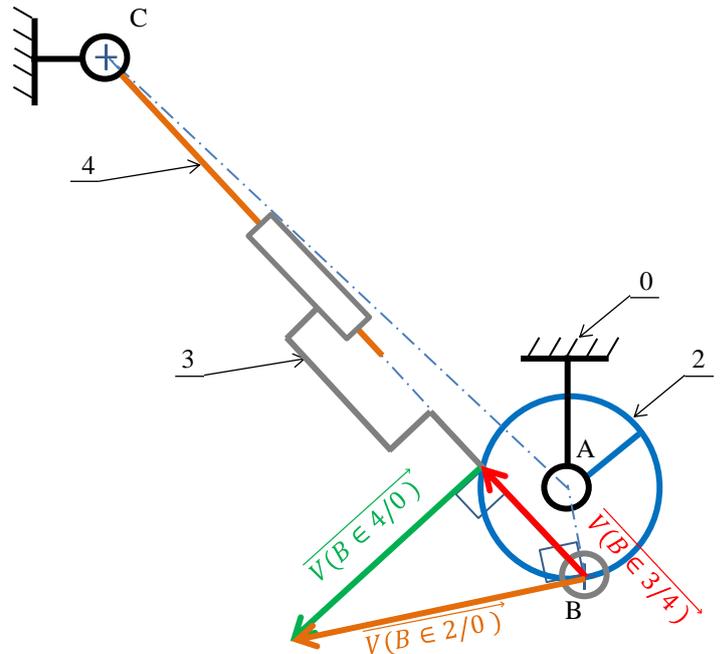
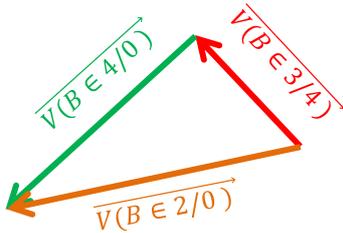
Donc, comme $\vec{V}_{B,4/3}$ est porté par \vec{y}_4 :

$$\begin{aligned} \vec{V}_{B,4/3} \cdot \vec{x}_4 &= L_v\dot{\gamma} + b\dot{\beta}\cos(\gamma - \beta) = 0 \\ |\vec{V}_{B,4/3} \cdot \vec{y}_4| &= \|\vec{V}_{B,4/3}\| = |b\dot{\beta}\sin(\gamma - \beta)| \end{aligned}$$

Q13. $\overrightarrow{V(B \in 2/0)} \perp (AB)$

Q14. $\overrightarrow{V(B \in 4/0)} \perp (BC)$ et $\overrightarrow{V(B \in 3/4)} // (BC)$

Q15.



Q16. $\overrightarrow{V(B \in 3/4)}$ est maximale si $\overrightarrow{V(B \in 4/0)} = \vec{0}$

Cela correspond $(AB) \perp (BC)$, ce qui est presque le cas figure 8

Q17. On cherche l'angle β_0 qui maximise la puissance transmise, donc qui maximise la vitesse $\|\vec{V}_{B,4/3}\|$. Donc $\|\vec{V}_{B,4/3}\| = |b\dot{\beta} \sin(\gamma - \beta)|$ est maximal lorsque $|\gamma - \beta| = \frac{\pi}{2}$. Il faut donc trouver un lien entre γ et β . Pour cela, on écrit la fermeture géométrique faisant intervenir les angles β et γ :

$$\begin{aligned} \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA} &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow b\vec{y}_2 + L_v\vec{y}_4 + (r_1 + r_2 - c)\vec{y}_0 &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow b[-\sin\beta\vec{x}_0 + \cos\beta\vec{y}_0] + L_v[-\sin\gamma\vec{x}_0 + \cos\gamma\vec{y}_0] + (r_1 + r_2 - c)\vec{y}_0 &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow [-b\sin\beta - L_v\sin\gamma]\vec{x}_0 + [b\cos\beta + L_v\cos\gamma + (r_1 + r_2 - c)]\vec{y}_0 &= \vec{0} \end{aligned}$$

En projetant sur les axes \vec{x}_0 et \vec{y}_0 , il vient :

$$\begin{cases} -b\sin\beta - L_v\sin\gamma = 0 \\ b\cos\beta + L_v\cos\gamma + (r_1 + r_2 - c) = 0 \end{cases}$$

Donc si $|\gamma - \beta| = \frac{\pi}{2}$, en supposant d'après le dessin que $\beta > \gamma$, on a : $\gamma = \beta - \frac{\pi}{2}$. En remplaçant dans les deux équations :

$$\begin{aligned} \begin{cases} -b\sin\beta - L_v\sin(\beta - \frac{\pi}{2}) = 0 \\ b\cos\beta + L_v\cos(\beta - \frac{\pi}{2}) + (r_1 + r_2 - c) = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} -b\sin\beta + L_v\cos\beta = 0 \\ b\cos\beta + L_v\sin\beta + (r_1 + r_2 - c) = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} L_v = b\tan\beta \\ b\cos\beta + b\tan\beta\sin\beta + (r_1 + r_2 - c) = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} L_v = b\tan\beta \\ b[1 + \tan^2\beta] + = \frac{c-r_1-r_2}{\cos\beta} \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} L_v = b\tan\beta \\ b\frac{1}{\cos^2\beta} = \frac{c-r_1-r_2}{\cos\beta} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} L_v = b\tan\beta \\ \cos\beta = \frac{b}{c-r_1-r_2} \end{cases} \end{aligned}$$

On en déduit donc : $\beta_0 = \arccos\left[\frac{b}{c-r_1-r_2}\right]$.

Q18. On souhaite que l'angle γ reste négatif au cours du mouvement. Donc d'après la figure, β doit être compris entre 0 et 180°. Or, d'après la relation de la **Q9**, on a : $r_1\dot{\theta} = -r_2\dot{\beta}$, donc par intégration, pour une variation $\Delta\theta = 90^{\text{circ}}$, on a : $\Delta\beta = -\frac{r_1}{r_2}\Delta\theta$.

Q19. Pour avoir un déplacement angulaire de $2\beta_0$, il faut donc :

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{2\beta_0}{\Delta\theta}$$

Avec $\Delta\theta = 90^\circ$.

Q20. On reprend le résultat de la **Q13** :

$$\begin{cases} -b\sin\beta - L_v\sin\gamma = 0 \\ b\cos\beta + L_v\cos\gamma + (r_1 + r_2 - c) = 0 \end{cases}$$

Alors, en éliminant le paramètre γ :

$$\begin{cases} -b\sin\beta = L_v\sin\gamma \\ b\cos\beta + (r_1 + r_2 - c) = -L_v\cos\gamma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -b\sin\beta = L_v\sin\gamma \\ [b\cos\beta + (r_1 + r_2 - c)]^2 + [b\sin\beta]^2 = L_v^2 \end{cases}$$

La seconde équation s'écrit donc :

$$L_v = \sqrt{[b \cos \beta + (r_1 + r_2 - c)]^2 + [b \sin \beta]^2}$$

Q21. On en déduit alors les deux valeurs de L_v^{min} et L_v^{max} :

$$\begin{cases} L_v^{min} = c - r_1 - r_2 - b \\ L_v^{max} = \sqrt{[b \cos 2\beta_0 + (r_1 + r_2 - c)]^2 + [b \sin 2\beta_0]^2} \end{cases}$$

Donc on obtient :

$$\Delta L_v = \sqrt{[b \cos 2\beta_0 + (r_1 + r_2 - c)]^2 + [b \sin 2\beta_0]^2} - [c - r_1 - r_2 - b]$$

Q22 Pour diminuer F dans faire varier ΔE , il est donc nécessaire d'augmenter ΔL_v . Pour cela, il faut augmenter le paramètre b puisque :

$$\Delta L_v = \sqrt{b^2 + (r_1 + r_2 - c)^2 + 2b(r_1 + r_2 - c) \cos 2\beta_0} - [c - r_1 - r_2 - b]$$

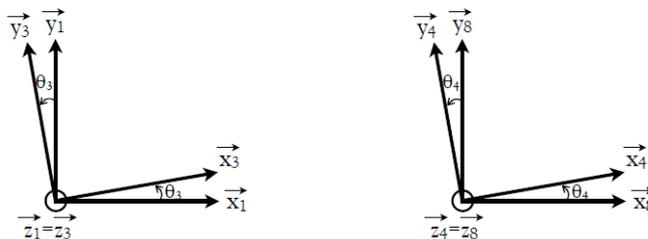
Q23 Application numérique : on se place donc à une puissance à fournir de $10kW$ avec une fréquence d'oscillation de $1Hz$, donc $\Delta E = 10000 \cdot 1 = 10kJ$ avec $\beta_0 \approx 80^\circ$

$$F = \frac{\Delta E}{\Delta L_v} = \frac{10^3}{\sqrt{0,08^2 + (0,1 + 0,15 - 0,7)^2 + 2 \cdot 0,8(0,1 + 0,15 - 0,7) \cos 2\beta_0} - [0,7 - 0,1 - 0,15 - 0,08]}$$

D'où : $F = 1754 \text{ daN}$

Problème 3: Ducati monster

Q1. Les figures géométrales sont les suivantes.



Q2. Le mouvement de la roue 3 par rapport au cadre 1 est un mouvement de rotation d'axe (O_3, \vec{z}_3) défini par le torseur :

$$\left\{ \mathcal{V}_{3/1} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}_{3/1} \\ \vec{V}_{O_3 \in 3/1} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \dot{\theta}_3 \cdot \vec{z}_1 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{O_3}$$

Q3. Par changement de point, on en déduit l'expression du vecteur vitesse $\overrightarrow{V_{A_3 \in 3/1}}$:

$$\overrightarrow{V_{A_3 \in 3/1}} = \overrightarrow{V_{O_3 \in 3/1}} + \overrightarrow{A_3 O_3} \wedge \overrightarrow{\Omega_{3/1}} = \vec{0} + R \cdot \vec{y}_1 \wedge \dot{\theta}_3 \cdot \vec{z}_1$$

soit

$$\boxed{\overrightarrow{V_{A_3 \in 3/1}} = R \cdot \dot{\theta}_3 \cdot \vec{x}_1}$$

Q4. Le mouvement du cadre 1 par rapport à la route 0 est un mouvement de translation de direction \vec{x}_0 défini par le torseur :

$$\left\{ \mathcal{V}_{1/0} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \\ \overrightarrow{V_{G \in 1/0}} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ V \cdot \vec{x}_0 \end{array} \right\}_G$$

Q5. Alors, $\overrightarrow{V_{A_3 \in 1/0}} = \overrightarrow{V_{G \in 1/0}}$ c'est-à-dire :

$$\boxed{\overrightarrow{V_{A_3 \in 1/0}} = V \cdot \vec{x}_0}$$

Q6. L'hypothèse de roulement sans glissement se traduit par l'équation vectorielle suivante :

$$\overrightarrow{V_{A_3 \in 3/0}} = \vec{0}$$

Or,

$$\overrightarrow{V_{A_3 \in 3/0}} = \overrightarrow{V_{A_3 \in 3/1}} + \overrightarrow{V_{A_3 \in 1/0}} = (R \cdot \dot{\theta}_3 + V) \cdot \vec{x}_0$$

D'où l'équation vectorielle cherchée :

$$\boxed{(R \cdot \dot{\theta}_3 + V) \cdot \vec{x}_0 = \vec{0}}$$

Q7. On projette cette équation pour en déduire une expression de $\dot{\theta}_3$:

$$\boxed{\dot{\theta}_3 = -\frac{V}{R}}$$

On retrouve un résultat bien connu, typique d'un mouvement de rotation ! Le signe négatif traduit bien le fait que la roue tourne dans le sens horaire, ce qui est le cas lorsque la moto avance.

Q8. Puisque la transmission primaire diminue la vitesse angulaire, alors $\dot{\theta}_e < \dot{\theta}_m$, soit $\frac{\dot{\theta}_e}{\dot{\theta}_m} < 1$. On écrit donc :

$$\frac{\dot{\theta}_e}{\dot{\theta}_m} = \frac{33}{61}$$

Q9. Par le même raisonnement, on écrit :

$$\frac{\dot{\theta}_3}{\dot{\theta}_s} = \frac{1}{3}$$

Q10. On en déduit l'expression de r_6 , le rapport de boîte cherché :

$$r_6 = \left| \frac{\dot{\theta}_e}{\dot{\theta}_s} \right| = \left| \frac{33}{61} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{\dot{\theta}_m}{\dot{\theta}_3} \right|$$

soit

$$\boxed{r_6 = \frac{11}{61} \cdot \dot{\theta}_m \cdot \frac{R}{V}}$$

Q11. Comme le régime moteur est de $6100tr/min$, on a $\dot{\theta}_m \simeq 639rad/s$. D'où, après application numérique :

$$r_6 \simeq 0,925$$

Cette valeur est conforme à celle annoncée par le constructeur, $r_6 = 0,923$.

Q12. Le vecteur \overrightarrow{CB} s'écrit d'une part $\overrightarrow{CB} = \lambda_6 \cdot \vec{y}_6$ et d'autre part $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = -L_5 \cdot \vec{y}_5 + L_1 \cdot \vec{y}_1$. Or, $\vec{y}_5 = \cos\beta \cdot \vec{y}_1 - \sin\beta \cdot \vec{x}_1$. D'où $\overrightarrow{CB} = L_5 \cdot \sin\beta \cdot \vec{x}_1 + (L_1 - L_5 \cdot \cos\beta) \cdot \vec{y}_1$.

On en déduit deux expressions de sa norme :

$$\|\overrightarrow{CB}\| = \lambda_6 = \sqrt{(L_5 \cdot \sin\beta)^2 + (L_1 - L_5 \cdot \cos\beta)^2}$$

Q13. En développant la seconde expression, on obtient :

$$\cos\beta = \frac{L_1^2 + L_5^2 - \lambda_6^2}{2 \cdot L_1 \cdot L_5}$$

Q14. Le torseur cinématique $\{\mathcal{V}_{8/1}\}$ s'écrit :

$$\{\mathcal{V}_{8/1}\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \overrightarrow{V_{O_4 \in 8/1}} \end{array} \right\}$$

Or, par définition :

$$\overrightarrow{V_{O_4 \in 8/1}} = \left. \frac{d\overrightarrow{AO_4}}{dt} \right|_{\mathcal{R}_1} = \left. \frac{d(L_4 \cdot \vec{x}_1 - \lambda_8 \cdot \vec{y}_8)}{dt} \right|_{\mathcal{R}_1} = -\dot{\lambda}_8 \cdot \vec{y}_8$$

D'où :

$$\{\mathcal{V}_{8/1}\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ -\dot{\lambda}_8 \cdot \vec{y}_8 \end{array} \right\}_{O_4}$$

Q15. Par composition du mouvement, on écrit :

$$\overrightarrow{V_{O_4 \in 1/0}} = \overrightarrow{V_{O_4 \in 1/8}} + \overrightarrow{V_{O_4 \in 8/0}} = -\overrightarrow{V_{O_4 \in 8/1}} + \overrightarrow{V_{O_4 \in 8/0}}$$

d'où

$$\overrightarrow{V_{O_4 \in 1/0}} = V \cdot \vec{x}_0 + \dot{Y}_4 \cdot \vec{y}_0 + \dot{\lambda}_8 \cdot \vec{y}_8$$

Q16. Comme 1 est en translation par rapport à 0, $\overrightarrow{\Omega}_{1/0} = \vec{0}$ et on obtient directement :

$$\overrightarrow{V_{A \in 1/0}} = \overrightarrow{V_{O_4 \in 1/0}} = V \cdot \vec{x}_0 + \dot{Y}_4 \cdot \vec{y}_0 + \dot{\lambda}_8 \cdot \vec{y}_8$$

Alors, sa projection sur \vec{y}_0 permet d'écrire :

$$\overrightarrow{V_{A \in 1/0}} \cdot \vec{y}_0 = \dot{Y}_4 + \dot{\lambda}_8 \cdot \cos\alpha$$

D'où l'expression cherchée :

$$\dot{\lambda}_8 = \frac{\dot{Y}_1 - \dot{Y}_4}{\cos\alpha}$$

Q17. Le torseur cinématique $\{\mathcal{V}_{5/1}\}$ s'écrit :

$$\{\mathcal{V}_{5/1}\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega_{5/1}} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_A$$

Or, $\overrightarrow{\Omega_{5/1}} = \dot{\beta} \cdot \vec{z}_1$. D'où :

$$\{\mathcal{V}_{5/1}\} = \left\{ \begin{array}{c} \dot{\beta} \cdot \vec{z}_1 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_A$$

Q18. Par composition du mouvement, on écrit :

$$\overrightarrow{V_{O_3 \in 1/0}} = -\overrightarrow{V_{O_3 \in 5/1}} + \overrightarrow{V_{O_3 \in 5/0}}$$

Par changement de point, on écrit :

$$\overrightarrow{V_{O_3 \in 5/1}} = \overrightarrow{V_{A \in 5/1}} + \overrightarrow{O_3 A} \wedge \overrightarrow{\Omega_{5/1}} = -L_3 \cdot \vec{y}_5 \wedge \dot{\beta} \cdot \vec{z}_1 = -L_3 \cdot \dot{\beta} \cdot \vec{x}_5$$

On obtient ainsi :

$$\boxed{\overrightarrow{V_{O_3 \in 1/0}} = L_3 \cdot \dot{\beta} \cdot \vec{x}_5 + V \cdot \vec{x}_0 + \dot{Y}_3 \cdot \vec{y}_0}$$

Q19. Comme 1 est en translation par rapport à 0, on obtient directement :

$$\overrightarrow{V_{A \in 1/0}} = \overrightarrow{V_{O_3 \in 1/0}} = L_3 \cdot \dot{\beta} \cdot \vec{x}_5 + V \cdot \vec{x}_0 + \dot{Y}_3 \cdot \vec{y}_0$$

Alors, sa projection sur \vec{y}_0 permet d'écrire :

$$\overrightarrow{V_{A \in 1/0}} \cdot \vec{y}_0 = L_3 \cdot \dot{\beta} \cdot \sin \beta + \dot{Y}_3 = \frac{L_3 \cdot \lambda_6 \cdot \dot{\lambda}_6}{L_1 \cdot L_5} + \dot{Y}_3$$

d'après la Q13. D'où l'expression cherchée :

$$\boxed{\dot{\lambda}_6 = \frac{L_1 \cdot L_5}{L_3 \cdot \lambda_6} (\dot{Y}_1 - \dot{Y}_3)}$$

Q20 : $t_{retard} = \frac{e}{v}$

Q21 : on a ce qu'on appelle un phénomène de résonance. La suspension amplifie les oscillations dues à la route.

Q22. De la même façon, on peut déterminer les coefficients multiplicatifs pour d'autres pulsations :

Pulsation	2rad/s	20 rad/s	200rad/s
Coefficient multiplicateur	1	13	0,01

Pour une pulsation de 200rad/s, on diminue l'amplitude.

Q23. En fait, la remarque précédente est vraie pour toutes les pulsations supérieures à la pulsation de coupure à 0dB :

$$\boxed{\omega_{c0} \simeq 28rad/s}$$

Q24. Cela nous permet de remonter à une valeur de fréquence de coupure :

$$\boxed{f \simeq 4,46Hz}$$

Celle-ci est inférieure à 5Hz ; le cahier des charges est donc bien respecté.

Problème 4: PHR d'airbus

Q1 - Liaison normalisée 1/3 : rotule ou sphérique à doigt. 2 rotations sur les 3 possibles sont autorisées.

La rotation bloquée est nécessaire pour la transformation de mouvement. Les rotations libres permettent le changement d'orientation de 4/1 et donnent de la « souplesse » au mécanisme. Elles permettent d'assurer un bon fonctionnement du mécanisme malgré de possibles défauts d'alignement des axes des liaisons.

Q2 - Attention : β et θ pris en valeur algébrique, sont négatifs sur la figure.

En projection sur x_b : $-z \sin \theta + a \cos(\beta) = a$ ou encore $z \sin \theta = a(\cos(\beta) - 1)$ (1)

En projection sur z_b : $z \cos \theta = b - a \sin(\beta)$ (2)

$$(1)^2 + (2)^2 \quad \text{donne} \quad z = \sqrt{(b - a \sin \beta)^2 + a^2 (1 - \cos \beta)^2}$$

ou encore en écrivant directement la relation de Pythagore dans le triangle constitué des points : O_4 , H, et le projeté de H sur O_4H'

Q3 - En considérant les valeurs pour $\beta = -12$ et 4° , on obtient :

$$K_V = \frac{4 + 12}{-0,139 - 0,417} \times \frac{\pi}{180} = -0,502 \text{ rad / m}$$

longueur utile : $l = 0,139 + 0,417 = 0,556 \text{ m}$

Q4 - Formule de Willis : $\frac{\omega_{P2} - \omega_{PS}}{\omega_{P1} - \omega_{PS}} = -\frac{Z_1}{Z_2}$

Lors de la première phase, $\omega_{P2} = 0$

$$\frac{-\omega_{PS1}}{\omega_{P1} - \omega_{PS1}} = -\frac{Z_1}{Z_2} \Rightarrow R_3 = \frac{\omega_{PS1}}{\omega_{P1}} = \frac{\theta_{PS1}}{\theta_{P1}} = \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2}$$

Lors de la deuxième phase, $\omega_{P1} = 0$

$$\frac{\omega_{P2} - \omega_{PS2}}{-\omega_{PS2}} = -\frac{Z_1}{Z_2} \Rightarrow R_4 = \frac{\omega_{PS2}}{\omega_{P2}} = \frac{\theta_{PS2}}{\theta_{P2}} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

Application numérique

$$R_3 = \frac{\theta_{PS1}}{\theta_{P1}} = \frac{52}{52 + 20} = \frac{1}{1,385} \quad \text{et} \quad R_4 = \frac{\theta_{PS2}}{\theta_{P2}} = \frac{20}{52 + 20} = \frac{1}{3,6}$$

$$\mathbf{Q5} - R_5 = -\frac{20}{70} = -\frac{1}{3,5} \quad R_6 = (-1)^2 \frac{30}{50} \times \frac{20}{60} = \frac{1}{5} \quad R_7 = -\frac{40}{80} = -\frac{1}{2}$$

Q6 - D'après l'annexe , $rb = \frac{\omega_{d2/PS}}{\omega_{d1/PS}} = -\frac{Z_A}{Z_B} \frac{Z_B}{Z_A} = -1$ avec $\begin{cases} \omega_{d2/PS} = \omega_{d2/bâti} - \omega_{PS/bâti} = \omega_{d2} - \omega_{PS} \\ \omega_{d1/PS} = \omega_{d1/bâti} - \omega_{PS/bâti} = \omega_{d1} - \omega_{PS} \end{cases}$

On en déduit, en utilisant la notation du sujet ($\omega_{PS} \equiv \omega_d$) : $\omega_{d2} - \omega_d = \omega_{d1} - \omega_d$

$$\omega_d = \frac{\omega_{d1} + \omega_{d2}}{2} \Rightarrow \theta_d = \frac{\theta_{d1} + \theta_{d2}}{2} \quad \text{et donc} : K_3 = \frac{1}{2}$$

Q7 - Conséquence en cas de défaillance d'un moteur hydraulique

Si les deux moteurs hydrauliques fonctionnent, la puissance transmise est telle que :

$$P = C \omega_d \quad \text{et donc} \quad C = \frac{P}{\omega_d}$$

Avec un seul moteur : $P' = C' \omega_d'$ avec $P' = \frac{P}{2}$ et $\omega_d' = \frac{\omega_d}{2}$. Donc : $C' = \frac{P'}{\omega_d'} = \frac{P}{\omega_d} = C$.

Le couple reste identique, ce qui est absolument nécessaire pour pouvoir continuer à mouvoir le PHR, bien qu'à vitesse réduite.

De plus, en cas de rupture d'un composant mécanique, il est nécessaire de bloquer l'arbre du moteur défaillant en rotation sans quoi le moteur qui fonctionne ne pourrait plus transmettre de couple vers le porte satellite. Un frein à manque de courant est implanté en sortie de chaque moteur hydraulique.

Problème 5: Robot Sphéro

Q1 : Si le robot Sphero était parfaitement asservi, c'est à dire s'il suivait exactement les consignes de l'utilisateur (aucune erreur statique, aucun dépassement, temps de réponse nul), il suffirait de trois clics pour suivre la trajectoire théorique. Ceux-ci devraient imposer un cap à 0° , un second cap à 90° et un dernier à -90° .

Q2 : L'exigence 2 de maniabilité n'est pas respectée car le robot s'éloigne de plus de 25 cm de la trajectoire de consigne.

Q3 : La condition de RSG aux points I et J s'exprime par : $\overrightarrow{V(I \in 2/1)} = \overrightarrow{V(J \in 4/1)} = \vec{0}$

Q4 : On exprime la condition de RSG au point J et on écrit la composition des vecteurs vitesse sur la chaîne cinématique 4-6-2-1 en J : $\overrightarrow{V(J \in 4/1)} = \overrightarrow{V(J \in 4/6)} + \overrightarrow{V(J \in 6/2)} + \overrightarrow{V(J \in 2/1)} = \vec{0}$

On a les torseurs cinématique suivants :

$$\left\{ \sqrt{4/6} \right\} = \begin{pmatrix} p_{46} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{B, B_6'} \quad \left\{ \sqrt{6/2} \right\} = \begin{pmatrix} p_{62} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{A, B_6'} \quad \left\{ \sqrt{2/1} \right\} = \begin{pmatrix} p_{21} & 0 \\ q_{21} & 0 \\ r_{21} & 0 \end{pmatrix}_{I, B_6'} \quad \left\{ \sqrt{4/1} \right\} = \begin{pmatrix} p_{41} & 0 \\ q_{41} & 0 \\ r_{41} & 0 \end{pmatrix}_{J, B_6'}$$

$$\overrightarrow{JB} \wedge p_{46} \overrightarrow{x_{6'}} + \overrightarrow{JA} \wedge p_{62} \overrightarrow{x_{6'}} + \overrightarrow{JI} \wedge (p_{21} \overrightarrow{x_{6'}} + q_{21} \overrightarrow{y_{6'}} + r_{21} \overrightarrow{z_{6'}}) = \vec{0}$$

$$\text{De plus : } \overrightarrow{JI} = 2L \overrightarrow{x_{6'}} \quad \overrightarrow{JA} = 2L \overrightarrow{x_{6'}} + R \overrightarrow{z_{6'}} \quad \overrightarrow{JB} = R \overrightarrow{z_{6'}}$$

$$\text{Ainsi : } r_{21} = \frac{R}{2L} (p_{46} + p_{62}) \text{ On identifie } \lambda = \frac{R}{2L}$$

Q5 : On écrit la composition des torseurs cinématiques sur la chaîne de solides 6-2-1 en A :

$$\left\{ \sqrt{6/1} \right\} = \left\{ \sqrt{6/2} \right\} + \left\{ \sqrt{2/1} \right\}$$

$$\text{Par changement de point : } \overrightarrow{V(A \in 6/1)} = \overrightarrow{V(O_s \in 6/1)} + \overrightarrow{AO_s} \wedge \overrightarrow{\Omega_{6/1}} = (-L \overrightarrow{x_{6'}} + h_r \overrightarrow{z_s}) \wedge (p_{61} \overrightarrow{x_{6'}} + r_{61} \overrightarrow{z_{6'}})$$

On obtient :

$$\overrightarrow{V(A \in 6/1)} = h_r r_{61} \sin \alpha \overrightarrow{x_{6'}} + (L r_{61} + h_r p_{61} \cos \alpha) \overrightarrow{y_{6'}} - h_r p_{61} \sin \alpha \overrightarrow{z_{6'}}$$

$$\text{D'où } \left\{ \sqrt{6/1} \right\} = \begin{pmatrix} p_{61} & h_r r_{61} \sin \alpha \\ 0 & L r_{61} + h_r p_{61} \cos \alpha \\ r_{61} & -h_r p_{61} \sin \alpha \end{pmatrix}_{A, B_6'} = \begin{pmatrix} p_{61} & 0 \\ 0 & L r_{61} + h_r p_{61} \\ r_{61} & 0 \end{pmatrix}_{A, B_6'}$$

$$\text{On a } \left\{ \sqrt{6/2} \right\} = \begin{pmatrix} p_{62} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{A, B_6'}$$

Par changement de point :

$$\overrightarrow{V(A \in 2/1)} = \overrightarrow{V(I \in 2/1)} + \overrightarrow{AI} \wedge \overrightarrow{\Omega_{2/1}} = (-R \overrightarrow{z_{6'}}) \wedge (p_{21} \overrightarrow{x_{6'}} + q_{21} \overrightarrow{y_{6'}} + r_{21} \overrightarrow{z_{6'}})$$

$$\overrightarrow{V(A \in 1/2)} = -R p_{21} \overrightarrow{y_{6'}} + R q_{21} \overrightarrow{x_{6'}}$$

$$\{\sqrt{2/1}\} = \begin{Bmatrix} p_{21} & R q_{21} \\ q_{21} & -R p_{21} \\ r_{21} & 0 \end{Bmatrix}_{A, B_{6'}}$$

La composition des mouvements donne dans le cas considéré : $\alpha = 0$

$$\begin{aligned} p_{61} &= p_{62} + p_{21} \\ q_{21} &= 0 \\ r_{61} &= r_{21} \\ L r_{61} + h_r p_{61} &= -R p_{21} \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\begin{aligned} r_{61} &= r_{21} = \lambda (p_{46} - p_{26}) \\ p_{21} &= -\frac{L}{R} r_{61} - \frac{h_r}{R} p_{61} = -\frac{L}{R} \lambda (p_{46} - p_{26}) - \frac{h_r}{R} (p_{62} + p_{21}) \\ \text{Ce qui donne : } &\left(1 + \frac{h_r}{R}\right) p_{21} = \left(\frac{1}{2} + \frac{h_r}{R}\right) p_{26} - \frac{1}{2} p_{46} \\ p_{61} &= -p_{26} + p_{21} = -\frac{R}{2(R+h_r)} (p_{46} + p_{26}) \text{ d'où } \mu = -\frac{R}{2(R+h_r)} \end{aligned}$$

Q6 : On a $p_{26} = k p_{36}$ et $p_{46} = k p_{56}$ donc $p_{61} = -\frac{R.k}{2(R+h_r)} (p_{36} + p_{56})$.

On en déduit $\delta = -\frac{R.k}{2(R+h_r)} = 0.0467$

Q7 : Un changement de cap se fait par rotation du module interne par rapport au corps sphérique autour de l'axe de lacet $\overrightarrow{z_{6'}}$. Il ne doit pas induire de mouvement de tangage, c'est-à-dire de rotation autour de l'axe $\overrightarrow{x_{6'}}$. Autrement dit, il faut : $p_{61} = 0$

Q8 : Lors d'un changement de cap, et compte tenu du résultat de la question Q6 :

$$p_{61} = 0 \Rightarrow \delta(p_{36} + p_{56}) = 0 \Rightarrow p_{36} = -p_{56}$$

Les moteurs doivent donc tourner en sens inverse (logique)

Q9 : Pour que le Sphero se déplace en ligne droite il ne faut pas qu'il y ait de changement de cap, c'est à dire de rotation du module interne suivant l'axe de lacet $\overrightarrow{z_{6'}}$. Il faut donc : $r_{61} = 0$

Q10. Afin de se déplacer en ligne droite, et compte tenu du résultat de la question Q5 :

$$r_{61} = 0 \Rightarrow \lambda(p_{46} - p_{26}) = 0 \Rightarrow p_{36} = p_{56}$$

Les moteurs doivent donc tourner dans le même sens à la même vitesse (logique).

Q11 : $v = \overrightarrow{V(0_s \in 1/0)} \cdot \overrightarrow{y_s} = (\overrightarrow{V(K \in 1/0)} + \overrightarrow{O_s K} \wedge \overrightarrow{\Omega_{1/0}}) \cdot \overrightarrow{y_s} = (R_s \overrightarrow{z_s} \wedge (p_{10} \overrightarrow{x_s} + q_{10} \overrightarrow{y_s} + r_{10} \overrightarrow{z_s})) \cdot \overrightarrow{y_s}$
D'où : $v = -R_s \cdot p_{10}$

Q12 : D'après l'énoncé, le repère R_s ne s'incline pas par rapport à R_0 et d'après les figures de projection données Figure 10 : $p_{60} = \dot{\alpha}$

Or l'angle α est supposé constant d'où $p_{60} = 0$

Q13 : par composition des mouvements entre 6, 1 et 0, il vient en projection $\overrightarrow{\Omega_{6/0}} \cdot \overrightarrow{x_s} = \overrightarrow{\Omega_{6/1}} \cdot \overrightarrow{x_s} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \cdot \overrightarrow{x_s}$
D'où : $p_{61} + p_{10} = 0$

Q14 : d'après les questions précédentes : $v = -R_s \cdot p_{10}$ $p_{10} = -p_{61}$ $p_{61} = \delta(p_{36} + p_{56})$ $p_{36} = p_{56}$

D'où : $v = 2 \cdot R_s \cdot \delta \cdot p_{36} = 74 \cdot 10^{-3} \cdot 0.0467 \cdot 6000 \cdot \frac{2\pi}{60} = 2.17 \text{ m/s}$

Exigence de vitesse max respectée.