

Programme de colle - semaine 20 du 10/03/2025 au 16/03/2025

1 Développements limités

Bien insister sur les méthodes de base, commencer pour tout le monde par une recherche de DL simple contenant au minimum un produit ou une composition.

Pour les deux résultats principaux (marqués d'un $\emptyset$), la démonstration n'est pas à savoir. Pour le reste, toutes les démonstrations sont à savoir.

- Définition d'un DL_n en 0, unicité des coefficients. Troncature.
- DL de $x \mapsto \frac{1}{1 \pm x}$ (démonstration directe).
- DL obtenu par "primitivation" ($\emptyset$). DL de $x \mapsto \ln(1+x)$.
- Formule de Taylor-Young ($\emptyset$). DL de $\exp$, $\sin$, $\cos$, ch , sh , $x \mapsto (1+x)^\alpha$, $\arctan$ à un ordre quelconque. DL de $\tan$ à l'ordre 3 uniquement (démonstration).
- Opérations sur les DL : pas de résultat théorique. Le plus important reste la maîtrise des $o(\cdot)$ (notamment pour le produit ou la composition).
La règle générale est que si on veut le DL_n de fg ou $f \circ g$, on part de l'ordre n pour f et pour g (interdiction de partir à un ordre plus bas sauf si on peut expliquer pourquoi).
Pour la composition, ne pas oublier de s'assurer que $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$.
- Inverse / quotient de DL : pas de propriété à savoir, il faut juste composer le DL de $\frac{1}{1 \pm x}$.
- Utilisation des DL pour étude locale, recherche d'asymptote.
Conservation locale du signe : si $f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} g(x)$, alors f et g ont le même signe au voisinage de x_0 .
- Si f est de classe $\mathcal{C}^2$, $f'(x_0) = 0$ et $f''(x_0) > 0$, alors f a un minimum local en x_0 .

2 Exercices faits

1. CCINP exo 1 (ancien)

- a) On considère deux suites numériques (u_n) et (v_n) telles que (v_n) est non nulle à partir d'un certain rang et $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$.
Montrer que u_n et v_n sont de même signe à partir d'un certain rang.
- b) Déterminer le signe, au voisinage de l'infini, de $u_n = \operatorname{sh}\left(\frac{1}{n}\right) - \tan\left(\frac{1}{n}\right)$.

2. Recherche d'asymptote

On pourra changer la fonction

- a) Soit $f : x \mapsto (x+1) \exp\left(\frac{1}{x}\right)$, définie sur $\mathbb{R}^{*+}$.

Montrer qu'il existe des réels a, b, c tels que $f(x) = ax + b + \frac{c}{x} + o_{x \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{x}\right)$

On pourra se ramener en 0 en posant $y = \frac{1}{x}$

- b) En déduire que la courbe de f admet une asymptote en $+\infty$ et déterminer la position de la courbe par rapport à l'asymptote pour les grandes abscisses.

3. À titre indicatif : **manipulation des $o(\cdot)$** (pas refait récemment, mais à maîtriser absolument)

Au voisinage de 0, compléter si possible par $o(x^n)$ avec le plus grand $n \in \mathbb{N}$ possible et justifier :

$$o(x^2) + o(x^4) =$$

$$x^2 o(x^3) =$$

$$o(x^2) - o(x^2) =$$

$$o(x^2)o(x^3) =$$

$$x^2 + o(x^3) =$$

$$\frac{o(x^3)}{o(x^2)} =$$

$$\frac{o(x^3)}{x^2} =$$

$$\frac{x^3}{o(x^2)} =$$

$$o(x^2 + 3x) =$$