MPSI

Programme de colle - semaine 21 du 17/03/2025 au 16/03/2025

1 Algèbre linéaire, épisode 2

Il y a beaucoup de choses, alors on se concentrera sur les notions de base (trouver une base de noyau, d'image). On s'assurera que les notions vues à l'épisode 1 (SEV, famille de vecteurs) sont bien comprises.

- Application linéaire : définition, caractérisation par $f(u+\lambda v) = f(u) + \lambda f(v)$, propriétés élémentaires.
- Image, noyau. Ce sont des SEV. Plus généralement, l'image directe / réciproque d'un SEV est un SEV. Caractérisation de l'injectivité (déjà vue dans le cadre des morphismes de groupes, pas redémontrée ici).
- Application linéaire canoniquement associée à une matrice. Image, noyau d'une matrice. *(Pas encore d'exercice fait sur ces notions).*
- Somme de deux SEV. Définition. C'est un SEV. Somme directe, caractérisation avec l'intersection.
- SEV supplémentaires.
  Caractérisation avec des quantificateurs ou avec $F \cap G = \{\vec{0}\}$ et $E = F + G$.
  Projection p sur F parallèlement à G (lorsque $E = F \oplus G$).
  Un dessin est bienvenu pour illustrer les notions de SEV supplémentaires et de projection.
  p est linéaire, $\operatorname{Im} p = F$, $\operatorname{Ker} p = G$, $p \circ p = p$.
  Caractérisation des projections par $p \circ p = p$: si $p \in \mathcal{L}(E)$ et $p \circ p = p$, alors $E = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f$ et p est la projection sur $\operatorname{Im} f$ parallèlement à $\ker f$.
- Symétrie par rapport à F parallèlement à G. La caractérisation par $s \circ s = \operatorname{Id}_E$ a été vue (aucun exercice fait sur les symétries).
- Détermination d'une application linéaire (ne pas insister sur ces propriétés, seule la première est utile pour l'instant) :
  - Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $(u_1, \ldots, u_n)$ est génératrice de E, alors $\big(f(u_1), \ldots, f(u_n)\big)$ est génératrice de $\operatorname{Im} f$.
  - Soit $(u_1, \ldots, u_n)$ une base de E et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
    f est injective (resp. surjective, bijective) ssi $\big(f(u_1), \ldots, f(u_n)\big)$ et libre (resp. génératrice de E, une base de E).
  - Détermination sur une base : Soit $(u_1, \ldots, u_n)$ une base de E.
    Pour toute famille $(v_1, \ldots, v_n)$ d'éléments de F, il existe une unique $f \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $f(u_i) = v_i$.
  - Détermination sur une somme directe (n'a pas été démontré) : Soit E_1, E_2 deux SEV de E tels que $E = E_1 \oplus E_2$.
    Pour toutes $f_1 \in \mathcal{L}(E_1, F)$ et $f_2 \in \mathcal{L}(E_2, F)$, il existe une unique $f \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $f_{|E_1} = f_1$ et $f_{|E_2} = f_2$.
- **PAS VU** : dimension, rang, matrice d'application linéaire.

2 Fractions rationnelles

- Donner un exercice (simple) comportant une décomposition en éléments simples à tout le monde.
- L'important est avant tout la pratique donc on évitera les calculs inutilement compliqués ou les exercices abstraits. La construction de $\mathbb{K}(X)$ n'est pas exigible.
- Forme irréductible, degré, fonction rationnelle associée, racine (ou zéro), pôle, multiplicité. Partie entière.
- Existence et unicité d'une décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}$ (savoir énoncer la forme générale de la décomposition. La démonstration est hors-programme). Seul le calcul du coefficient d'un pôle simple est officiellement au programme.
  Astuce principale : multiplier puis évaluer.
  Nous avons vu quelques autres astuces : utilisation des limites, évaluation en un point, utilisation de la DES complexe pour trouver la DES réelle, parité).
- Savoir écrire la forme générale de la DES pour tout type de fraction (en laissant les coefficients indéterminés).
- Applications aux calculs de certaines primitives et sommes.
- Décomposition en éléments simples de $\dfrac{P'}{P}$ (aucun exercice fait).

3 Démonstrations possibles

Soit E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

a) L'image / le noyau sont des SEV.

b) Caractérisation de l'injectivité.

c) Pour F et G SEV de E, équivalence entre "la somme $F+G$ est directe" et $F \cap G = \{\vec{0}\}$.

d) Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ tel que $p \circ p = p$.
Montrer que $E = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Ker} p$ en faisant un raisonnement par analyse - synthèse.

e) Si $(u_1, \ldots, u_n)$ est génératrice de E et $f \in \mathcal{L}(E, F)$, alors $\big(f(u_1), \ldots, f(u_n)\big)$ est génératrice de $\operatorname{Im} f$

f) Soit $(u_1, \ldots, u_n)$ une famille libre de E et $f \in \mathcal{L}(E, F)$ injective.
Montrer que $\big(f(u_1), \ldots, f(u_n)\big)$ est libre.

4 Exercices

1. **CCINP exo 60**
   Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par : $f(M) = AM$.

   a) Déterminer une base de $\operatorname{Ker} f$.

   b) f est-il surjectif ?

   c) Déterminer une base de $\operatorname{Im} f$.

   d) (selon le temps) A-t-on $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$?

2. Autres possibilités

   a) Décrire le noyau / l'image d'une application linéaire donnée.

   b) Montrer que deux SEV sont supplémentaires, avec éventuellement la projection à expliciter.

   c) Une DES simple avec éventuellement une question annexe (calcul de primitive / somme).