

Programme de colle - semaine 23 du 31/03/2025 au 06/04/2025

1 Espaces vectoriels

- Exercices sur le programme précédent, utilisant la dimension, le théorème du rang, etc.
- Matrice des coordonnées d'un vecteur dans une base. Matrice d'une famille de vecteurs dans une base. Matrice d'une application linéaire dans un couple de bases.
Donner à tout le monde une matrice d'application linéaire à chercher.
- Application linéaire canoniquement associée à une matrice. Sa matrice dans les bases canoniques. Noyau, image, rang d'une matrice. L'image d'une matrice est engendrée par les colonnes de la matrice. Théorème du rang (version matricielle).
- Lien entre les opérations matricielles et les opérations sur les applications linéaires :
Combinaison linéaire.
Produit matrice/vecteur \leftrightarrow image d'un vecteur par une application linéaire (*)
Produit matriciel \leftrightarrow composition.
Inversible \leftrightarrow bijectif, inverse \leftrightarrow réciproque.
- Projection, symétrie : matrice dans une base adaptée.
- **Pas vu : changement de base.**

2 Dénombrements

- Parmi les propriétés ci-dessous, les plus intuitives sont admises sans démonstration.
- Cardinal d'un ensemble fini. Deux ensembles finis sont de même cardinal s'il existe une bijection entre les deux. Cardinal d'une réunion de 2 ensembles, de n ensembles disjoints. *La formule du crible est hors-programme.*
- Produit cartésien, n -liste (n -uplet). Dénombrement des n -listes de E , de l'ensemble des applications de E dans F .
- p -liste d'éléments distincts d'un ensemble E . Dénombrement ("démonstration" pour $n = 2$).
Permutation d'un ensemble fini E , dénombrement.
- Combinaison/partie, dénombrement des p -combinaisons (*). Cardinal de $\mathcal{P}(E)$ (*).
Démonstration des formules du type $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ et $\binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1}$ à l'aide de raisonnements ensemblistes.
- Dans cette colle, aucune connaissance n'est exigible sur les probabilités. Les questions "trouver la probabilité de ..." se ramèneront toujours à diviser le nombre de cas favorables par le nombre de cas possibles.

3 Exercices

1. CCINP exo 71

Soit p la projection vectorielle de \mathbb{R}^3 , sur le plan P d'équation $x + y + z = 0$, parallèlement à la droite D d'équation $x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$.

- a) Vérifier que $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$.
- b) Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
Déterminer $p(u)$ et donner la matrice de p dans la base canonique de \mathbb{R}^3 .
- c) Déterminer une base de \mathbb{R}^3 dans laquelle la matrice de p est diagonale.

2. Problèmes d'anniversaire

On s'intéresse aux dates d'anniversaire des élèves d'une classe de n élèves.

- a) Modéliser la situation (définir un ensemble représentant toutes les possibilités).
- b) Questions possibles (déjà cherchées) : calculer la probabilités des événements suivants :
 - i) Personne n'est né un 3 du mois.
 - ii) Au moins une personne est née un 30 du mois.
 - iii) Toutes les dates d'anniversaires sont différentes.

3. On distribue au hasard une main de 8 cartes d'un jeu de 32.

- a) Modéliser l'épreuve (définir un ensemble qui modélise l'ensemble des situations possibles). Combien y a-t-il de mains possibles ?
- b) Questions déjà cherchées : calculer la probabilités des événements suivants :
 - i) N'avoir que des cartes noires (piques, trèfles).
 - ii) Avoir les 4 as ou les 2 rois rouges.