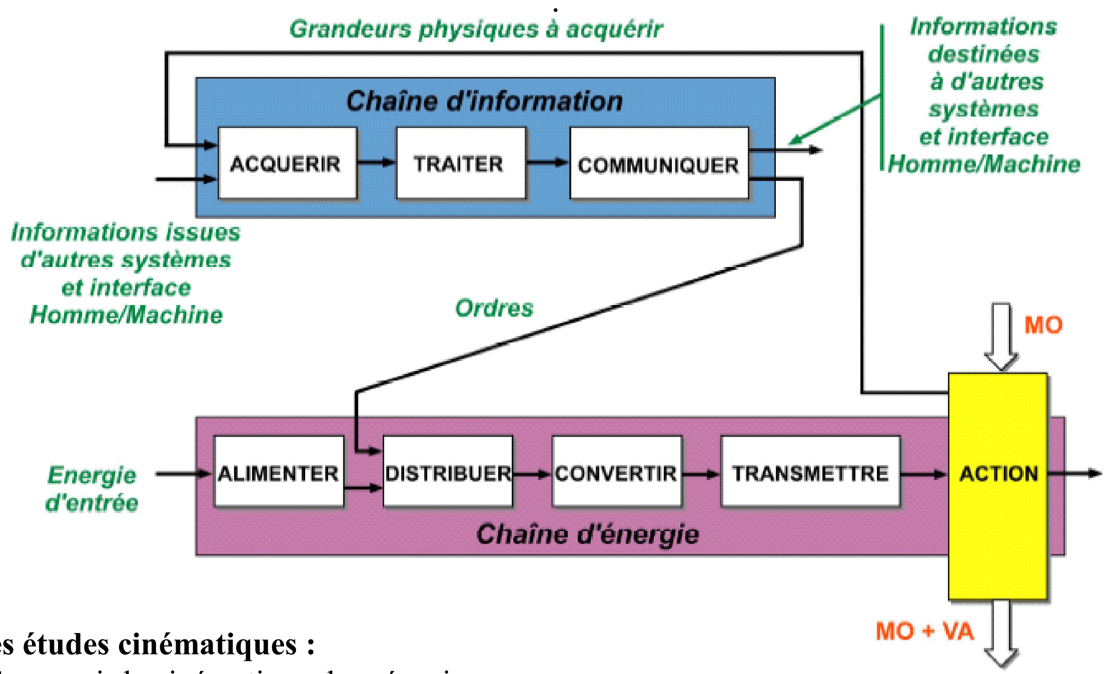
Synthèse mécanismes

1- Introduction :

La chaîne d'énergie transforme, adapte et transmet le flux de puissance nécessaire à l'obtention d'une valeur ajoutée. Elle comprend principalement :

- les actionneurs (vérins, moteurs) qui transforment une énergie électrique, hydraulique ou pneumatique en énergie mécanique
- les transmetteurs qui modifient pour adapter l'énergie mécanique
- les effecteurs qui agissent directement sur la matière d'oeuvre.



Objectifs des études cinématiques :

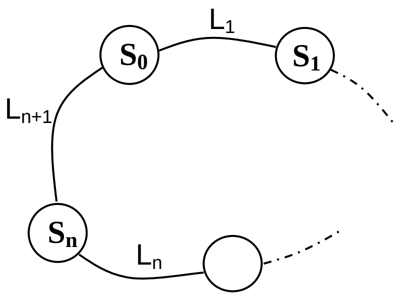
- Concevoir la cinématique du mécanisme
- Dimensionner les constituants
- Piloter les systèmes

Pour cela il faut

- Etablir une relation entrée/sortie
- Déterminer les limites de fonctionnement
- Valider les performances

2- Aspect calculatoire : méthodes générales

Dans le cas d'une chaîne continue fermée dont le graphe de structure est :



2.1 Etude géométrique:

On écrit les fermetures géométriques :

Aspect linéaire: On parcourt le mécanisme en passant par un point A_i de chaque liaison:

$$\boxed{\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \ldots + \overrightarrow{A_{n+1}A_1} = \vec{0}}$$ $\Rightarrow$ 3 équations scalaires par projection dans une base commune

Méthode à retenir. Dans l'ordre des études proposées dans les sujets. On commence par la géométrie, ensuite la cinématique pour finir par la dynamique. Donc la géométrie est quasi systématique et cette fermeture géométrique linéaire (Chasles) à appliquer méthodiquement.

Aspect angulaire : A partir d'une base de référence, on parcourt les différentes bases attachées aux différents solides: $(\vec{x}_0, \vec{x}_1) + (\vec{x}_1, \vec{x}_2) + \ldots + (\vec{x}_n, \vec{x}_0) = 0$

idem dans deux autres plans perpendiculaires ⇒ 3 équations scalaires.

Cette fermeture angulaire (Chasles avec des angles orientés) sert rarement. Son emploi sera précisé si elle est utile et ne concerne que les mouvements plan/plan (cinématique plane).

2.2 Etude cinématique :

On écrit la fermeture cinématique : $\boxed{\mathcal{V}(S_1/S_2) + \mathcal{V}(S_2/S_3) + \ldots + \mathcal{V}(S_n/S_0) + \mathcal{V}(S_0/S_1) = \{0\}}$

⇒ 6 équations scalaires (3 en résultante et 3 en moment) par projection dans une base.

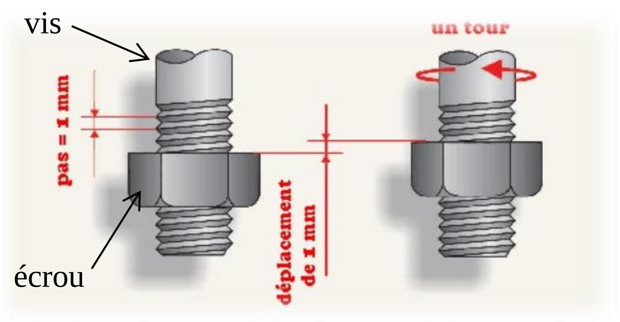
Cette fermeture cinématique sous forme torsorielle (Chasles avec les torseurs cinématiques exprimés en un point) sert assez rarement. Elle est souvent longue à mettre en oeuvre. Son emploi sera précisé si elle est choisie comme méthode. On la remplace souvent par l'utilisation de la fermeture géométrique dérivée.

3- Quelques transmetteurs vus en TP ou TD : il faut retenir le vocabulaire associé aux mécanismes simples présentés (vidéos et animations sur le powerpoint) ici ainsi que leurs lois cinématiques basées sur le non glissement. Utile pour les transformations de mouvements dans le chapitre asservissement sur des systèmes électromécaniques. Utile aussi pour les études dynamiques détaillées proposées dans les sujets de concours.

3.1 Transformation d'un mouvement de rotation en mouvement de translation :

- **Système vis-écrou :**

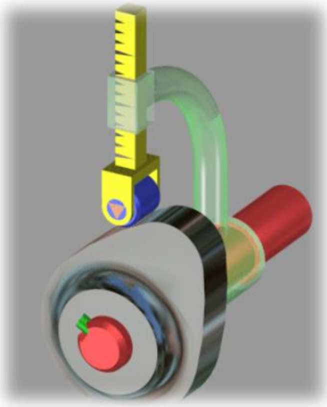
La cinématique du système vis-écrou est définie par le pas de la vis p (en mm) qui est la distance parcourue le long de l'axe de l'hélice pour un tour, par la relation : $V_{(écrou/vis)} = \dfrac{p}{2\pi}\omega_{(écrou/vis)}$ si le pas est à droite. Cette relation traduit les 2 mouvements (translation et rotation autour de l'axe de la liaison) et le seul degré de liberté de la liaison hélicoïdale.



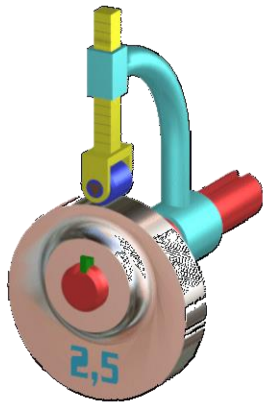
Vis/écrou à billes (bras maxpid)

- **Système de came ou excentrique**

La loi entrée-sortie (relation entre l'angle de rotation de la came et la translation générée) est fonction du profil de la came (généralement défini en coordonnées polaires). Les systèmes varient en fonction de la position de l'axe de rotation par rapport à l'axe de la translation. Les systèmes à excentrique reposent sur le même principe. La rotation continue d'entrée est transformée en translation alternative de la sortie. Pour l'excentrique, on montre très facilement que la translation alternative est sinusoïdale en fonction de l'angle de rotation de l'excentrique



Système à came

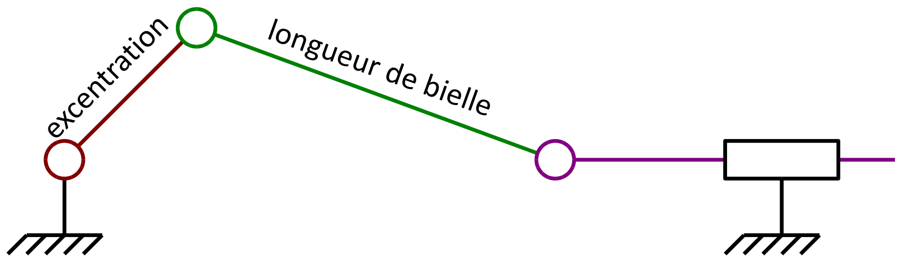


Système à excentrique

arbre à cames de moteur 4 temps

- **<u>Système à biellettes articulées :</u>**

Le système le plus connu (utilisé entre autre dans les moteurs de voitures) est le système bielle manivelle. La longueur de l'excentration sur la manivelle et la longueur de la bielle jouent sur la relation entre l'angle de la manivelle et la translation de la tige. La translation alternative (solide violet) n'est pas sinusoïdale en fonction de l'angle de rotation du vilbrequin (solide marron).

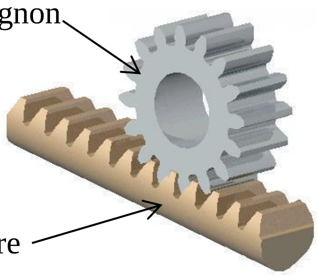


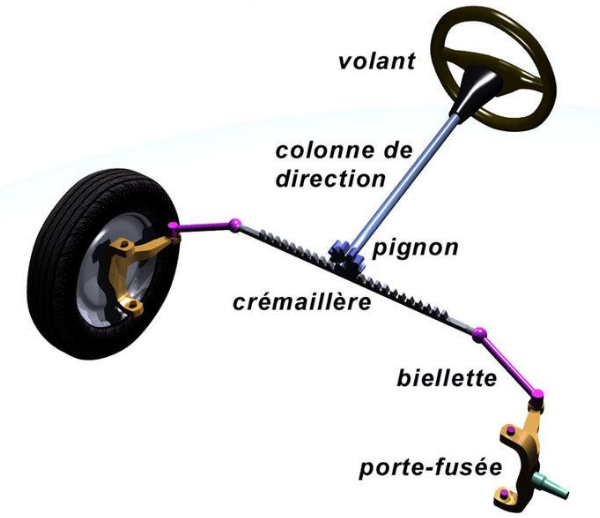
Moteur thermique à 4 cylindres

- **<u>Système pignon-crémaillère</u>**

Cette transformation fait partie de la famille des engrenages. La vitesse de translation de la crémaillère (V) est fonction du diamètre de la roue dentée (d = 2r). $(V_{(crémaillère)} = \frac{d}{2}\omega_{(pignon)})$.

Modèle RSG « V = R ω »



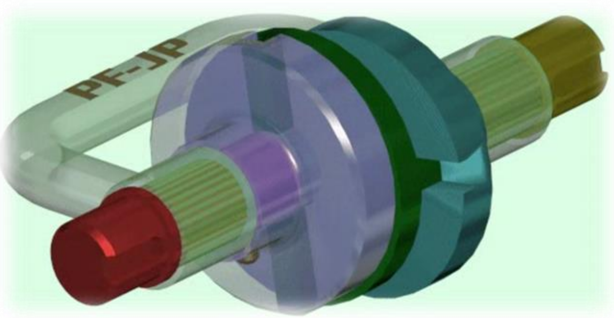


Crémaillère de direction de voiture

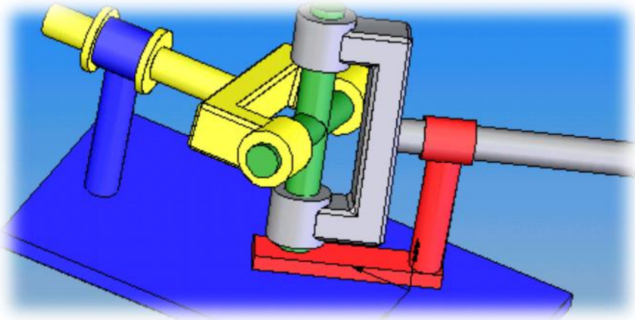
3.2 Transmission ou transformation d'un mouvement de rotation en mouvement de rotation différent

- **Joints de transmission ou accouplements mécaniques**

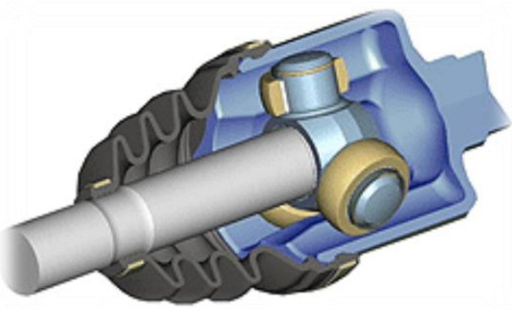
Plusieurs solutions permettent de transmettre un mouvement de rotation entre deux arbres non co-axiaux (exemple pour les roues d'une automobile). L'homocinétisme (vitesse de sortie constante pour une vitesse d'entrée constante) est parfois recherché. Ci-dessous, trois solutions sont présentées. Le joint de Oldham est homocinétique, le joint de cardan n’est pas homocinétique (sauf monté en double avec axes entrée et sortie parallèles) tandis que le tripode l'est quasiment.



joint de Oldham


joint de cardan simple


Joint de cardan double


joint tripode (celui des voitures)

- **Réducteurs – variateurs**

Les réducteurs permettent d’adapter le couple et la vitesse de rotation d’un moteur en un couple et une vitesse sur l’arbre de sortie (loi $P_{uissance} = C_{ouple} \cdot \omega_{rotation}$). La vitesse d’un moteur est souvent élevée et le couple faible alors que la vitesse souhaitée sur l’arbre récepteur est beaucoup plus faible et le couple bien plus élevé.

Pour un réducteur supposé parfait (pas de frottement interne) le rendement vaut η=1

$$\eta = \frac{Puissance\ fournie}{Puissance\ reçue} = \frac{P_S}{P_e} = \frac{C_S.\omega_S}{C_e.\omega_e} \quad \Rightarrow C_s = \eta.C_e.\frac{\omega_e}{\omega_S} = \eta.C_e.\frac{1}{\lambda}$$

avec λ le rapport de réduction < 1 donc $C_s > C_e$

Puissance reçue $C_e.\omega_e$ →	Réducteur Rapport de réduction λ Rendement η	→ Puissance fournie $C_s.\omega_s$

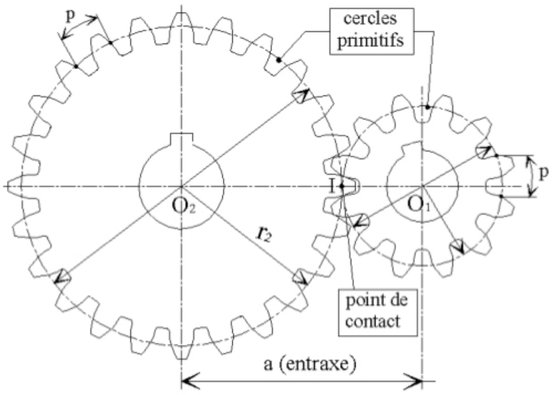
On peut classer les réducteurs en différentes catégories en fonction de la technologie employée pour transmettre le mouvement :

- transmission par adhérence : roue à friction (frottement) (dynamo de vélo), système poulie-courroie (alternateur de voiture)
- transmission par obstacle : système poulie-courroie avec courroie dentée (courroie de distribution d'une voiture), système à chaîne (vélo, moto), système à engrenage (boite de vitesses).

4- Engrenages

4.1 Vocabulaire :

- denture : partie dentée des roues
- pignon : lorsque l'on considère un engrenage composé de deux roues, le pignon est la plus petite des deux, l'autre s'appelle la roue
- profil de denture : il s'agit de la forme des dents, on parle de denture droite, de denture hélicoïdale...
- rapport de réduction : rapport entre la vitesse de rotation de la roue de sortie et du pignon d'entrée.



4.2 Rapport de réduction :

Le rapport de réduction, ou rapport entre les vitesses des deux roues en contact, dépend uniquement du nombre de dents de chaque roue. On définit :

- **d** le diamètre primitif : si on l'on représente un engrenage par deux roues lisses, qui ont le même rapport de réduction que l'engrenage à roue dentées, le diamètre primitif est le diamètre de la roue lisse (d roue), ou du pignon (d pignon).
- **z** le nombre de dents : on note par convention z le nombre de dents d'un roue (exemple : z = 13 dents)
- **m** le module : c'est le rapport entre le diamètre primitif et le nombre de dents ($d = m \cdot z$). Celui-ci est normalisé et caractérise la « taille »des dents. Pour que deux roues engrènent, elles doivent donc avoir le même module.

Lorsque la roue 1 engrène avec la roue 2, les cercles primitifs des roues roulent l'un sur l'autre sans glisser au point I (pas de patinage, analogie avec deux roues de friction roulant l'une sur l'autre sans glisser).

$$\overrightarrow{V(M_2 \in 2/1)} = \overrightarrow{M_2O_2} \wedge \overrightarrow{\Omega_{2/1}} = R_2.\omega_2 \overrightarrow{y_2}$$

$$\overrightarrow{V(M_3 \in 3/1)} = \overrightarrow{M_3O_3} \wedge \overrightarrow{\Omega_{3/1}} = R_3.\omega_3 \overrightarrow{y_3}$$

La condition de roulement sans glissement en I donne :

$$\overrightarrow{V(I \in 2/3)} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{V(I \in 2/1)} = \overrightarrow{V(I \in 3/1)}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{V(O_2 \in 2/1)} + \overrightarrow{IO_2} \wedge \overrightarrow{\Omega_{2/1}} = \overrightarrow{V(O_3 \in 3/1)} + \overrightarrow{IO_3} \wedge \overrightarrow{\Omega_{3/1}}$$

$$\Rightarrow R_2 \overrightarrow{y_1} \wedge \omega_2 \overrightarrow{z_1} = -R_3 \overrightarrow{y_1} \wedge \omega_3 \overrightarrow{z_1}$$

D'où le **rapport de réduction** :

$$\boxed{\frac{\omega_3}{\omega_2} = \frac{\theta_3}{\theta_2} = -\frac{R_2}{R_3} = -\frac{Z_2}{Z_3}}$$

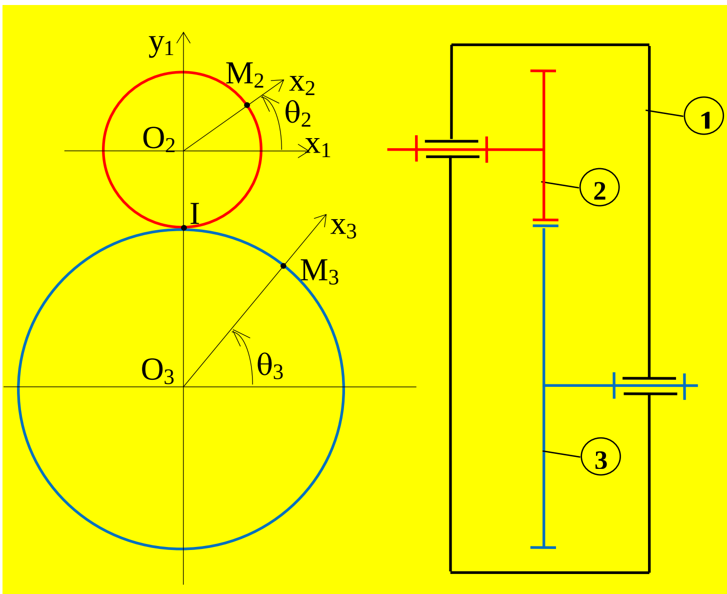
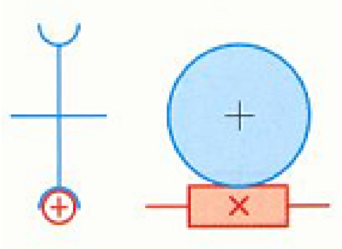


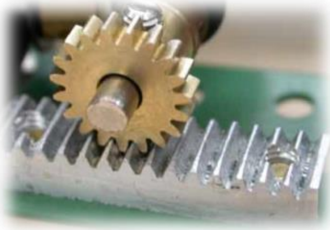
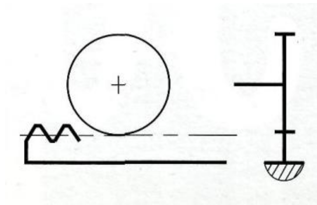
schéma cinématique : représentation symbolique normalisée à connaître

Cas particuliers :

Roue et vis sans fin : photo et schéma cinématique

$$rapport = \frac{\omega_{roue}}{\omega_{vis}} = \frac{Z_{vis}}{Z_{roue}}$$

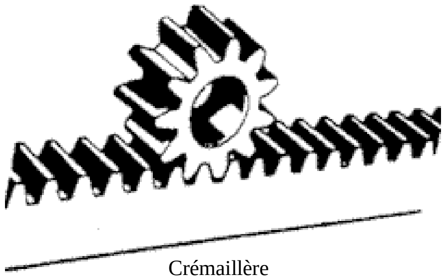



Pignon crémaillère photo et schéma cinématique

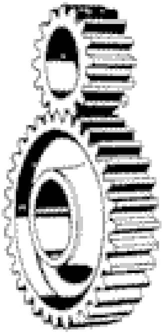
$$rapport = \frac{v_{crémaillère}}{\omega_{pignon}} = \frac{d}{2} = m\frac{z}{2}$$

4.3 Différents types d'engrenages :

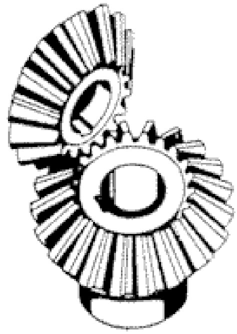
- Engrenages à denture droite : le plus simple et le plus économique. Une seule dent est en prise, l'effort moteur passe donc brutalement d'une dent à l'autre ce qui génère un fonctionnement bruyant (exemple : marche arrière des voitures).



Crémaillère

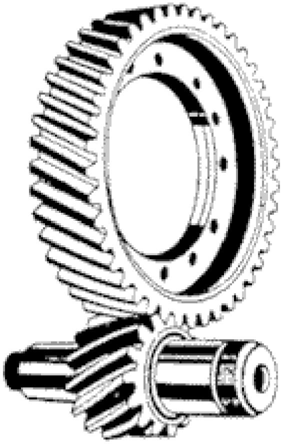


Engrenages à axe parallèle

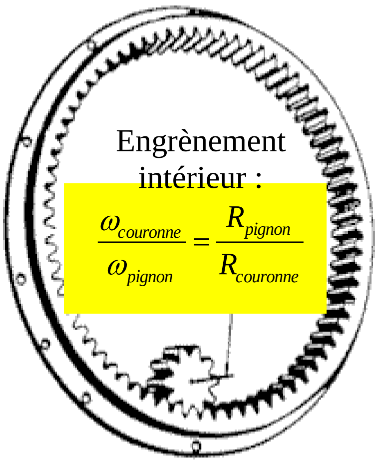


Engrenages coniques

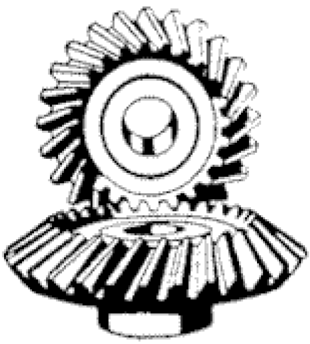
- Engrenages à denture hélicoïdale : À taille égale, ils sont plus performants que les précédents pour transmettre puissance et couple. Du fait d'une meilleure progressivité et continuité de l'engrènement ils sont aussi plus silencieux.



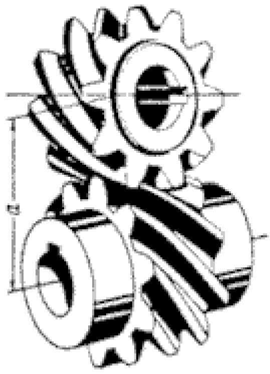
Engrenages à axes parallèles



Engrenages à denture intérieure



Engrenages coniques



Roue et vis sans fin

L'inclinaison de la denture engendre des efforts axiaux, suivant l'axe de l'arbre, qui doivent être supportés par paliers et des couples supplémentaires qui accentuent le fléchissement des arbres. Une solution consiste à utiliser deux engrenages pour que les efforts axiaux se compensent. Citroën a été le précurseur de cette idée avec son chevron.



4.4 Les trains d'engrenages simples


Train d'engrenages d'une montre

On appelle train d'engrenages simple une succession d'engrenages constitués de roues dont les axes de rotation sont fixes les uns par rapport aux autres.

Les roues d'entrée et de sortie étant identifiées, on exprime en général le **rapport de transmission** $\lambda = \dfrac{\omega_{sortie/bâti}}{\omega_{entrée/bâti}}$.

Si λ<1, le train est réducteur (rapport de réduction), si λ >1 le train est multiplicateur.

Pour calculer le rapport du train ci-contre, on effectue le produit des rapports des engrenages qui constituent le train tout en identifiant clairement pour chaque engrenage l'entrée et la sortie :

Dans l'exemple ci-contre : $\lambda = \dfrac{\omega_{sortie/bâti}}{\omega_{entrée/bâti}} = \dfrac{\omega_{3/bâti}}{\omega_{1/bâti}} = \dfrac{R_1}{R_2}\dfrac{R_{2'}}{R_3} = \dfrac{Z_1.Z_{2'}}{Z_2.Z_3}$

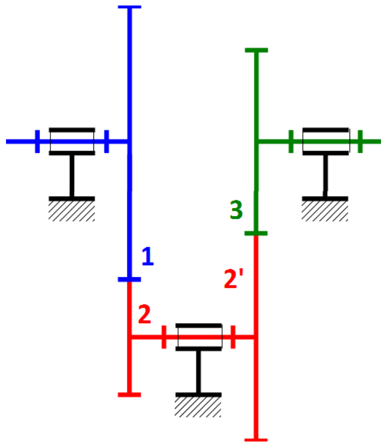


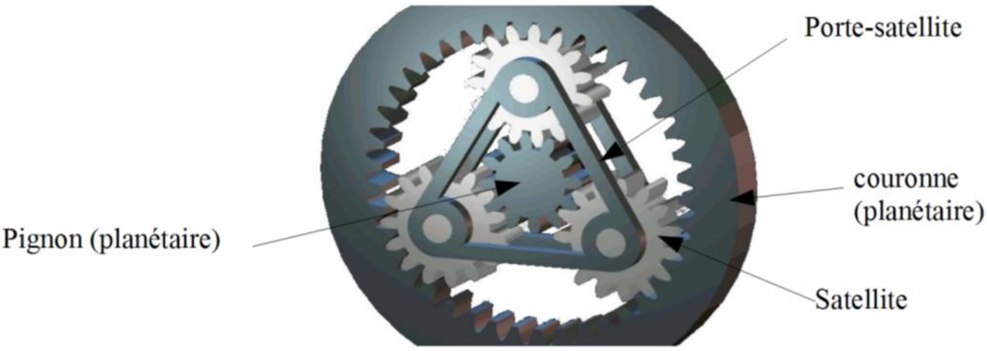
Schéma cinématique

4.5 Les trains épicycloïdaux

4.5.1 Présentation :

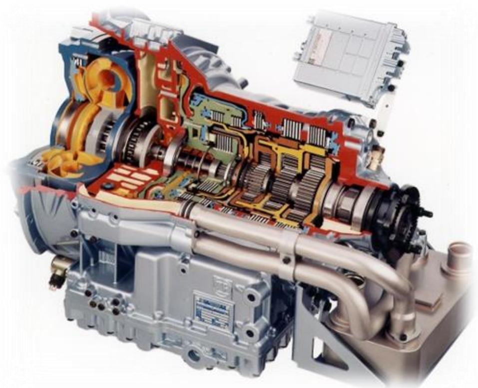
Sous le nom de train épicycloïdal ou engrenage planétaire, on désigne un système de transmission de puissance entre deux ou plusieurs arbres dont certains tournent non seulement autour de leur propre axe, mais aussi avec leur axe autour d'un autre axe. Les engrenages peuvent être cylindriques ou coniques.

Ceux dont l'axe coïncide avec un axe fixe dans l'espace s'appellent "**planétaire**" et ceux qui tournent avec leur axe autour d'un autre s'appellent "**satellites**". Ces derniers sont généralement maintenus en place par une pièce mobile nommée "**porte-satellite**".



Les avantages des systèmes planétaires sont :

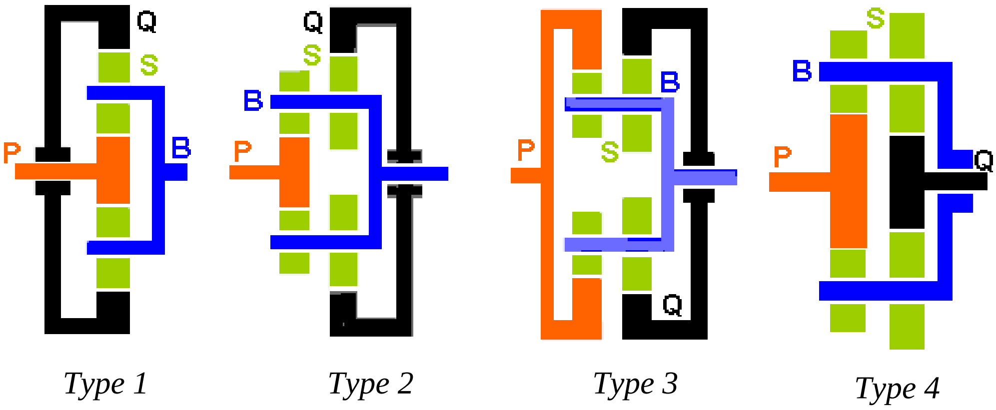
- possibilité d'arrangement coaxial des arbres.
- réduction du poids et de l'encombrement pour une puissance donnée.
- rapport de réduction très élevé possible avec un minimum d'éléments pour transmissions à faible puissance.
- excellent rendement quand le système est judicieusement choisi.


Boîte de vitesses automatique à 3 trains épicycloïdaux

4.5.2 Quatre types de trains épicycloïdaux : (pour la culture…)

P et Q sont des planétaires,
S sont les satellites,
B est le porte-satellite.

Cette classification permet l'identification d'un train en fonction de sa morphologie. Les **4 principaux types** présentés permettent le calcul du rapport de vitesse de la plupart des trains d'engrenages.



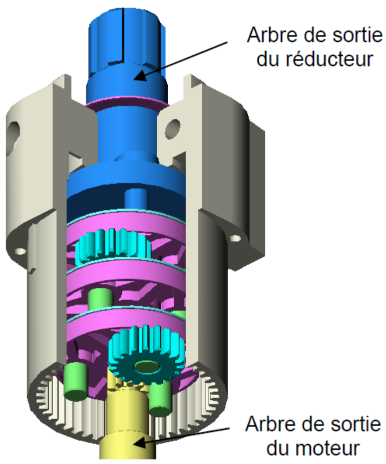
4.5.3 Formule de Willis : (pour la culture…voir l'application par forcément évidente sur l'exemple ci-dessous).

La formule de Willis permet de déterminer facilement le rapport de réduction d'un train épicycloïdal :

$$r = \frac{\Omega_{planétaire1/porte-satellite}}{\Omega_{planétaire2/porte-satellite}} = (-1)^n \frac{\prod Zmenante}{\prod Zmenée}$$

n = nombre de contacts extérieurs entre les pignons qui permet de déterminer le sens de rotation de sortie
Z = nombre de dents roues menantes ou menées.

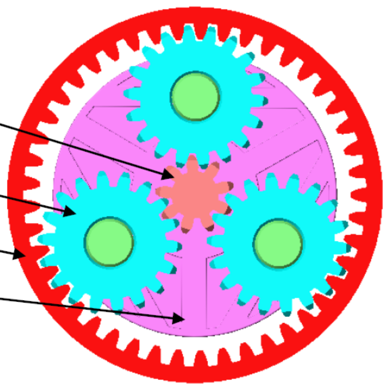
Exemple du réducteur du portail en salle de TP : Il est constitué de 4 trains épicycloïdaux de Type 1 en série



Un satellite sur 3 est représenté sur ce dessin pour faciliter la visualisation.

Chaque train épicycloïdal est constitué de :

- d'un planétaire A (pignon solaire),
- 3 satellites,
- un planétaire B (couronne dentée),
- un porte-satellites.



Le planétaire A (pignon solaire) est l'élément moteur, il entraîne les satellites qui roulent dans le planétaire B (couronne dentée). Le porte-satellites est l'élément de sortie.

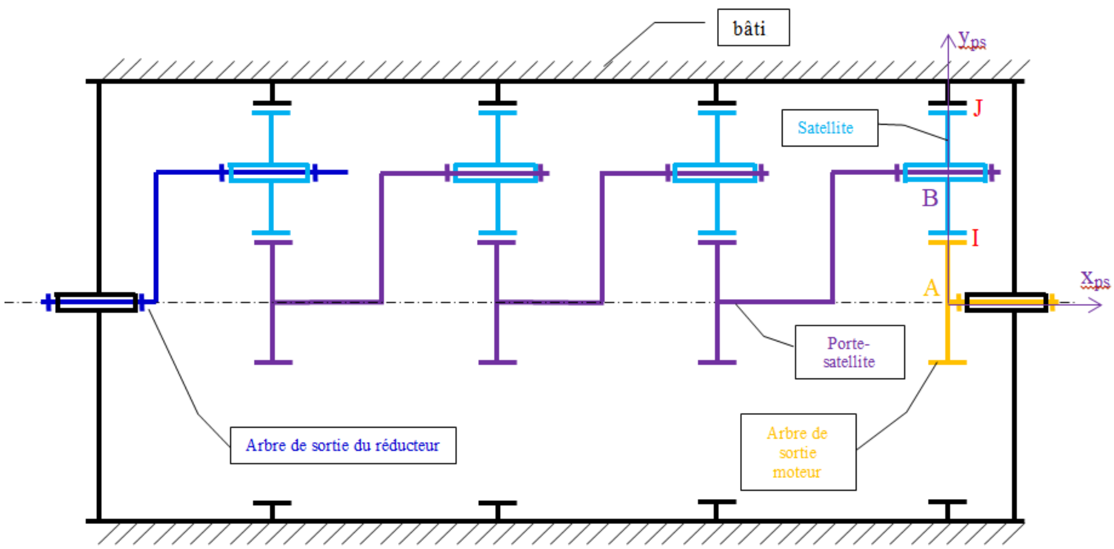


Schéma cinématique plan du réducteur du portail

Les nombres de dents des différentes roues dentées sont : $Z_{\text{arbre sortie moteur}} = 9$; $Z_{\text{satellite}} = 18$; $Z_{\text{couronne bâti}} = 45$

Détermination du rapport de réduction d'un train épicycloïdal : $\lambda_1 = \dfrac{\omega_{\text{portesatellite / bâti}}}{\omega_{\text{arbre sortie moteur / bâti}}} = \dfrac{9}{45+9}$

Démonstration : Toujours la même méthode. On part des conditions de RSG, on décompose et on applique Babar en allant chercher les points de vitesse nulle appartenant aux axes de rotation.

$$\overrightarrow{V(I \in Am/S)} = \vec{0} = \overrightarrow{V(I \in Am/b)} - \overrightarrow{V(I \in S/Ps)} - \overrightarrow{V(I \in Ps/b)}$$

Am : arbre de sortie moteur en rotation par rapport au bâti b autour de l'axe $(A, \overrightarrow{X_{PS}})$
S : satellite en rotation par rapport au porte satellite Ps (il y en a 3 pour des questions d'équilibrage dynamique) autour de l'axe $(B, \overrightarrow{X_{PS}})$
Ps : porte satellite en rotation par rapport au bâti b autour de l'axe $(A, \overrightarrow{X_{PS}})$

D'où : $\vec{0} = \overrightarrow{IA} \wedge \overrightarrow{\Omega_{Am/b}} - \overrightarrow{IB} \wedge \overrightarrow{\Omega_{S/Ps}} - \overrightarrow{IA} \wedge \overrightarrow{\Omega_{Ps/b}}$

$$\vec{0} = -Z_{Am}\,\overrightarrow{Y_{PS}} \wedge \omega_{Am/b}\,\overrightarrow{X_{PS}} - Z_S\,\overrightarrow{Y_{PS}} \wedge \omega_{S/Ps}\,\overrightarrow{X_{PS}} + Z_{Am}\,\overrightarrow{Y_{PS}} \wedge \omega_{Ps/b}\,\overrightarrow{X_{PS}}$$

Les rayons des roues dentées sont remplacés par les nombres de dents puisqu'il y a proportionnalité entre les deux.
On projette l'équation vectorielle sur $\overrightarrow{Z_{PS}}$.

D'où : $Z_{Am}.\omega_{Am/b} + Z_S.\omega_{S/Ps} - Z_{Am}.\omega_{Ps/b} = 0$

On recommence en J :

$$\overrightarrow{V(J \in S/b)} = \vec{0} = \overrightarrow{V(J \in S/Ps)} + \overrightarrow{V(J \in Ps/b)}$$

$$\vec{0} = \overrightarrow{JB} \wedge \overrightarrow{\Omega_{S/Ps}} + \overrightarrow{JA} \wedge \overrightarrow{\Omega_{Ps/b}}$$

$$\vec{0} = -Z_S\,\overrightarrow{Y_{PS}} \wedge \omega_{S/Ps}\,\overrightarrow{X_{PS}} - (2Z_S + Z_{Am})\overrightarrow{Y_{PS}} \wedge \omega_{Ps/b}\,\overrightarrow{X_{PS}}$$

$$Z_S.\omega_{S/Ps} + (2Z_S + Z_{Am}).\omega_{Ps/b} = 0$$

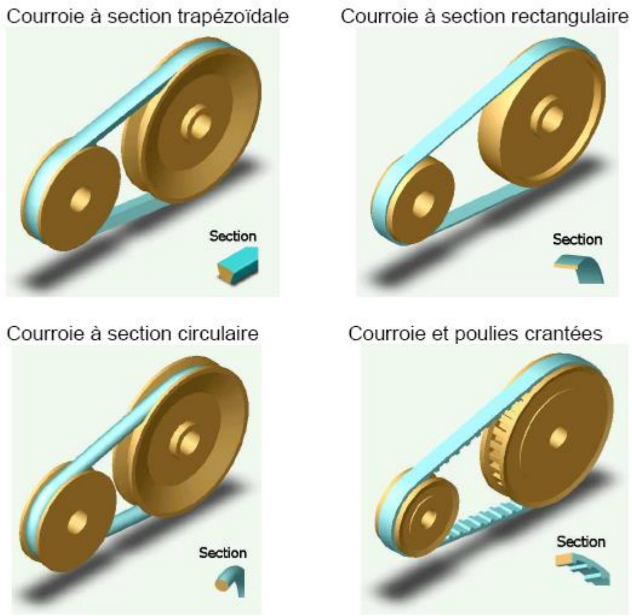
On élimine le mouvement interne $\omega_{S/Ps}$: $\omega_{S/Ps} = -\dfrac{2Z_S + Z_{Am}}{Z_S}\omega_{Ps/b} = \dfrac{Z_{Am}}{Z_S}(\omega_{Ps/b} - \omega_{Am/b})$

D'où : $(2Z_S + 2Z_{Am})\omega_{Ps/b} = Z_{Am}\omega_{Am/b}$ on trouve donc : $\dfrac{\omega_{Ps/b}}{\omega_{Am/b}} = \lambda_1 = \dfrac{Z_{Am}}{2Z_S + 2Z_{Am}} = \dfrac{9}{36+18} = \dfrac{1}{6}$

Détermination du rapport de réduction du réducteur : $\lambda = \dfrac{\omega_{\text{arbre sortie réducteur / bâti}}}{\omega_{\text{arbre sortie moteur / bâti}}} = \left(\dfrac{1}{6}\right)^4$

L'arbre de sortie de l'un des trains épicycloïdaux sert d'arbre d'entrée pour le suivant. Le rapport de réduction totale est le produit des rapports de réduction de chacun des trains épicycloïdaux mis en série. Cela permet dans un faible encombrement d'avoir un grand rapport de réduction donc de fournir un couple conséquent en sortie de réducteur (en diminuant la vitesse de rotation).

5- Poulies/courroies et chaînes



Les systèmes poulie-courroie sont utilisés pour transmettre un mouvement de rotation sur des distances importantes (qui nécessiteraient plusieurs trains d'engrenage par exemple). Ils sont utilisés dans de nombreux domaines, comme l'automobile, la bureautique (commande de scanner), la robotique, les vélos (transmission par chaîne)... Ils possèdent un fonctionnement identique à un système à chaîne.

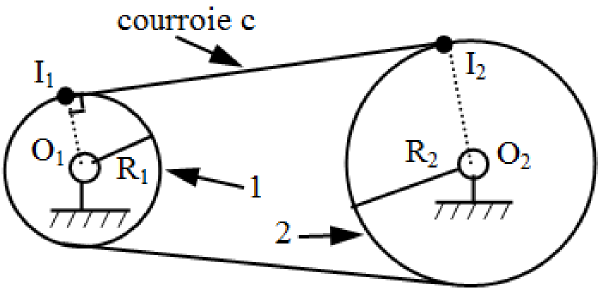


Schéma cinématique système poulie courroie

Du fait de l'inextensibilité de la courroie, les vitesses de tous ses points ont la même norme. Si la courroie ne glisse pas sur les poulies, alors on en déduit que le rapport de réduction :

$$\boxed{\lambda = \frac{\omega_{2/bâti}}{\omega_{1/bâti}} = \frac{R_1}{R_2}}$$

Cette relation n'est valable que s'il y a non glissement entre la courroie et les poulies ce qui nécessite un coefficient de frottement non nul et un système permettant de tendre constamment la courroie.

Pour augmenter le couple transmissible par un tel système, on utilise des courroies à section trapézoïdale (la surface de contact augmente ce qui améliore l'adhérence) ou des courroies crantées qui suppriment le glissement

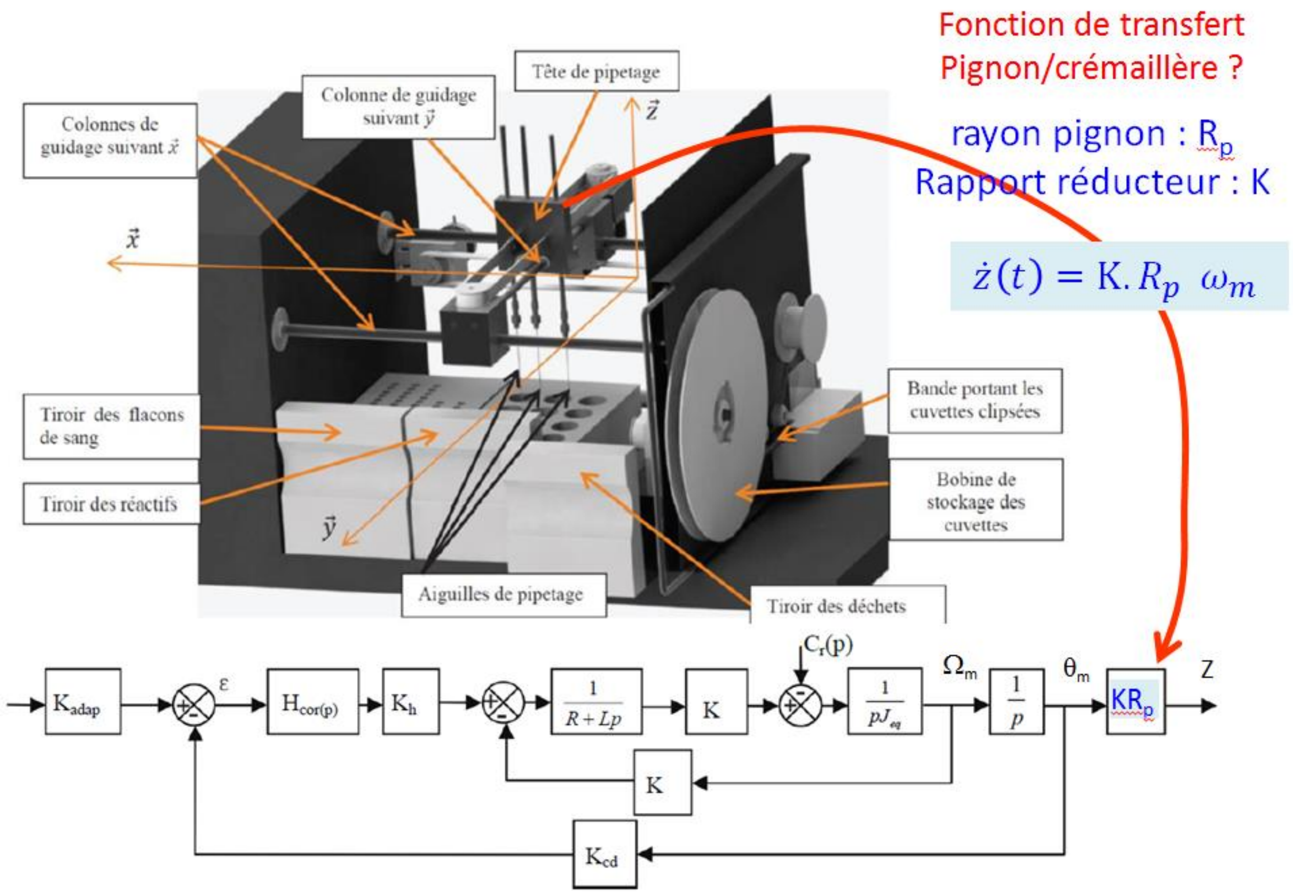
(courroie de distribution dans les moteurs 4 temps...) ou encore des chaînes (moto, bicyclette...)

Chaîne reliant les deux arbres à cames d'un moteur de voiture

Transmission par courroie crantée d'une moto

Illustrations sur des sujets de concours : **Ce qu'il faut savoir faire…**

extrait CCP MP 2015



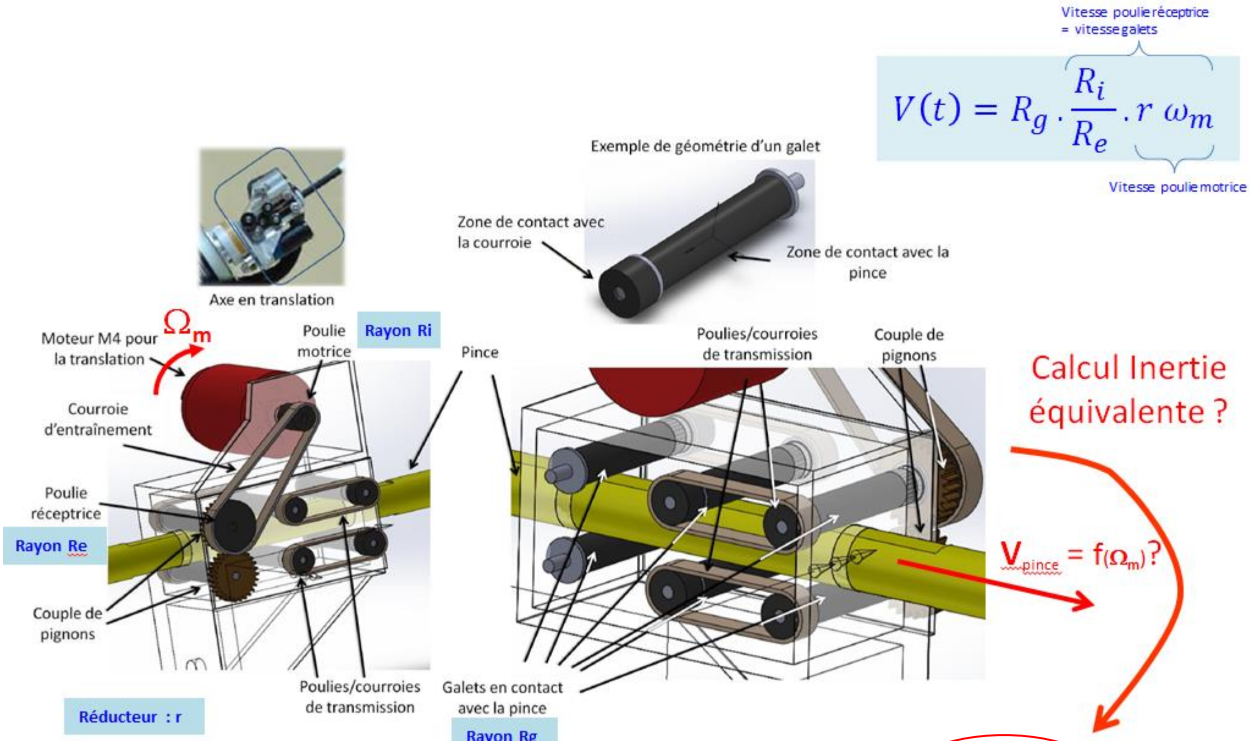
Justification : pas de représentation du mécanisme pignon/crémaillère dans le sujet. On considère que le candidat sait ce que c'est…

La rotation du moteur (ω_m) est réduite par le réducteur (rapport de réduction K) puis entraîne le pignon (rayon R_p) du mécanisme pignon crémaillère. La rotation est transformée en translation (suivant l'axe vertical $\vec{z}$) par le RSG.

D'où l'expression de la vitesse verticale : $v(t) = \frac{d}{dt}z(t) = R_p.K.\omega_m = R_p.K.\frac{d}{dt}\theta_m(t)$

On en déduit la fonction de transfert : $\frac{Z(p)}{\theta_m(p)} = R_p.K$

extrait Mines MP 2016



$$J_{eq} = I_m + r^2(I_r + I_i) + (I_e + 2I_p + 6I_g)\frac{r^2R_i^2}{R_e^2} + m_4.\frac{r^2R_i^2.R_g^2}{R_e^2}$$

$m_4\,V^2$

Justification : on a plusieurs représentations du mécanisme de transformation de mouvement dans le sujet. Il est un peu compliqué.

La rotation du moteur (Ω_m) est réduite par le réducteur (rapport de réduction r) puis entraîne la petite roue dentée appelée poulie motrice (rayon R_i). La courroie de ce système poulie courroie fait tourner la grande roue dentée (rayon R_e) à une vitesse inférieure (rapport R_i/R_e). Un couple de pignons de même rayon reçoit cette rotation (ayant même rayon ces 2 pignons tournent à la même vitesse mais en sens opposé). Un ensemble de poulies/courroies permet de transmettre cette rotation à tous les galets (même vitesse car rayons identiques). Les galets « du haut » tournent dans un sens et les galets « du bas » en sens opposé.

Le contact galet/pince se faisant sans glissement, la rotation des galets est transformée en translation ($V_{pince} = R_{galets}\,.\omega_{galets}$).

Au bilan :

D'où l'expression de la vitesse verticale :

$$v_{pince}(t) = R_g.\omega_{galet} = R_g.\omega_{poulie\ réceptrice} = R_g.\frac{R_i}{R_e}\omega_{réducteur} = R_g.\frac{R_i}{R_e}.r.\Omega_{moteur}(t)$$

Le calcul demandé dans le sujet est celui de l'inertie équivalente vue par le moteur. C'est la difficulté que voit le moteur à accélérer angulairement à cause de tous les solides qu'il met en mouvement. Elle est notée J_{eq} et sert dans l'application des lois de la mécanique pour la suite du sujet (principe fondamental de la dynamique et théorème de l'énergie cinétique).