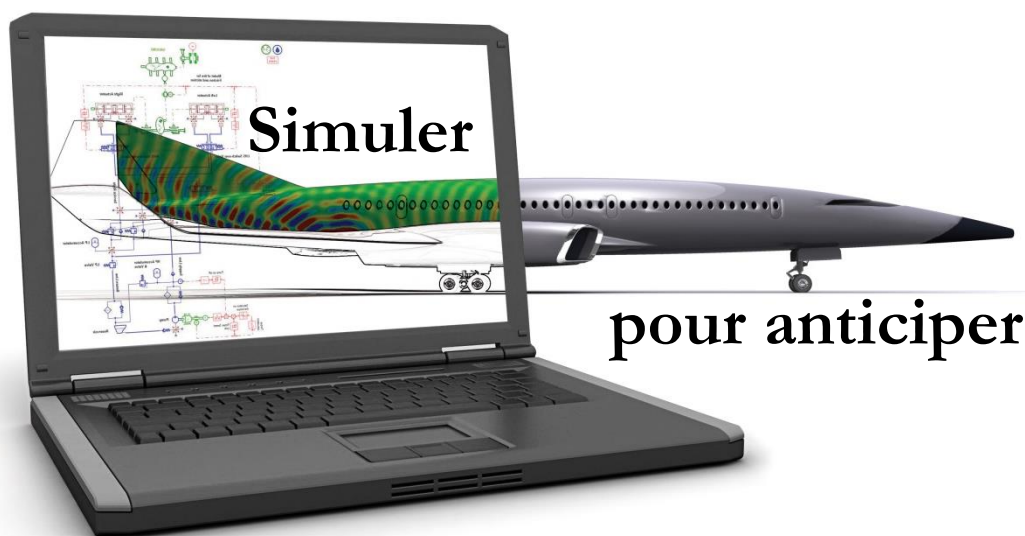


PERFORMANCES DES SYSTEMES ASSERVIS

Extraits du référentiel de 1^{ère} et 2^{nde} année :

Compétence visée	Savoir-faire associé
Appréhender les analyses fonctionnelle et structurelle	<ul style="list-style-type: none"> • Identifier et interpréter les modèles des constituants du système
Proposer un modèle de connaissance et de comportement	<ul style="list-style-type: none"> • Associer un modèle à une source d'énergie • Associer un modèle aux composants d'une chaîne d'énergie • Associer un modèle aux composants d'une chaîne d'information
Valider un modèle	<ul style="list-style-type: none"> • Réduire l'ordre de la fonction de transfert selon l'objectif visé, à partir des pôles dominants qui déterminent la dynamique asymptotique du système
Procéder à la mise en œuvre d'une démarche de résolution analytique	<ul style="list-style-type: none"> • Analyser la stabilité d'un système à partir de l'équation caractéristique • Déterminer les paramètres permettant d'assurer la stabilité du système • Relier la stabilité aux caractéristiques fréquentielles
	<ul style="list-style-type: none"> • Déterminer l'erreur en régime permanent vis-à-vis d'une entrée en échelon ou en rampe (consigne ou perturbation) • Relier la précision aux caractéristiques fréquentielles



*Sciences Industrielles de l'Ingénieur
1ère année de CPGE
Lycée Claude Fauriel*

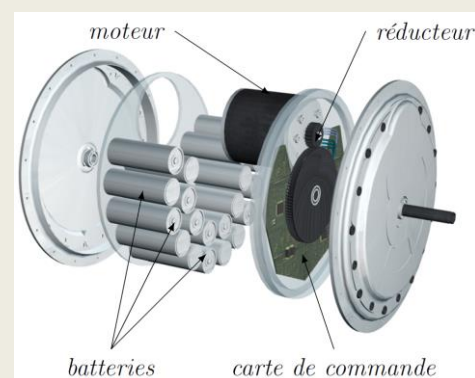
Illustration du cours : roue autonome ez-Wheel pour implantation sur un fauteuil roulant

La roue autonome ez-Wheel (prononcer "easy-wheel") propose une solution simple pour tracter des équipements de manutention et de transport de charges, des véhicules légers et matériels médicaux.



La solution intègre, au sein d'une roue, tous les composants nécessaires à la traction : la motorisation électrique, des batteries haute énergie de très longue durée de vie, un contrôleur de puissance assurant un pilotage optimal et la gestion de la batterie ainsi qu'une interface de commande sans fil. La transmission de l'énergie est réalisée par un variateur (incorporé à la carte de commande), un moteur brushless, puis un réducteur.

Nous nous proposons, dans cette illustration, d'étudier l'implantation de la roue autonome sur un fauteuil roulant. Pour ce genre d'application, où il est nécessaire de mettre en place deux roues autonomes sur le fauteuil, la commande des roues n'est pas aussi simple que pour des applications à une seule roue. En effet, en plus de gérer le mouvement d'avance du fauteuil, il faut également gérer ses changements de direction. Les deux ez-Wheel étant implantées sur chacune des deux roues arrière, le pilotage des deux roues est lié afin de maîtriser la direction du fauteuil. Chacune des deux roues est alors asservie par l'intermédiaire de capteurs mesurant la vitesse de rotation de l'arbre du moteur brushless.



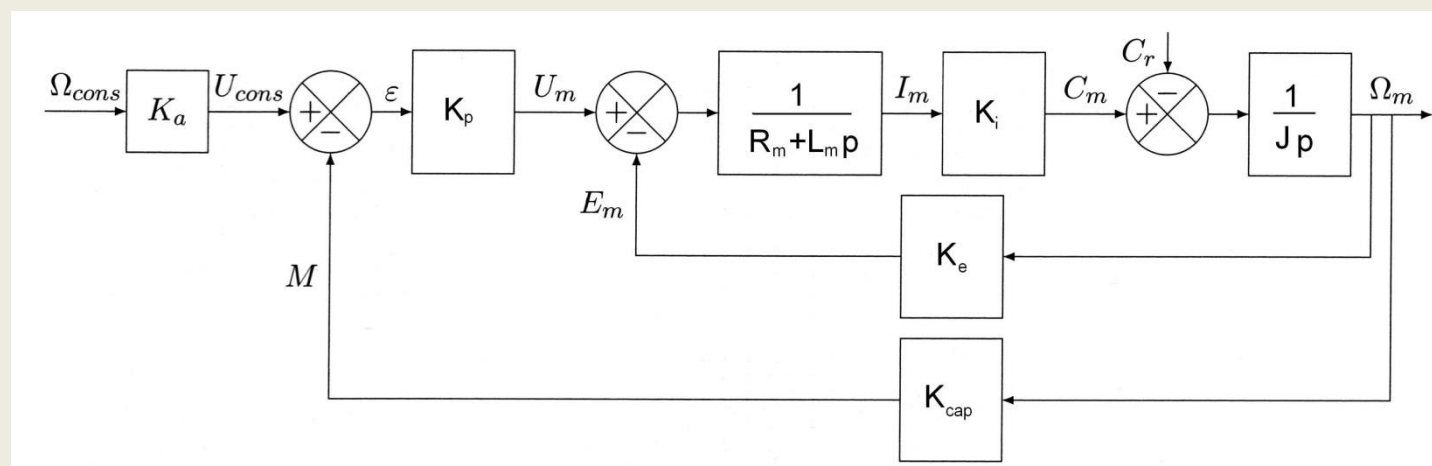
Le fonctionnement du fauteuil motorisé désiré par la société ez-Wheel est le suivant : l'utilisateur fournit une commande au système via un joystick. La carte de commande génère alors un ordre au variateur qui distribue une énergie électrique adaptée au moteur électrique. L'énergie mécanique de rotation fournie par le moteur électrique est alors adaptée et transmise aux roues. Afin d'assurer l'asservissement en vitesse des roues (et donc du fauteuil), des capteurs permettent de mesurer la vitesse de rotation sur l'arbre de sortie du moteur.



Exigences à satisfaire :

Stabilité :	Marge de phase	$\geq 45^\circ$
	Marge de gain	$\geq 10\text{dB}$
Précision :	Erreur statique pour une vitesse V_{cons} en ligne droite	$\pm 2\%$
	Dépassement sur la vitesse	aucun
Rapidité :	Temps de réponse à 5% pour chaque consigne	$\leq 0,3 \text{ s}$

Schéma-bloc de l'asservissement en vitesse :



Où :

- U_m est la tension aux bornes de l'induit (en V) ;
- I_m est l'intensité circulant dans l'induit (en A) ;
- E_m est la tension contre-électromotrice (en V) ;
- Ω_m est la vitesse de rotation de l'arbre moteur (en $\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$) ;
- C_m est le couple moteur (en $\text{N}\cdot\text{m}$) ;
- C_r est le couple résistant appliqué sur l'arbre moteur (en $\text{N}\cdot\text{m}$) ;
- R_m est la résistance de l'induit $R_m = 0,18 \Omega$;
- L_m est l'inductance de l'induit, $L_m = 0,8 \text{ mH}$;
- J est la moitié de l'inertie équivalente de l'ensemble ramené à un arbre moteur $J = 0,5 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$;
- K_i est la constante de couple du moteur $K_i = 0,2 \text{ N}\cdot\text{m}\cdot\text{A}^{-1}$;
- K_e est la constance de force contre-électromotrice $K_e = 0,2 \text{ V}\cdot\text{s}\cdot\text{rad}^{-1}$.
- K_{capt} est le gain du capteur à effet hall –modélisé par un gain pur - $K_{\text{capt}} = 0,2 \text{ V}\cdot\text{s}\cdot\text{rad}^{-1}$
- K_a est le gain de l'adaptateur qui convertit la vitesse de consigne en tension de consigne, $K_a = K_{\text{capt}}$
- K_p est le gain du correcteur proportionnel avec $K_p \geq 0$

Remarque : $K_e = K_i = K_{\text{capt}} = K_a$ On utilisera la notation K_a dans la suite de l'illustration.

On note les fonctions de transfert $H_1(p)$ et $H_2(p)$ telles que : $\Omega_m(p) = H_1(p)\cdot\Omega_{\text{cons}}(p) - H_2(p)\cdot C_r(p)$

Avec :

$$H_1(p) = \frac{\frac{K_p}{K_p + 1}}{1 + \frac{J \cdot R_m}{K_a^2 \cdot (K_p + 1)} \cdot p + \frac{J \cdot L_m}{K_a^2 \cdot (K_p + 1)} \cdot p^2}$$

et

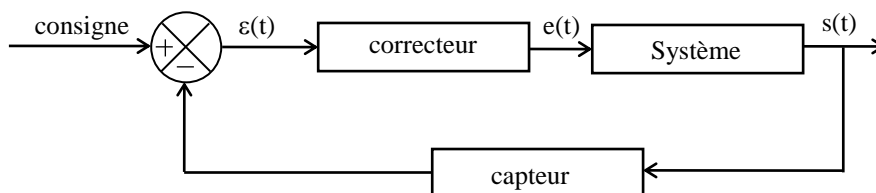
$$H_2(p) = \frac{\frac{R_m + L_m \cdot p}{K_a \cdot (K_p + 1)}}{1 + \frac{J \cdot R_m}{K_a^2 \cdot (K_p + 1)} \cdot p + \frac{J \cdot L_m}{K_a^2 \cdot (K_p + 1)} \cdot p^2}$$

1 – Structure générale :

Soit un système S défini par sa fonction de transfert $H(p)$ en boucle ouverte : **FTBO**



Pour asservir le système, on installe une boucle de retour qui corrige les "erreurs" de la sortie. Il faut donc pouvoir comparer la sortie à une valeur de consigne (\Rightarrow **comparateur**) et corriger éventuellement la valeur de l'entrée du système (\Rightarrow **correcteur**).



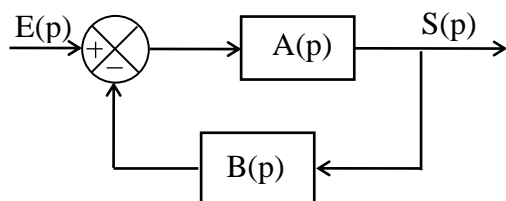
$\varepsilon(t)$ = écart (improprement appelé "erreur" parfois).

On peut parler alors de système en boucle fermée.

Exemple : un canon fonctionne en boucle ouverte alors qu'un missile téléguidé fonctionne en boucle fermée.

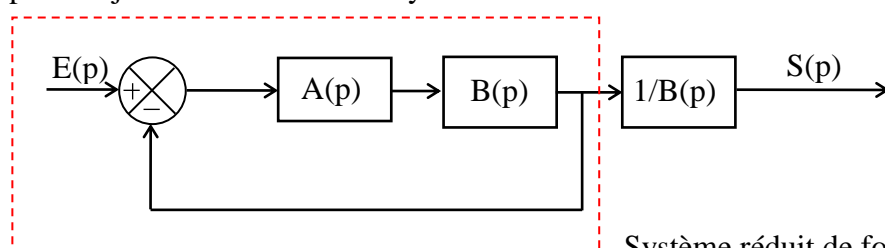
Il n'est pas nécessaire d'asservir un système si son comportement est bien connu et s'il n'y a pas de perturbations. Par contre, le bouclage permet de tenir compte de perturbations éventuelles et améliore en général les performances du système (les perturbations sont modélisées et considérées comme une 2^{ème} entrée du système : on utilise le théorème de superposition pour faire l'étude).

2 – Fonction de transfert d'un système asservi :



$$H(p) = \frac{A(p)}{1 + A(p).B(p)}$$

On peut toujours se ramener à un système à retour unitaire :



$$H(p) = \frac{A(p).B(p)}{1 + A(p).B(p)} \cdot \frac{1}{B(p)}$$

Système réduit de fonction de transfert $H_r = \frac{A(p).B(p)}{1 + A(p).B(p)}$

On note FTBO la fonction de transfert en boucle ouverte du système soit $FTBO(p) = A(p).B(p)$ et on étudie la fonction de transfert du système réduit soit $FTBF(p) = \frac{FTBO(p)}{1 + FTBO(p)}$

3 – Caractérisation des performances des systèmes asservis :

3.1 – Stabilité :

Un système est stable

- si, écarté de sa position d'équilibre (par exemple par une perturbation), il y revient,
- si la réponse en régime libre tend vers 0,
- si la réponse en régime forcé tend vers une constante,
- si, à une entrée bornée, correspond une sortie bornée ...

3.3.1 – Condition sur les pôles de la fonction de transfert :

Un système est stable si les pôles de la fonction de transfert sont à partie réelle strictement négative.

Attention: si le système est asservi, il s'agit des pôles de la FTBF.

Démonstration : $H(p) = K \frac{N(p)}{D(p)}$ avec $D(p) = p^\alpha \cdot \prod (p-p_i)^{\beta_i}$

Si on soumet le système à une impulsion, il doit revenir à zéro.

$S(p) = H(p)$ qu'on décompose en éléments simples :

- si p_i est réel : $\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{a_i}{(p-p_i)^{\beta_i}} \right) = a_i t^{\beta_i-1} e^{p_i t}$ qui diverge si $p_i > 0$

- si p_i est complexe, alors le conjugué \bar{p}_i de p_i est également solution donc $H(p)$ contient $\frac{a_i}{p-p_i} + \frac{\bar{a}_i}{p-\bar{p}_i}$

soit $p_i = r + j\omega$ et $a_i = \alpha + j\beta$

$\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{2\alpha(p-r) - 2\beta\omega}{(p-r)^2 + \omega^2} \right) = 2\alpha e^{rt} \cos(\omega t) - 2\beta e^{rt} \sin(\omega t) = A e^{rt} \cos(\omega t + \varphi)$ qui diverge si $r > 0$

- si on a un pôle nul (intégrateur), la réponse tend vers une constante (mais pas vers 0)

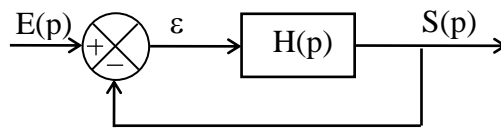
- si on a plusieurs intégrateurs, la réponse diverge.

Il suffit d'avoir un seul pôle à partie réelle positive ou nulle et la réponse (qui est la somme des réponses) diverge.

Pour savoir si les pôles sont à partie réelle strictement négative, il faudrait donc les déterminer !

On dispose d'un certain nombre de critères qui permettent de savoir si un système est stable sans calculer les pôles.

3.1.2 – Critères de Revers (critère graphique) :

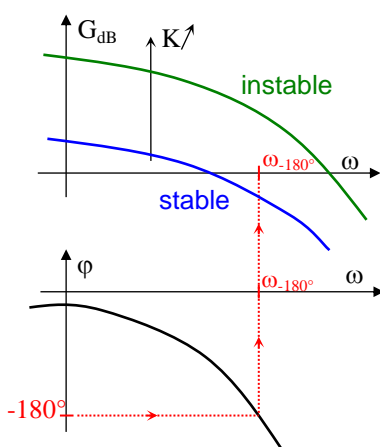


Si ce système est stable en boucle ouverte,

alors la stabilité ne dépend que des pôles du dénominateur en boucle fermée à savoir les pôles de : $1 + H(p)$.

Il faut donc résoudre $H(p) = -1$: le point (-1) du plan complexe (module = 1 et argument = -180°) est appelé **point critique**.

- dans le plan de Bode :



Le système est stable en boucle fermée si, pour la pulsation correspondant à $\varphi = -180^\circ$, la courbe de gain de la FTBO passe au-dessous du niveau 0 dB.

Donc si

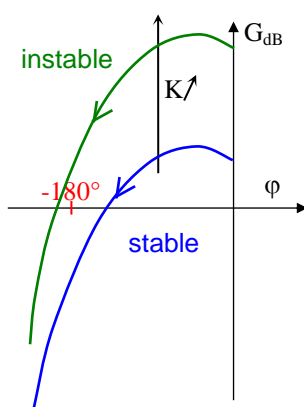
pour $\varphi = -180^\circ$, $G > 0$ dB

ou

pour $G = 0$ dB, $\varphi < -180^\circ$,

alors le système est instable.

- dans le plan de Black :



Le système est stable en boucle fermée si,

en parcourant le lieu de transfert de la FTBO dans le sens des ω croissants,

on laisse le point critique à droite.

NOTA: les systèmes ayant une FTBO du 1^{er} ou 2^{ème} ordre sont toujours stables.

3.1.3 – Causes d'instabilité :

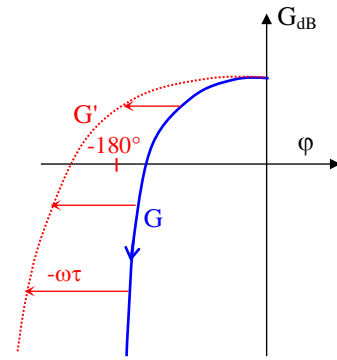
- le bouclage,
- le système devient instable quand le gain de la boucle ouverte augmente,
- influence des retards.

Analyse de l'influence des retards :

soit $H'(p) = e^{-\tau p} \cdot H(p)$

$|H'(p)| = |H(p)|$ et $\varphi' = \varphi - \omega\tau$

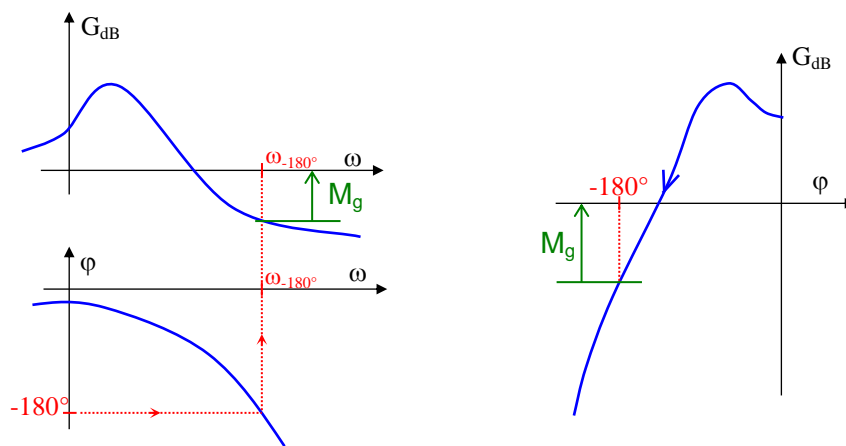
Un retard introduit un déphasage supplémentaire donc tout retard est source d'instabilité.



3.1.4 – Degré de stabilité : (ou marge de sécurité)

Si le système est à la limite de stabilité, la moindre dérive des paramètres (dûe à la température, l'usure, ...) peut entraîner l'instabilité \Rightarrow il faut donc prévoir des marges de sécurité par rapport au point critique (-1).

- marge de gain M_g : on trace le lieu de la FTBO.



Dans les lieux de Bode et Black, la marge de gain est l'opposé de la valeur du gain pour la pulsation critique (pour laquelle $\varphi = -180^\circ$)

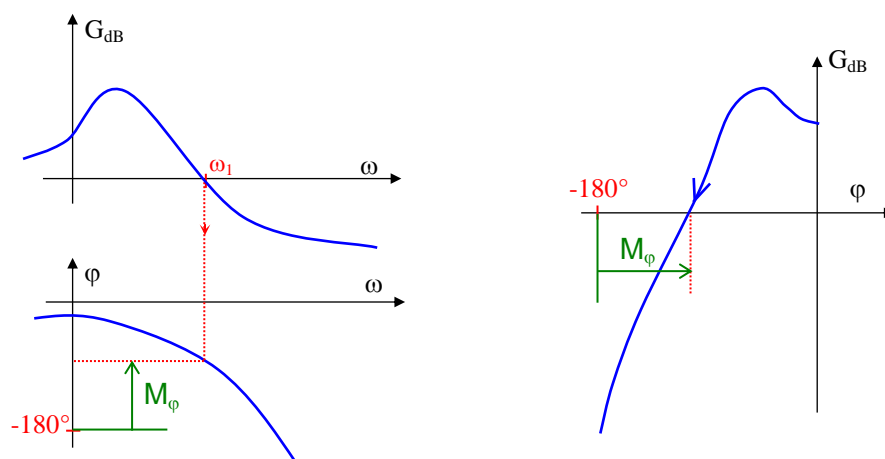
$$\Rightarrow M_g = -20 \log |H(j \omega_{-180^\circ})|$$

On prend en général une marge de gain de **6 à 15dB**.

Dans la pratique, on translate la courbe de gain vers la bas jusqu'à obtenir cette marge de sécurité : ceci revient à diminuer le gain statique de la FTBO.

- marge de phase M_φ : c'est la différence entre 180° et la phase du point de la FTBO de module 1 donc

$$M_\varphi = 180^\circ + \arg (H(j\omega_1)) \text{ avec } \omega_1 = \text{pulsation pour laquelle } |H(j\omega_1)| = 1 \text{ (soit 0 dB)}$$



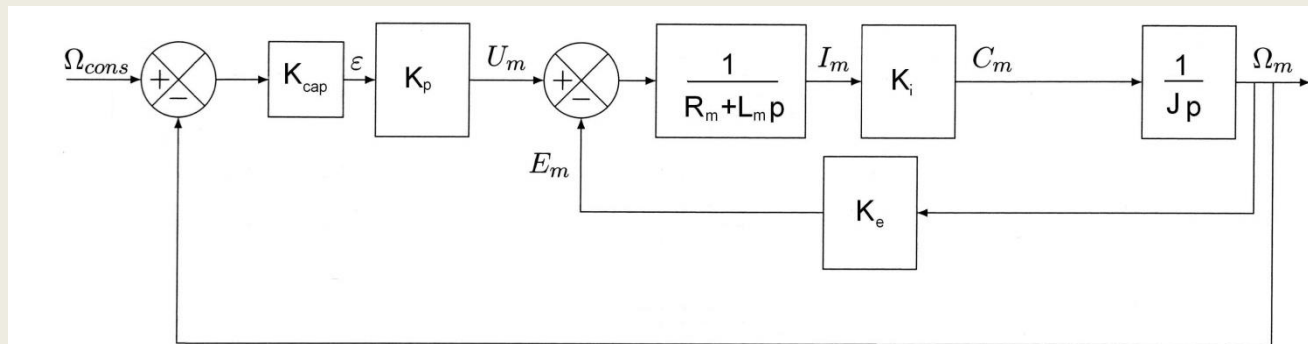
On prend en général une marge de phase de **40° - 45°**.

Étude de la stabilité de la roue autonome ez-Wheel

La consigne est la perturbation ayant la même équation caractéristique (les fonctions de transfert H_1 et H_2 ont le même dénominateur), il est inutile d'étudier la stabilité pour ces 2 entrées ;

nous allons donc supposer que $\mathbf{Cr}(p) = \mathbf{0}$.

Ainsi le schéma-bloc devient :



Déterminons la FTBO pour appliquer le critère de Revers : (rappel : $K_e = K_i = K_{\text{capt}} = \mathbf{K}_a$)

$$FTBO(p) = \frac{K_a^2 \cdot K_p}{K_a^2 + J \cdot p \cdot (R_m + L_m \cdot p)} = \frac{K_p}{1 + 2,25 \cdot p + 0,01 \cdot p^2}$$

$$\omega_0 = 10 \text{ rad.s}^{-1} \text{ et } m = 11,25 : FTBO(p) = K_p \times \frac{1}{1 + 2,25 \cdot p} \times \frac{1}{1 + 0,004 \cdot p}$$

Cette fonction de transfert est d'ordre 2, le système est donc stable ; mais quelle est la marge de sécurité ?

Marge de gain : objectif : $M_g \geq 10 \text{ dB}$

La phase de la FTBO tend vers -180° (sans jamais l'atteindre), deux conclusions sont donc possibles :

- la marge de gain est non définie
- ou - la marge de gain tend vers l'infini (puisque le gain tend vers moins l'infini)

Cette exigence est donc vérifiée.

Marge de phase : objectif : $M_\phi \geq 45^\circ$

Il faut donc déterminer la pulsation pour laquelle $\text{Arg}(FTBO(j\omega_1)) = -135^\circ$

$$\Leftrightarrow \arctan \frac{2,25 \cdot \omega_1}{1 - 0,01 \cdot \omega_1^2} = 135^\circ \quad \text{soit} \quad 2,25 \cdot \omega_1 = 0,01 \cdot \omega_1^2 - 1$$

On trouve donc : $\omega_1 = 225,4 \text{ rad.s}^{-1}$ $\forall K_p$

Cette exigence (de marge de phase) sera vérifiée si :

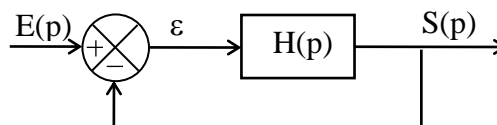
$$20 \cdot \log |FTBO(j\omega_1)| \leq 0 \Leftrightarrow 20 \cdot \log K_p \leq 20 \cdot \log \sqrt{(1 - 0,01 \cdot \omega_1^2)^2 + (2,25 \cdot \omega_1)^2}$$

Soit finalement : $K_p \leq 717$

En conclusion, les 2 critères de stabilité exigés au cahier des charges seront satisfaits si $K_p \leq 717$.

3.2 – Précision statique :

On caractérise la précision par ε l'écart (parfois appelé "erreur") entre la consigne $e(t)$ et la sortie $s(t)$: $\varepsilon(t) = e(t) - s(t)$



- précision statique en régime permanent = $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t)$
- précision dynamique en régime transitoire (pas au programme de CPGE).

L'étude de la précision se ramène toujours à l'étude de la sortie du comparateur où la grandeur étudiée est la différence entre :

- l'entrée et la sortie si elles sont de même nature (retour unitaire),
- l'entrée et une image de la sortie de même nature que l'entrée (retour non unitaire).

En CPGE, le programme se limitant à la précision statique, donc en régime permanent, il faut toujours étudier cet écart quand t tend vers l'infini.

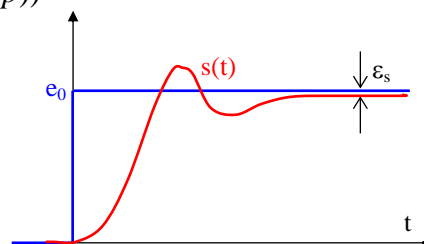
Suivant le signal d'entrée choisi, l'étude permettra d'analyser la précision en position (entrée en échelon) ou la précision en vitesse (entrée en rampe).

3.2.1 – Ecart statique en position (ou erreur indicielle) notée ε_s : $e(t) = e_0 u(t)$

$$\varepsilon(p) = E(p) - S(p) = E(p) \left(1 - \frac{H(p)}{1 + H(p)}\right) = \frac{E(p)}{1 + H(p)} = \frac{e_0}{p(1 + H(p))}$$

$$\Rightarrow \varepsilon_s = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{e_0}{1 + H(p)}$$

au voisinage de 0, $H(p) \approx \frac{K}{p^\alpha}$, α étant la classe de la FTBO

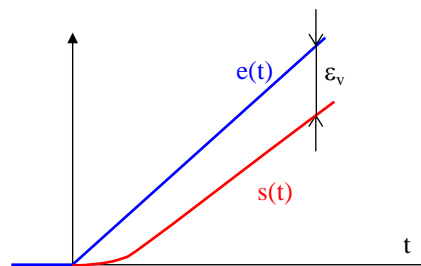


- $\alpha = 0$: $\varepsilon_s = \frac{e_0}{1 + K}$ donc la précision augmente si le gain de la FTBO augmente.
- $\alpha > 0$: $\varepsilon_s = 0$ donc, si on a au moins un intégrateur dans la FTBO, le système est précis en position.

3.2.2 – Ecart statique en vitesse (ou erreur de traînage ou de poursuite) notée ε_v : $e(t) = a t u(t)$

$$\varepsilon_v = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{E(p)}{1 + H(p)} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{a}{p \left(1 + \frac{K}{p^\alpha}\right)}$$

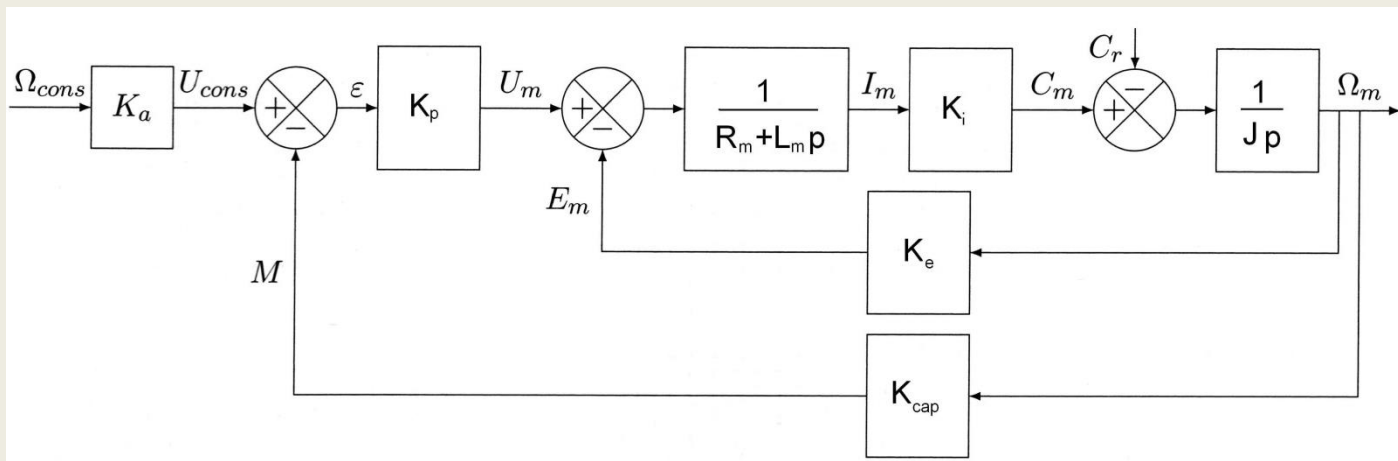
- $\alpha = 0$: $\varepsilon_v \rightarrow \infty$
- $\alpha = 1$: $\varepsilon_v = \frac{a}{K}$ donc la précision (avec un intégrateur) augmente si le gain de la FTBO augmente
- $\alpha > 1$: $\varepsilon_v = 0$ donc, si on a au moins deux intégrateurs dans la FTBO, le système est précis en poursuite.



Attention : dans certains ouvrages, ε_s est appelée précision statique et ε_v précision dynamique.

Étude de la précision de la roue autonome ez-Wheel

Schéma-bloc de l'asservissement en vitesse :



On note les fonctions de transfert $H_1(p)$ et $H_2(p)$ telles que : $\Omega_m(p) = H_1(p) \cdot \Omega_{cons}(p) - H_2(p) \cdot C_r(p)$

Avec :

$$H_1(p) = \frac{\frac{K_p}{K_p + 1}}{1 + \frac{J \cdot R_m}{K_a^2 \cdot (K_p + 1)} \cdot p + \frac{J \cdot L_m}{K_a^2 \cdot (K_p + 1)} \cdot p^2} \quad \text{et} \quad H_2(p) = \frac{\frac{R_m + L_m \cdot p}{K_a \cdot (K_p + 1)}}{1 + \frac{J \cdot R_m}{K_a^2 \cdot (K_p + 1)} \cdot p + \frac{J \cdot L_m}{K_a^2 \cdot (K_p + 1)} \cdot p^2}$$

Objectifs :

Erreur statique pour une vitesse V_{cons} en ligne droite ± 2%
 Dépassement sur la vitesse aucun

Étude de la précision vis-à-vis de la consigne : (donc on suppose $C_r(p)=0$)

$$\mathcal{E}_{s1} = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot (1 - H_1(p)) \cdot \frac{\Omega_0}{p} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{\Omega_0}{1 + FTBO_1(p)} \quad \text{avec} \quad FTBO_1(p) = \frac{K_p}{1 + 2,25 \cdot p + 0,01 \cdot p^2}$$

$$= \frac{\Omega_0}{1 + K_p}$$

Ce calcul est inutile puisque la classe de la $FTBO_1$ étant nulle, le résultat est connu : $\frac{\text{Amplitude échelon}}{1 + \text{Gain statique}_{FTBO}}$

Pour satisfaire cette exigence, K_p doit donc vérifier : $\frac{1}{1 + K_p} \leq 0,02 \Leftrightarrow K_p \geq 49$

Étude de la précision vis-à-vis de la perturbation : (donc on suppose $\Omega_{cons}(p)=0$)

$$\mathcal{E}_{s2} = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot (\cancel{\Omega_{cons}(p)} - \Omega_m(p)) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot (-H_1(p) \cdot \cancel{\Omega_{cons}(p)} - H_2(p) \cdot C_r(p))$$

$$= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{-\frac{R_m + L_m \cdot p}{K_a \cdot (K_p + 1)}}{1 + \frac{J \cdot R_m}{K_a^2 \cdot (K_p + 1)} \cdot p + \frac{J \cdot L_m}{K_a^2 \cdot (K_p + 1)} \cdot p^2} \cdot C_0 = -\frac{R_m \cdot C_0}{K_a \cdot (K_p + 1)}$$

Remarque :

ce calcul revient à étudier la limite de la sortie en régime permanent avec un échelon de perturbation ; puisque la consigne est nulle, il faudrait idéalement que la sortie tende vers zéro ... et, dans ce cas, nous pourrions conclure que la perturbation n'a pas d'influence sur la précision en régime permanent.

Pour satisfaire cette exigence, K_p doit donc vérifier : $\frac{R_m}{K_a \cdot (K_p + 1)} \leq 0,02 \Leftrightarrow K_p \geq 44$

Étude de l'exigence de dépassement :

L'équation caractéristique étant d'ordre 2, il faut vérifier que le facteur d'amortissement soit supérieur ou égal à 1.

$$1 + \frac{J R_m}{K^2 (K_p + 1)} p + \frac{J L_m}{K^2 (K_p + 1)} p^2 \quad \text{donne par identification : } \omega_0 = K_a \sqrt{\frac{(K_p + 1)}{J L_m}} ; m = \frac{R_m}{2 K_a \sqrt{L_m J (K_p + 1)}}$$

$$\text{Soit : } m = \frac{22,5}{\sqrt{K_p + 1}} \geq 1 \Leftrightarrow K_p \leq 505,25$$

En conclusion, l'exigence de précision sera satisfaite pour :

$$49 \leq K_p \leq 505,25$$

3.3 – Rapidité :

Elle est définie par le temps de réponse du système soumis à un échelon d'amplitude e_0 . En général, on prend le temps de réponse à 5%.

1^{er} ordre : le temps de réponse diminue si on boucle le système : $FTBO = \frac{K}{1 + \tau p} \Rightarrow FTBF = \frac{K}{1 + \frac{\tau}{1+K} p}$

$$\text{d'où } t_{rBO} = 3\tau \Rightarrow t'_{rBF} = 3(\tau/(1+K))$$

et t_r diminue si K augmente

2nd ordre : le temps de réponse dépend du coefficient d'amortissement m qui diminue quand on boucle le système. Le temps de réponse peut donc augmenter ou diminuer suivant la valeur de m :

Si les dépassements sont autorisés, le temps de réponse à 5% est minimum pour $m = 0,69$.

Cette valeur de m est trouvée en vérifiant que le premier dépassement vaut 5% : $e^{\frac{-\pi m}{\sqrt{1-m^2}}} = 0,05$

Remarque : attention de ne pas confondre 0,69 et $\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.707$ qui correspond à l'existence d'une résonance !

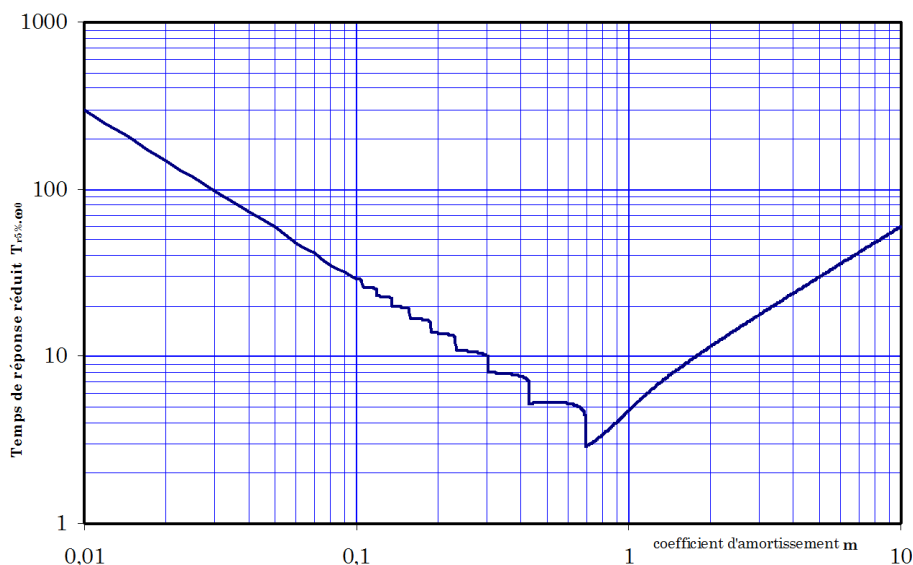
Si les dépassements ne sont pas autorisés, le temps de réponse à 5% est minimum pour $m = 1$.

Le temps de réponse d'un 2nd ordre est généralement déterminé à l'aide de la courbe ci-contre :

2 valeurs particulières à connaître :

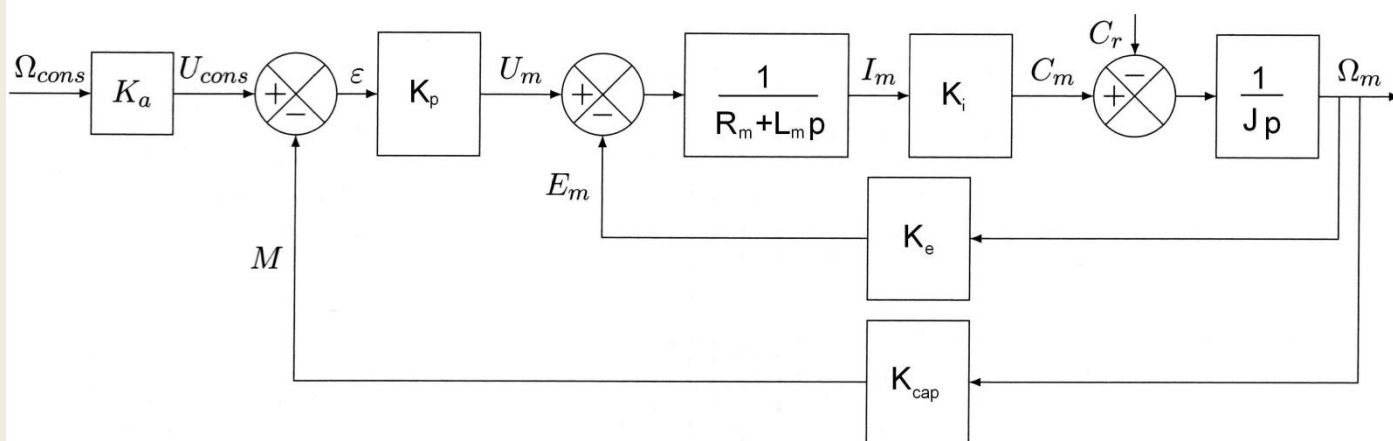
$$\text{Si } m = 0,69 : \quad tr_{5\%} \approx \frac{3}{\omega_0}$$

$$\text{Si } m = 1 : \quad tr_{5\%} \approx \frac{5}{\omega_0}$$



Étude de la rapidité de la roue autonome ez-Wheel

Schéma-bloc de l'asservissement en vitesse :



On note les fonctions de transfert $H_1(p)$ et $H_2(p)$ telles que : $\Omega_m(p) = H_1(p) \cdot \Omega_{cons}(p) - H_2(p) \cdot C_r(p)$

Avec :

$$H_1(p) = \frac{\frac{K_p}{K_p + 1}}{1 + \frac{J \cdot R_m}{K_a^2 \cdot (K_p + 1)} \cdot p + \frac{J \cdot L_m}{K_a^2 \cdot (K_p + 1)} \cdot p^2} \quad \text{et} \quad H_2(p) = \frac{\frac{R_m + L_m \cdot p}{K_a \cdot (K_p + 1)}}{1 + \frac{J \cdot R_m}{K_a^2 \cdot (K_p + 1)} \cdot p + \frac{J \cdot L_m}{K_a^2 \cdot (K_p + 1)} \cdot p^2}$$

L'équation caractéristique est donc d'ordre 2 :

$$1 + \frac{J R_m}{K^2 (K_p + 1)} p + \frac{J L_m}{K^2 (K_p + 1)} p^2 \quad \text{donne par identification : } \omega_0 = K_a \cdot \sqrt{\frac{(K_p + 1)}{J L_m}} ; m = \frac{R_m}{2 \cdot K_a \cdot \sqrt{L_m J (K_p + 1)}}$$

Objectif :

Temps de réponse à 5% $\leq 0,3$ s

Nous avons trouvé précédemment :

$$49 \leq K_p \leq 505,25 \quad \text{avec} \quad \omega_0 = 10 \cdot \sqrt{(K_p + 1)} ; m = \frac{22,5}{\sqrt{(K_p + 1)}}$$

Pour $K_p = 49$: $m = 3$ et $\omega_0 = 71 \text{ rad.s}^{-1}$ soit : $\text{tr}_{5\%} \approx 0,13$ s

Pour $K_p = 505$: $m = 1$ et $\omega_0 = 225 \text{ rad.s}^{-1}$ soit : $\text{tr}_{5\%} \approx 0,02$ s

Donc cette exigence de rapidité sera satisfaite pour $49 \leq K_p \leq 505,25$

4 – Influence des pôles sur la réponse du système

Dans le cas d'une réponse impulsionnelle, l'équation de la sortie dans le domaine symbolique peut s'écrire :

$$S(p) = \frac{K(p - z_1)(p - z_2)...(p - z_m)}{(p - p_1)(p - p_2)...(p - p_n)}$$

avec z_i les zéros et p_i les pôles.

Après décomposition en éléments simples, on obtient :

$$S(p) = \frac{K_1}{p - p_1} + \frac{K_2}{p - p_2} + \dots + \frac{L_1}{p - a_1 + j.b_1} + \frac{L_1}{p - a_1 - j.b_1} + \dots$$

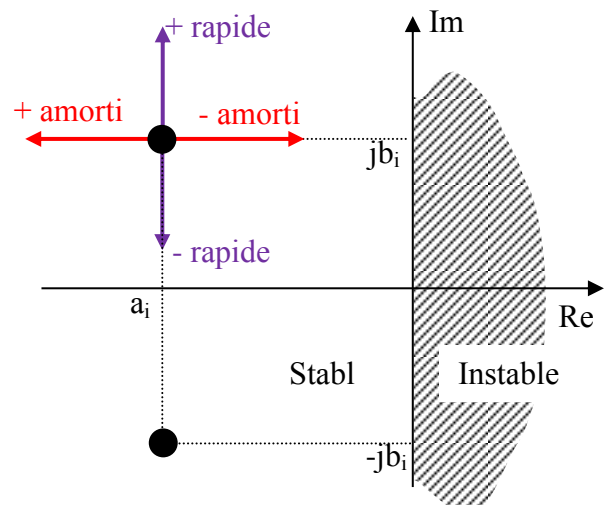
avec p_i les pôles réels et $a_i \pm j.b_i$ les pôles complexes conjugués

Soit dans le domaine temporel après transformée inverse :

$$s(t) = K_1.e^{p_1.t} + K_2.e^{p_2.t} + \dots + 2.L_1.e^{a_1.t}.\cos(b_1.t) + \dots$$

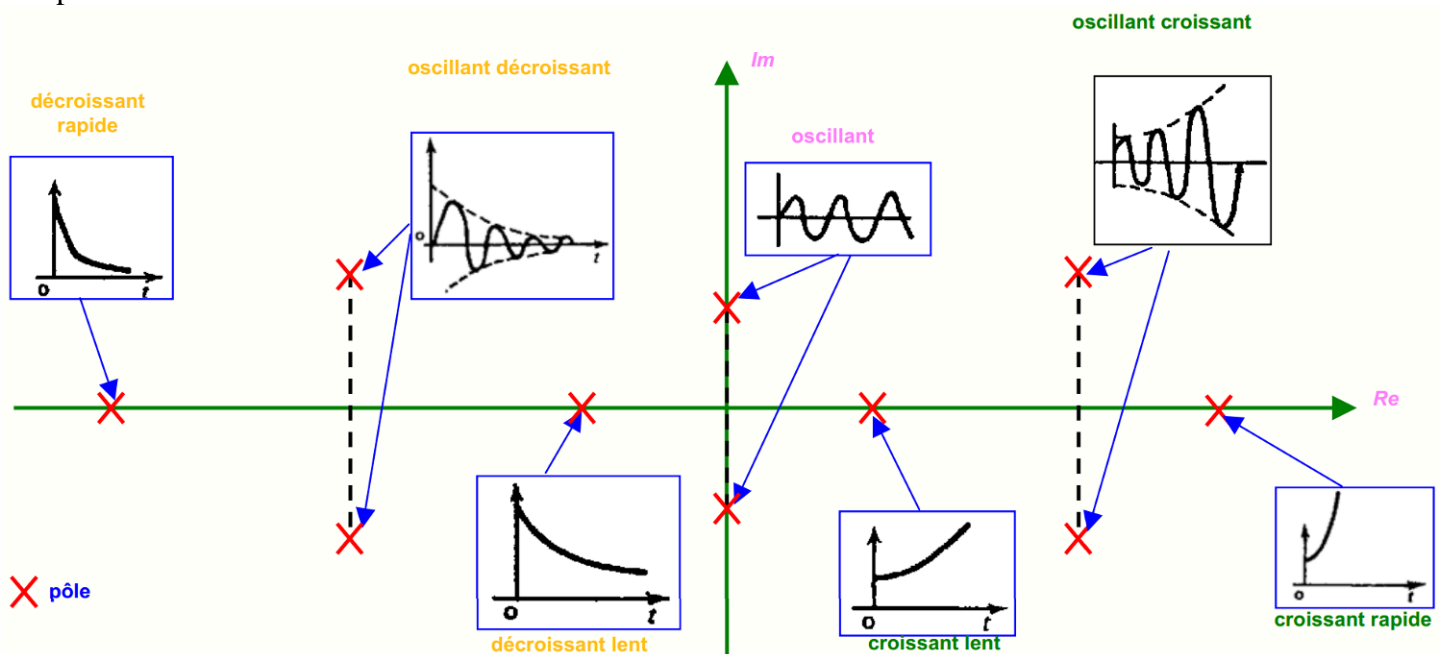
Ainsi :

- Les parties réelles des pôles (réels ou complexes) se retrouvent dans les termes exponentiels, et elles permettent de caractériser l'amortissement,
- Les parties imaginaires des pôles complexes conjugués se retrouvent dans les les pulsations des termes oscillants, et elles permettent de caractériser la rapidité (fréquence des oscillations).



On retrouve le critère de stabilité (parties réelles des pôles strictement négatives pour que les termes exponentiels soient décroissants), et la réponse présentera un caractère oscillant s'il existe des pôles complexes.

La figure ci-dessous montre la contribution d'un pôle sur la réponse en fonction de sa place dans le plan complexe :

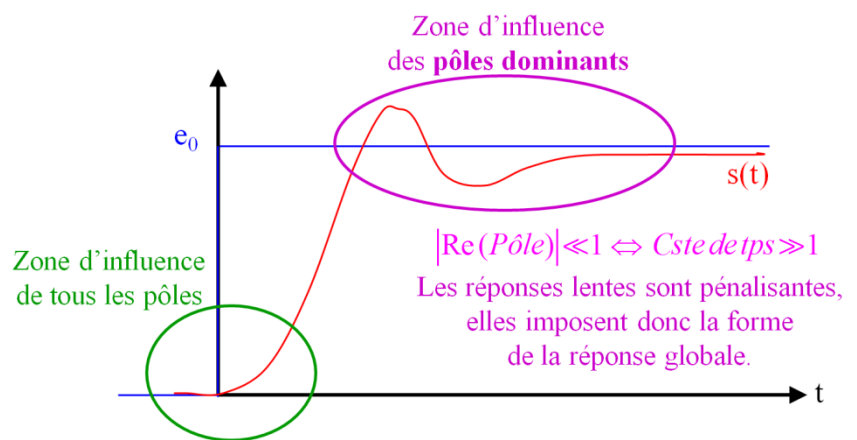


La réponse d'un système linéaire est donc déterminée par la position de ses pôles dans le plan complexe : un système du 10^{ème} ordre a 10 pôles et sa réponse $s(t)$ à une impulsion comporte au maximum 10 termes.

Lorsque le temps s'écoule, ces termes « s'éteignent » les uns après les autres, et les termes de la réponse qui durent le plus longtemps correspondent aux pôles les plus proches de l'origine.

On appelle ces pôles **les pôles dominants** et ce sont eux qui fixent la forme de la réponse.

Les pôles plus éloignés ne jouent que sur la forme du début du régime transitoire :

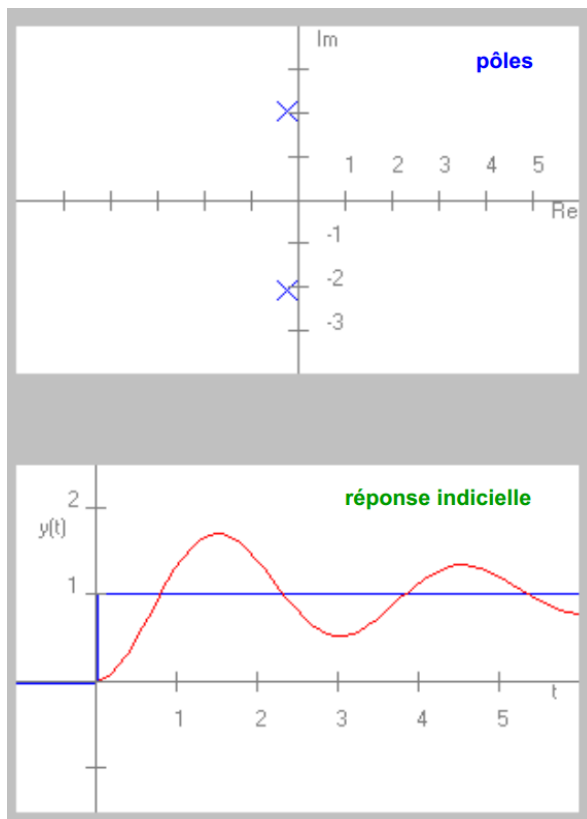


Conséquences pratiques :

Un système d'ordre élevé a, sauf exception, un ou deux pôles dominants et se comporte donc comme un 1^{er} ou un 2nd ordre ; on peut donc simplifier la transmittance d'un système d'ordre élevé en ne conservant que le ou les pôles dominants.

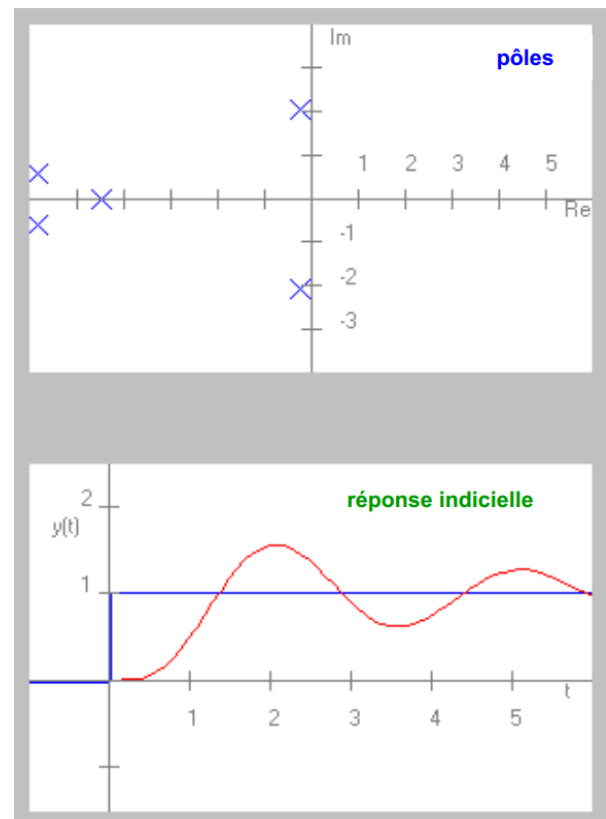
Un pôle peut être négligé dès qu'il est 3 ou 4 fois supérieur au précédent ; négliger les pôles éloignés de l'origine revient, sur le diagramme de Bode, à négliger les fréquences de coupure élevées.

Exemple :



Le système A est caractérisé par :

- système du second ordre,
- 2 pôles complexes conjugués,
- dépassement 68%,
- pic à 1,5 seconde.



Le système B est caractérisé par :

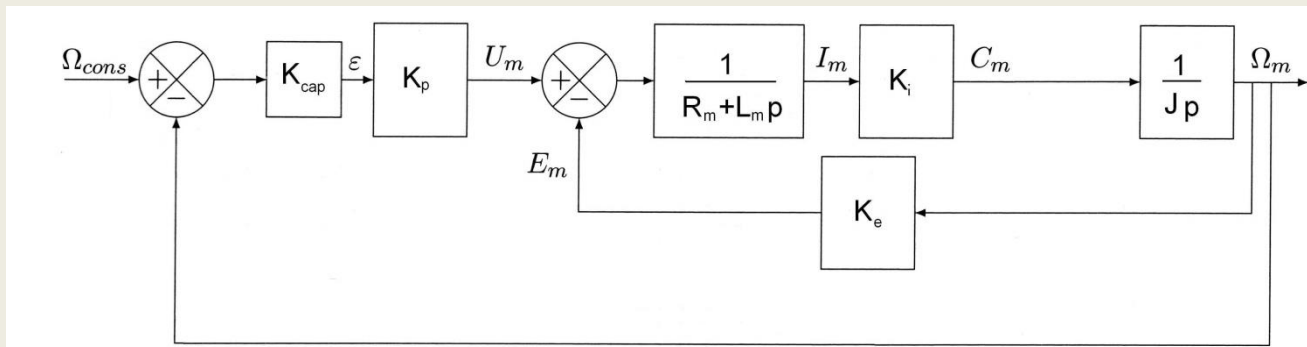
- système du cinquième ordre,
- 2 pôles dominants identiques aux pôles de A,
- dépassement 56%,
- pic à 2,1 seconde.

Étude de l'influence du pôle dominant de la roue autonome ez-Wheel

La consigne est la perturbation ayant la même équation caractéristique (les fonctions de transfert H_1 et H_2 ont le même dénominateur), il est inutile d'analyser pour ces 2 entrées ;

nous allons donc supposer que $\mathbf{Cr}(p) = \mathbf{0}$.

Ainsi le schéma-bloc devient :



Déterminons la FTBF : (rappel : $K_e = K_i = K_{capt} = K_a$)

$$FTBF(p) = \frac{K_p}{1 + K_p + 2,25.p + 0,01.p^2}$$

Prenons $K_p = 49$:

$$FTBF(p) = \frac{49}{50 + 2,25.p + 0,01.p^2} = \frac{0,98}{\left(1 + \frac{p}{25}\right) \cdot \left(1 + \frac{p}{200}\right)}$$

Le pôle dominant est donc -25.

Déterminons le temps de réponse à 5% en considérant les 2 pôles puis seulement le pôle dominant :

$$FTBF(p) = \frac{0,98}{\left(1 + \frac{p}{25}\right) \cdot \left(1 + \frac{p}{200}\right)} \quad m = 3 \text{ et } \omega_0 = 71 \text{ rad.s}^{-1} \quad \text{soit : } tr_{5\%} \approx 0.13 \text{ s}$$

$$FTBF(p) \approx \frac{0,98}{\left(1 + \frac{p}{25}\right) \cdot \left(1 + \frac{p}{200}\right)} \quad \text{constante de temps : } \tau = 0,04 \text{ s} \quad \text{soit : } tr_{5\%} \approx 0.12 \text{ s}$$

