

Programme de colle - semaine 22 du 24/03/2025 au 30/03/2025

1 Espaces vectoriels de dimension finie

Le principal objectif de cette colle est de faire comprendre l'importance de la dimension pour simplifier les raisonnements. Ainsi, la recherche de la dimension doit être un réflexe systématique.

On commencera par un exercice avec des objets simples ($\mathbb{R}^3$, petit polynôme ou petite matrice)

Les démonstrations non exigibles sont marquées d'un ($\emptyset$).

- Définition d'un EV de dimension finie.
 - ($\emptyset$) Existence d'une base dans un EV de dimension finie : théorèmes de la base intercalée, de la base incomplète, de la base extraite (théorèmes utilisés uniquement dans le cours et les exercices abstraits).
 - ($\emptyset$) Toute famille de $n + 1$ combinaisons linéaires des mêmes n vecteurs est liée.
- Invariance du cardinal d'une base.** Ce cardinal est appelé la dimension de l'espace vectoriel.
Par cohérence, on convient que la famille vide est une base de $\{\vec{0}\}$ et qu'il est de dimension 0.
- Dimension des espaces vectoriels usuels : $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}_n[X]$, $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$.
 La dimension des espaces vectoriels fonctionnels (solutions d'une équation différentielle, suite récurrente linéaire d'ordre 2) a été vue mais est à redémontrer au cas par cas.
- ($\emptyset$) Le cardinal d'une famille génératrice est $\geq$ à la dimension, et s'il y a égalité, c'est une base. De même avec libre et $\leq$.
- Rang d'une famille de vecteurs $(u_1, \dots, u_p)$. Il est $\leq p$ (égalité ssi la famille est libre). *Aucun exercice fait sur le rang. Aucune méthode pratique de recherche du rang n'a été vue, en particulier les opérations sur les lignes/colonnes.*
- Dimension d'un produit cartésien.
- ($\emptyset$) Si F est un SEV d'un EV E de dimension finie, alors F est de dimension finie et $\dim F \leq \dim E$.
 Dans ce cas, si $\dim F = \dim E$, alors $F = E$.
 Utilisation de la dimension pour montrer l'égalité de deux SEV.
- Tout SEV d'un EV de dimension finie admet un supplémentaire (démonstration : voir plus bas en exercice)
- Dimension de la somme de 2 SEV (formule de Grassmann) (démonstration : voir plus bas en exercice).
- $E = F \oplus G \iff \dim F + \dim G = \dim E$ et $F \cap G = \{\vec{0}\}$
- Base adaptée à une somme directe : soit $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_p)$ une base de F , $\mathcal{B}' = (v_1, \dots, v_r)$ une base de G .

$$E = F \oplus G \iff \mathcal{B}'' = (u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_r) \text{ est une base de } E$$

(démonstration : voir plus bas en exercice).

- Applications linéaires : si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ avec E et F de même dimension finie, alors f injective $\iff f$ surjective $\iff f$ bijective.
- E et F sont isomorphes $\iff \dim E = \dim F$.
- Rang d'une application linéaire. **Théorème du rang** (démonstration : voir plus bas en exercice).
- **PAS ENCORE VU** : Matrice d'application linéaire.

2 Exercices

Exercices qui peuvent servir de démonstration d'un résultat de cours (mais ne pas y passer trop de temps)

Dans tous les cas, E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie.

1. Pour démontrer la formule de Grassmann

Soit F et G deux SEV de E .

Soit $(u_1, \dots, u_p)$ une base de $F \cap G$.

- a) Montrer qu'on peut la compléter, d'une part en une base $(u_1, \dots, u_p, u_{p+1}, \dots, u_r)$ de F , et d'autre part en une base $(u_1, \dots, u_p, u_{r+1}, \dots, u_s)$ de G .
- b) Montrer que $(u_1, \dots, u_p, u_{p+1}, \dots, u_r, u_{r+1}, \dots, u_s)$ est une base de $F + G$.

2. *Pour démontrer l'existence d'un supplémentaire*

Soit F un SEV de E , $(u_1, \dots, u_p)$ une base de F .

- a) Montrer qu'on peut la compléter en une base $(u_1, \dots, u_p, u_{p+1}, \dots, u_n)$ de E .
- b) On pose $G = \text{Vect}(u_{p+1}, \dots, u_n)$. Montrer que $E = F \oplus G$.

3. *Pour démontrer le théorème du rang*

Soit F un $\mathbb{K}$ -EV et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

Soit G un SEV de E tel que $E = \text{Ker } f \oplus G$.

Montrer que l'application $\Phi: G \longrightarrow \text{Im } f$ est un isomorphisme.

$$u \longmapsto f(u)$$

4. *Base adaptée à une somme directe*

On reprend les notations de la première page.

- a) Montrer que $E = F + G \iff \mathcal{B}''$ est génératrice de E .
- b) Montrer que $F \cap G = \{\vec{0}\} \iff \mathcal{B}''$ est libre.