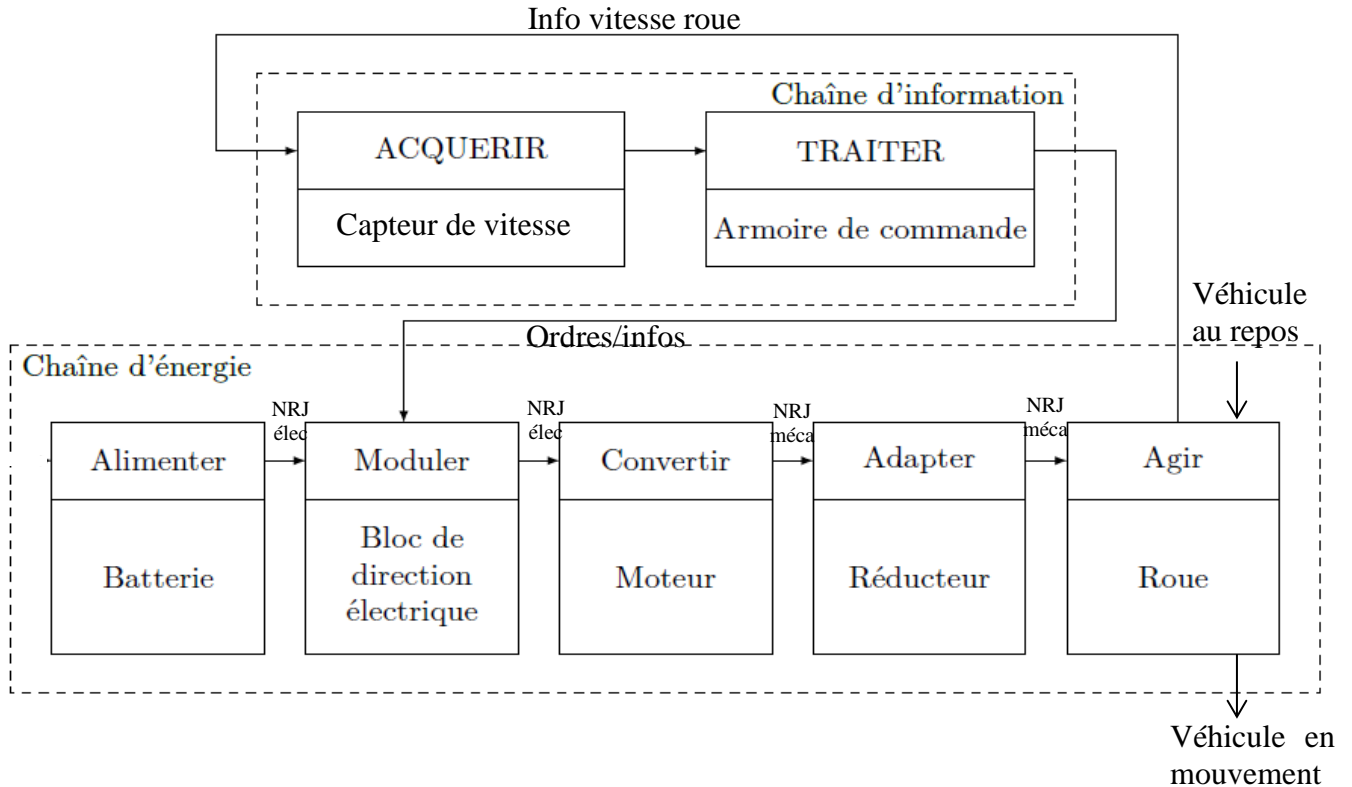


**Problème N°1 :**

Q1 :



Q2 : Etant donné l'hypothèse de roulement sans glissement :  $V_{max} = R \times \omega_{rmax} = R \times \frac{N_{max}}{N} \times \frac{2\pi}{60}$

Application numérique :

$$V_{max} = 5,16 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 18,6 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$$

La vitesse à atteindre étant de  $15 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ , la performance attendue est bien vérifiée

Q3 :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{V(O_1 \in S/0)} &= \overrightarrow{V(C \in S/0)} + \overrightarrow{O_1 C} \wedge \overrightarrow{\Omega S/0} \\ &= \vec{0} + \left( -a \cdot \vec{x} + \left( \rho - \frac{d}{2} \right) \cdot \vec{y} \right) \wedge \psi \cdot \vec{z}_0 \\ &= a\psi \cdot \vec{y} + \left( \rho - \frac{d}{2} \right) \psi \cdot \vec{x} \end{aligned}$$

De même :

$$\overrightarrow{V(O_2 \in S/0)} = a\psi \cdot \vec{y} + \left( \rho + \frac{d}{2} \right) \psi \cdot \vec{x}$$

Q4 :

$$\overrightarrow{V(O_1 \in Roue_1/0)} = \overrightarrow{V(J_1 \in Roue_1/0)} + \overrightarrow{O_1 J_1} \wedge \overrightarrow{\Omega Roue_1/0}$$

$$\overrightarrow{\Omega Roue_1/0} = \overrightarrow{\Omega Roue_1/S} + \overrightarrow{\Omega S/0} = \theta_1 \cdot \vec{y}_1 + \psi \cdot \vec{z}_0$$

D'où :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{V(O_1 \in Roue_1/0)} &= \vec{0} + (-R \cdot \vec{z}_0 \wedge \theta_1 \cdot \vec{y}_1) \\ &= R\theta_1 \cdot \vec{x}_1 \end{aligned}$$

De même :

$$\overrightarrow{V(O_2 \in Roue_2/0)} = R\theta_2 \cdot \vec{x}_2$$

Q5 :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{V(O_1 \in Roue_1/0)} &= \overrightarrow{V(O_1 \in Roue_1/S)} + \overrightarrow{V(O_1 \in S/0)} \\ R\theta_1 \cdot \vec{x}_1 &= \vec{0} + a\psi \cdot \vec{y} + \left( \rho - \frac{d}{2} \right) \psi \cdot \vec{x} \end{aligned}$$

En projetant suivant  $\vec{x}$  et  $\vec{y}$  :

$$\begin{aligned} R\dot{\theta}_1 \cos \delta_1 &= \left(\rho - \frac{d}{2}\right) \dot{\psi} \\ R\dot{\theta}_1 \sin \delta_1 &= a\dot{\psi} \end{aligned}$$

Q6 : De même qu'à la question 12 :

$$\begin{aligned} R\dot{\theta}_2 \cos \delta_2 &= \left(\rho + \frac{d}{2}\right) \dot{\psi} \\ R\dot{\theta}_2 \sin \delta_2 &= a\dot{\psi} \end{aligned}$$

Q7 : On en déduit :

$$\begin{aligned} \tan \delta_1 &= \frac{a}{\rho - \frac{d}{2}} \\ \tan \delta_2 &= \frac{a}{\rho + \frac{d}{2}} \end{aligned}$$

Application numérique :

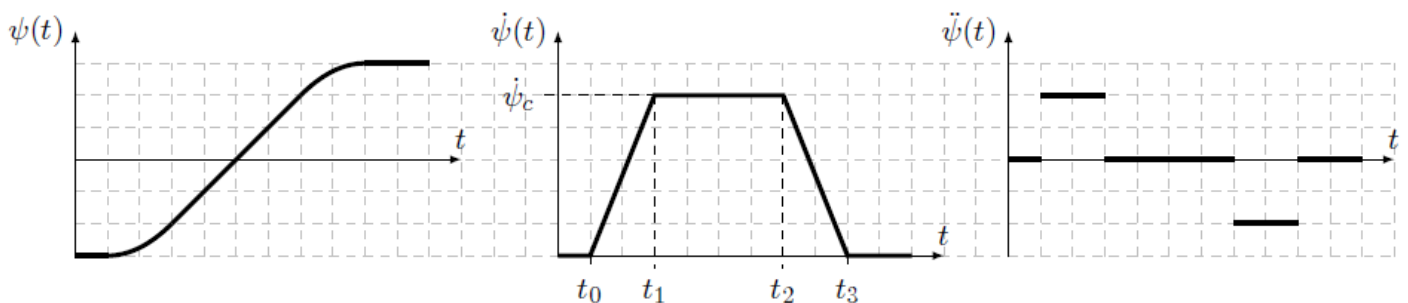
$$\begin{aligned} \tan \delta_1 &= 0,148 \Rightarrow \delta_1 = 8,4^\circ \\ \tan \delta_2 &= 0,116 \Rightarrow \delta_2 = 6,6^\circ \end{aligned}$$

Q8 :

$$\begin{aligned} \theta_2 &= \left(\rho + \frac{d}{2}\right) \cdot \frac{\psi}{R} \\ \theta_1 &= \left(\rho - \frac{d}{2}\right) \cdot \frac{\psi}{R} \end{aligned}$$

Q9 : lors d'un virage la trajectoire circulaire suivie par la roue intérieure est plus courte que la trajectoire circulaire suivie par la roue extérieure. Les vitesses de rotation propres des roues doivent donc être différentes.

Q10 :



Q11 :

$$A = \dot{\psi}_c = \frac{V}{\rho}$$

$$B = \ddot{\psi}_0 \cdot \frac{(t_1 - t_0)^2}{2} + \dot{\psi}_c \cdot (t - t_1)$$

$$C = \dot{\psi}_c - \ddot{\psi}_0 \cdot (t - t_2)$$

On obtient D en intégrant C :

$$D = \dot{\psi}_c \cdot t - \ddot{\psi}_0 \cdot \frac{(t - t_2)^2}{2} + Cte$$

Il faut calculer la constante :

$$D(t = t_2) = \dot{\psi}_c \cdot t_2 + Cte = B(t = t_2) = \ddot{\psi}_0 \cdot \frac{(t_1 - t_0)^2}{2} + \dot{\psi}_c \cdot (t_2 - t_1)$$

D'où :

$$Cte = \ddot{\psi}_0 \cdot \frac{(t_1 - t_0)^2}{2} - \dot{\psi}_c \cdot t_1$$

$$D = \dot{\psi}_c \cdot (t - t_1) + \ddot{\psi}_0 \cdot \left( \frac{(t_1 - t_0)^2}{2} - \frac{(t - t_2)^2}{2} \right)$$

Q12 :

$$\begin{aligned} \psi_{TOT} &= D(t = t_3) = \dot{\psi}_c \cdot (t_3 - t_1) \\ &= \dot{\psi}_c \cdot (t_3 - t_2 + t_2 - t_1) \\ &= \dot{\psi}_c \cdot (t_2 - t_1) + \dot{\psi}_c \cdot (t_3 - t_2) \\ &= \dot{\psi}_c \cdot (t_2 - t_1) + \frac{\dot{\psi}_c^2}{\ddot{\psi}_0} \end{aligned}$$

Ce résultat s'obtient plus simplement en exprimant l'aire sous la courbe de vitesse (2 triangles d'aires identiques et un rectangle) :

$$\psi_{TOT} = \frac{1}{2} \dot{\psi}_c \cdot (t_1 - t_0) + \dot{\psi}_c \cdot (t_2 - t_1) + \frac{1}{2} \dot{\psi}_c \cdot (t_3 - t_2) = \dot{\psi}_c \cdot (t_1 - t_0) + \dot{\psi}_c \cdot (t_2 - t_1) + \dot{\psi}_c \cdot (t_2 - t_1) + \frac{\dot{\psi}_c^2}{\ddot{\psi}_0}$$

Q13 :

$$\dot{\psi}_c \cdot (t_2 - t_1) = \psi_{TOT} - \frac{V^2}{\rho^2} \cdot \frac{1}{\ddot{\psi}_0}$$

Application numérique :

$$t_2 - t_1 = 1,38 \text{ s}$$

Q14 :

$$\begin{aligned} t_3 - t_0 &= 2 \times (t_1 - t_0) + t_2 - t_1 \\ &= 2 \times \frac{V}{\rho} + t_2 - t_1 \end{aligned}$$

Application numérique :

$$t_3 - t_0 = 2,25 \text{ s}$$

Q15 :

$$t_1 = \frac{V}{\rho} \cdot \frac{1}{\ddot{\psi}_0}$$

Application numérique :

$$t_1 = 0,43 \text{ s}$$

$$t_2 = t_2 - t_1 + t_1$$

Application numérique :

$$t_2 = 1,82 \text{ s}$$

D'après la question 20 :

$$t_3 = 2,25 \text{ s}$$

$$\psi(t_1) = \ddot{\psi}_0 \cdot \frac{(t_1 - t_0)^2}{2}$$

Application numérique :

$$\psi(t_1) = 0,094 \text{ rd} = 5,4^\circ$$

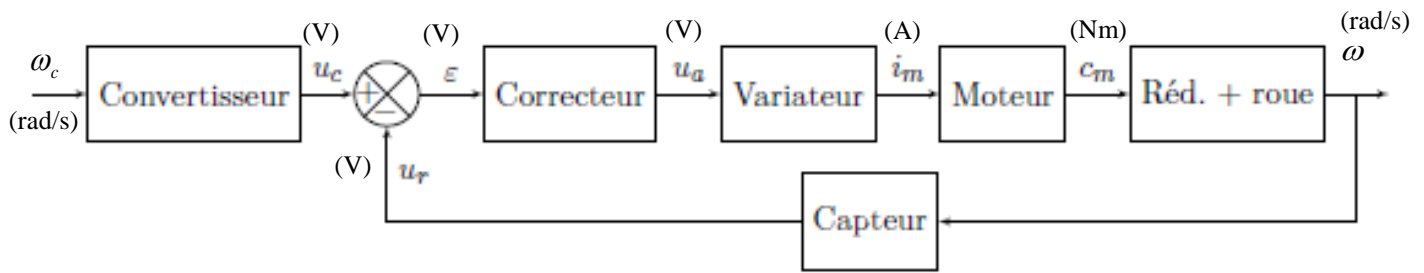
$$\begin{aligned} \psi(t_2) &= \psi(t_1) + \dot{\psi}_c \cdot (t_2 - t_1) \\ &= \psi(t_1) + \frac{V}{\rho} \cdot (t_2 - t_1) \end{aligned}$$

Application numérique :

$$\psi(t_2) = 0,69 \text{ rd} = 39,7^\circ$$

$t_3 < 3\text{s}$ , le cahier des charges est bien validé.

Q16 :



Q17 : La vitesse de rotation est asservie car la commande du moteur est générée par la différence entre la consigne de vitesse et la vitesse réelle mesurée. Il y a également la présence d'un correcteur dans la chaîne de commande. Un écart de vitesse de rotation des roues provoque un changement de trajectoire. Il est impératif de contrôler en permanence les vitesses des roues pour contrôler la trajectoire.

Q18 : La réponse indicielle donnée présente une asymptote horizontale en l'infini, pas de dépassement, une pente de tangente à l'origine non nulle : la courbe peut être modélisée comme étant la réponse d'un système du premier ordre.

$$\text{Gain statique : } Kr = \frac{\text{valeur asymptotique}}{\text{valeur de l'echelon d'entrée}} = \frac{3}{4} = 0.75 \text{ rad/Nms}$$

Constante de temps  $\tau_r$  : le temps de réponse vaut 1.85 s (valeur atteinte de  $0.95 \cdot 3 \approx 2.82$ ) et correspond à  $3 \cdot \tau_r$  pour un premier ordre d'où  $\tau_r = 0.62$  s

La fonction de transfert de l'ensemble mécanique s'écrit :  $H_r(p) = \frac{\Omega(p)}{c(p)} = \frac{Kr}{1 + \tau_r \cdot p}$

Q19 : Pour que le système soit correctement asservi il faut que lorsque la sortie a atteint la valeur de l'entrée, le système ne réagisse plus. Donc si  $\omega = \omega_c$  alors  $\varepsilon = 0$ . C'est le cas ici puisque  $\varepsilon(t) = u_c(t) - u_r(t) = K_c \omega_c - K_c \omega$

Q20 : Avec le formule de Black on obtient une fonction de transfert de l'ensemble complet d'ordre 1.

$$\frac{\Omega(p)}{\Omega_c(p)} = \frac{K}{1 + \tau \cdot p} \quad \text{avec } K = \frac{K_r K_m K_i K_p K_c}{1 + K_r K_m K_i K_p K_c} \quad \text{et } \tau = \frac{\tau_r}{1 + K_r K_m K_i K_p K_c}$$

Q21 : Le modèle étant un ordre 1, on constate que l'allure des 3 réponses indicielles correspond à celles d'un ordre 1.

Quand  $K_p$  augmente la valeur finale se rapproche de 1 : la précision s'améliore. Ceci est normal vu que le gain statique  $K$  tend vers 1 quand  $K_p$  augmente (en étudiant la limite).

Quand  $K_p$  augmente la réponse est plus rapide. Ceci est normal car la constante  $\tau$  de temps diminue quand  $K_p$  augmente.

Q22 : pour un filtre passe bas du 1<sup>er</sup> ordre, la bande passante  $]0; \omega_0]$  a une pulsation de coupure qui vaut  $1/\tau = \omega_0$ .  $\tau$  est la constante de temps. La rapidité dans le cas de la réponse indicielle est définie par le temps de réponse à 5% qui vaut trois fois la constante de temps.

$$\text{Q23 : } \frac{\Omega(p)}{\Omega_c(p)} = \frac{\frac{K_r K_m K_i K_p K_c}{1 + K_r K_m K_i K_p K_c}}{1 + \left( \frac{\tau_i + \tau_r}{1 + K_r K_m K_i K_p K_c} \right) p + \frac{\tau_i \tau_r}{1 + K_r K_m K_i K_p K_c} p^2}$$

$$\text{Gain statique : } \frac{K_r K_m K_i K_p K_c}{1 + K_r K_m K_i K_p K_c} \quad \text{pulsation propre : } \omega_0 = \sqrt{\frac{1 + K_r K_m K_i K_p K_c}{\tau_i \tau_r}}$$

$$\text{Coeff d'amortissement : } \xi = \frac{\tau_i + \tau_r}{2\sqrt{\tau_i \tau_r}} \frac{1}{\sqrt{1 + K_r K_m K_i K_p K_c}}$$

Q24 :

Tout d'abord, pour les trois configurations du gain, le système tend vers une constante pour une réponse à un échelon : le système est donc stable. Pour les autres performances (précision, rapidité, amortissement et sensibilité aux perturbations) les résultats sont dans le tableau ci-dessous. On mesure les performances sur la partie non perturbée (avant 1s).

	$K_p = 50$	$K_p = 200$	$K_p = 500$
$\varepsilon_s$ en $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$	0,28	0,09	0,04
$t_{5\%}$ en s	0,35	0,23	0,22
$D_{\%max}$	0	12%	30%
Sensibilité aux perturbations	oui (fortement)	oui	oui (faiblement)

On observe que le gain rend le système plus précis, plus rapide et moins sensible aux perturbations mais il tend à augmenter les dépassements.

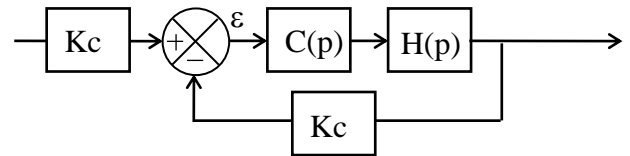
Cohérence :

Quand  $K_p$  augmente la valeur finale se rapproche de 1 : la précision s'améliore. Ceci est normal vu que le gain statique  $K$  tend vers 1 quand  $K_p$  augmente (en étudiant la limite).

Quand  $K_p$  augmente le coeff d'amortissement diminue. La réponse qui devient pseudo-oscillante présente un dépassement qui augmente.

Q25 : Ce correcteur présente une erreur statique nulle, un temps de réponse à 5% de 0,16 seconde, un dépassement inférieur à 5% et une sensibilité nulle aux perturbations. Il permet donc de valider le cahier des charges.

Q26 : on peut représenter le schéma sous la forme suivante :



$C(p)$  : correcteur

$H(p)$  : FT du 2 ieme ordre

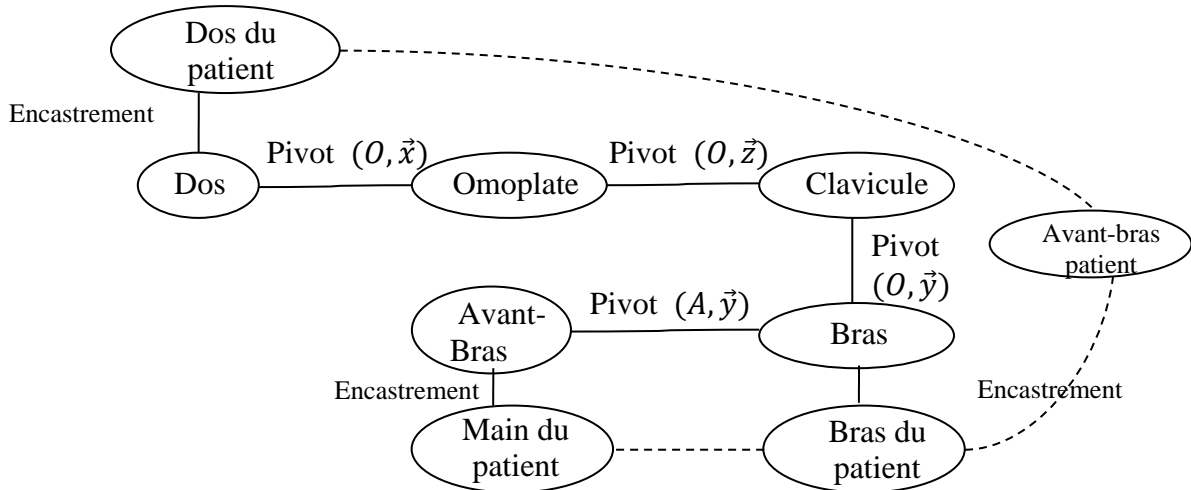
$$\varepsilon(p) = E(p) - S(p) = E(p) \left( 1 - \frac{C(p)H(p)K_c}{1 + C(p)H(p)K_c} \right) = \frac{E(p)}{1 + C(p)H(p)K_c} = \frac{e_0}{p(1 + C(p)H(p)K_c)}$$

$$\Rightarrow \varepsilon_s = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{e_0}{1 + C(p)H(p)K_c}$$

Au voisinage de 0,  $C(p)H(p)K_c \approx \frac{cste}{p}$ , donc  $\varepsilon_s = 0$

**Problème N°2 :**

**Q1 :**



**Q2 :** Chaque liaison autorise une rotation autour de l'axe respectivement,  $(O, \vec{x})$ ,  $(O, \vec{z})$  et  $(O, \vec{y})$ .

La liaison cinématiquement équivalente entre Dos et Bras est donc une liaison rotule ou sphérique de centre O.

**Q3 :** Les 2 axes perpendiculaires liés au croisillon sont  $\vec{z}_E$  et  $\vec{x}_S$

$$\vec{x}_S = \cos \theta_S \vec{x}^* - \sin \theta_S \vec{z}^* = \cos \theta_S (\cos \varphi \vec{x} + \sin \varphi \vec{y}) - \sin \theta_S \vec{z}$$

$$\vec{z}_E = \cos \theta_E \vec{z} + \sin \theta_E \vec{x}$$

$$\vec{z}_E \perp \vec{x}_S \text{ donc } \vec{z}_E \cdot \vec{x}_S = 0$$

$$\text{Soit } \sin \theta_E \cdot \cos \theta_S \cdot \cos \varphi - \cos \theta_E \cdot \sin \theta_S = 0$$

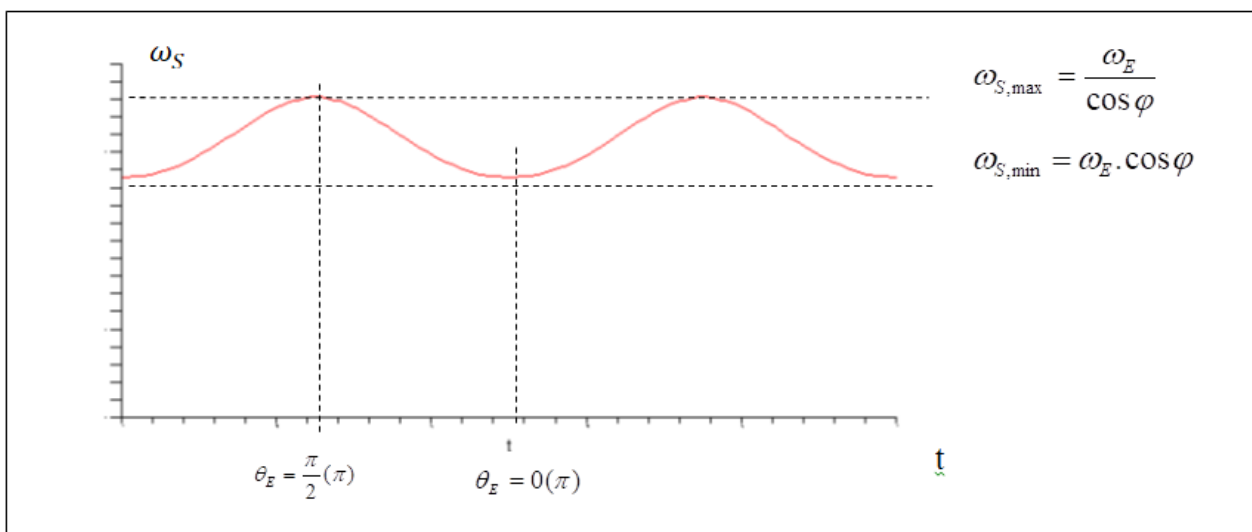
$$\text{La loi d'entrée-sortie géométrique est donc : } \boxed{\tan \theta_E \cdot \cos \varphi = \tan \theta_S}$$

**Q4 :** Par dérivation de la loi d'ES géométrique on trouve :

$$(1 + \tan^2 \theta_E) \cdot \omega_E \cdot \cos \varphi = (1 + \tan^2 \theta_S) \cdot \omega_S \text{ soit } \boxed{\omega_S = \frac{1 + \tan^2 \theta_E}{1 + \tan^2 \theta_E \cdot \cos^2 \varphi} \cdot \omega_E \cdot \cos \varphi}$$

$\omega_S$  est  $\pi$ -périodique et varie entre :

$$\omega_{S,\min} = \omega_E \cdot \cos \varphi \text{ atteinte en } \theta_E = 0(\pi) \text{ et } \omega_{S,\max} = \frac{\omega_E}{\cos \varphi} \text{ atteinte en } \theta_E = \frac{\pi}{2}(\pi)$$



$$\mathbf{Q5} : \omega_I = \frac{1 + \tan^2 \theta_M}{1 + \tan^2 \theta_M \cdot \cos^2 \varphi} \cdot \omega_M \cdot \cos \varphi = \frac{1 + \tan^2 \theta_I / \cos^2 \varphi}{1 + \tan^2 \theta_I} \cdot \omega_M \cdot \cos \varphi$$

et

$$\omega_I = \frac{1 + \tan^2 \theta_P}{1 + \tan^2 \theta_P \cdot \cos^2 \varphi} \cdot \omega_P \cdot \cos \varphi = \frac{1 + \tan^2 \theta_I / \cos^2 \varphi}{1 + \tan^2 \theta_I} \cdot \omega_P \cdot \cos \varphi$$

$$\text{Soit } \boxed{\omega_M = \omega_P}$$

Remarque : plus simplement,  $\tan \theta_M \cdot \cos \varphi = \tan \theta_I = \tan \theta_P \cdot \cos \varphi$  soit  $\theta_M = \theta_P$

L'association en série de 2 joints de cardan permet d'obtenir une transmission **homocinétique** : l'axe de sortie tourne à la même vitesse que l'axe moteur.

**Q6** : Le rapport des vitesses est le rapport inverse des nombres de dents :  $\frac{\omega_G}{\omega_P} = \frac{19}{57} = \frac{1}{3}$ . La grande roue tourne 3 fois moins vite que la petite et dans le même sens.

**Q7** : système vis/écrou : la vitesse de translation vaut le pas (déplacement pour un tour relatif (vis/écrou)) divisé par  $2\pi$  et multiplié par la vitesse de rotation de la vis /écrou. On donne le pas réduit en mm/rad ici.

$$\text{donc : } v_E = P \cdot \omega_G = \frac{P \cdot \omega_M}{3}$$

**Q8** : non glissement du câble sur les poulies. La loi «  $V = R\omega$  » s'applique d'où :  $R \cdot \omega_B = v_E$

**Q9** : au bilan .

$$\omega_B = \frac{v_E}{R} = \frac{P \cdot \omega_M}{3 \cdot R} = \frac{0.5}{3 \cdot 25} \omega_M \text{ donc : } \frac{1}{N} = \frac{\omega_B}{\omega_M} = \frac{0.5}{3 \cdot 25}$$

$$N = 150 \text{ (sans dimension)}$$

**Q10** : on peut procéder en transformant la partie droite du schéma bloc (déplacement de jonction pour appliquer Black). On peut également procéder par la mise en équation.

$$\theta_b = \frac{K_r}{I_b p^2} \left( \frac{1}{N} \theta_M - \theta_b \right) \quad \text{et} \quad \theta_M = \frac{1}{I_M p^2} \left( C_M - \frac{I_b p^2}{N} \theta_b \right)$$

Ce qui donne :

$$H(p) = \frac{\theta_b(p)}{C_M(p)} = \frac{NK_r}{(K_r(I_b + N^2 I_M) + I_b I_M N^2 p^2) p^2}$$