MPSI

Programme de colle - semaine 19 du 17/02/2025 au 23/02/2025

1 Structure d'espace vectoriel

- Pour l'instant nous n'avons vu que les SEV et les familles de vecteurs. **Pas d'applications linéaires.**
- Les définitions ont été données pour un corps $\mathbb{K}$ quelconque, mais selon le programme de MPSI on prend toujours $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
- Définition d'un $\mathbb{K}$-EV (ne pas interroger dessus). *En pratique, on n'utilise pas la définition et on se ramène toujours à un SEV d'un EV connu.*
- EV de référence à connaître : $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}[X]$, $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ (ensemble des fonctions de I dans $\mathbb{K}$), $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$. Produit de $\mathbb{K}$-EV.
- **Sous-espace vectoriel** : définition (partie contenant $\vec{0}$ et stable par les 2 opérations). En pratique on montre que $\vec{0} \in F$ et $\forall u, v \in F$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $u + \lambda v \in F$.
- $\{\vec{0}\}$ et E sont des SEV de E. Une intersection quelconque de SEV est un SEV (la démonstration avait été faite pour les sous-groupes, pas refaite ici).
- Stabilité d'un SEV par combinaison linéaire d'un nombre quelconque de vecteurs. **SEV engendré par une famille (finie) de vecteurs. Famille génératrice (finie) d'un SEV.**
- **Famille (finie) libre :** Définition donnée : identification des coefficients dès que 2 combinaisons linéaires sont égales. Équivalence entre cette définition et $\sum_i \alpha_i u_i = \vec{0} \Rightarrow \forall i,\ \alpha_i = 0$.

  Famille liée : caractérisations : il existe une famille non identiquement nulle (α_i) telle que $\sum_i \alpha_i u_i = \vec{0}$.

  Pour une famille d'au moins 2 vecteurs, on peut exprimer un vecteur en fonction des autres.
  Cas particuliers : famille libre/liée à 1 vecteur, à 2 vecteurs.
- Base (finie) d'un EV : définition (libre + génératrice de E), caractérisation avec une phrase ("tout élément de E se décompose de manière unique...") à traduire avec des quantificateurs. Matrice des coordonnées d'un vecteur dans une base. Base canonique de $\mathbb{K}^n$, de $\mathbb{K}_n[X]$, de $\mathbb{K}[X]$, de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$.
- Pour les notions de SEV engendré et de famille génératrice / libre, nous avons aussi donné la définition pour des familles infinies $(u_i)_{i\in I}$: **ne pas interroger dessus.**

2 Exercices faits

On reste proche du cours et on commence par des exercices de base sur des objets simples ($\mathbb{R}^3$, polynômes de petit degré ou petites matrices). Si les notions de base sont maîtrisées, on peut augmenter la difficulté (liberté d'une famille de fonctions, énoncé plus théorique,...).

Pour situer le niveau attendu, voici une liste d'exercices faits (soit comme exemples du cours, soit cherchés), je les ai accompagnés de questions de cours :

a) Donner la définition d'un SEV et montrer que l'ensemble $C(A) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \,/\, AM = MA\}$ est un SEV de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (A étant une matrice fixée dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$).

b) Donner la définition d'un SEV et montrer que $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x + y + 2z = 0\}$ est un SEV de $\mathbb{R}^3$ (directement, sans utiliser le SEV engendré).

c) Donner la définition d'une famille génératrice d'un SEV puis montrer que l'ensemble F précédent est un SEV (en utilisant le SEV engendré) et en donner une famille génératrice / base.

d) Donner la définition d'une famille libre et la caractérisation. Démontrer une des deux implications.
Puis dire si la famille (u, v, w) suivante est libre.
$u = (1, 1, 1)$, $v = (1, 2, 1)$, $w = (3, 1, 0)$.

e) Donner la définition du SEV engendré par une famille finie de vecteurs (être capable de l'écrire sous forme paramétrique).
Soit $F = \mathrm{Vect}(u, v)$, avec $u = (1, 2, 3)$, $v = (3, 2, 0)$.
Exprimer F comme l'ensemble des solutions d'une équation.

f) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On considère la famille (u, v, w) de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ définis par :

$$u = (1, 1, 2), \quad v = (2, 1, 0), \quad w = (3, 1, \lambda)$$

Dire (en fonction de λ) si elle est libre. Si elle est liée, exprimer un vecteur comme combinaison linéaire des autres.

g) Sur un exemple, donner une base de l'ensemble $C(A)$ défini plus haut.