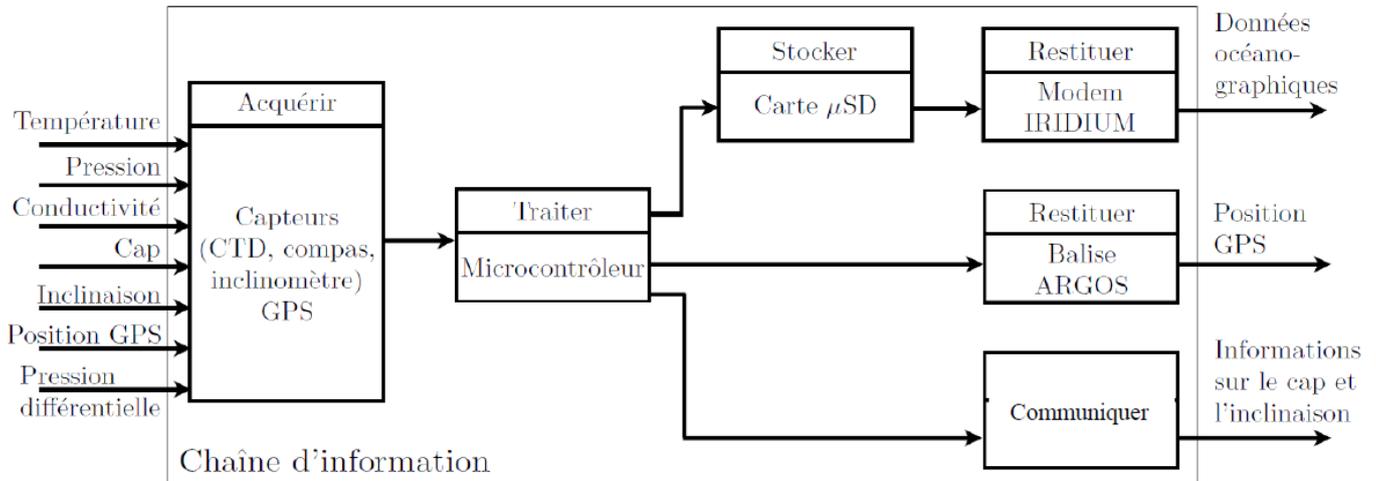


Problème N°1 : Hydroplaneur

Q1 et Q2 :



Q3 : Lors de la phase de plongée, les réservoirs sont remplis d'huile. Lors de la phase de remontée, ce sont les ballasts.

Q4 : Le cahier des charges impose un minimum de 500 cycles en autonomie et une durée de cycle maximale de 11h. On a donc une autonomie recherchée de 5500 heures.

Q5. Sur un cycle, on calcule une dépense énergétique $E_d = \frac{199+7000+9100}{3600} + \frac{72}{30} = 6.93 \text{ W.h}$

Q6. On calcule tout d'abord l'énergie stockée dans une cellule en relevant les informations dans le bdd :

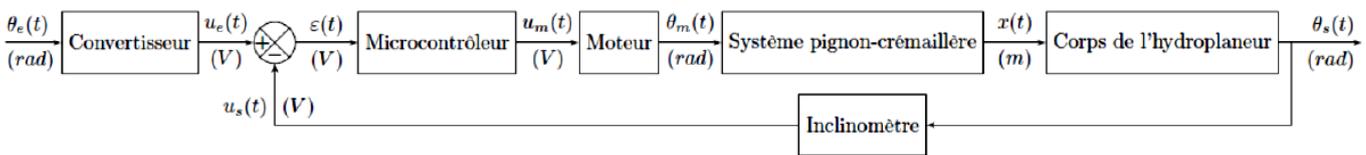
$$E_c = 20 * 3,9 = 78\text{W.h}$$

En multipliant celle-ci par le nombre de cellules, on obtient une énergie disponible de : $52 * E_c = 4056\text{W.h}$

Cela permet d'effectuer : $\frac{52 \cdot E_c}{E_d} = 585 \text{ cycles}$

Le cahier des charges stipule un nombre minimum de 500 cycles ; il est donc respecté.

Q7. A partir du texte descriptif, on construit le schéma-blocs fonctionnel suivant :



Q8. On peut parler de système asservi car il existe une boucle de retour (munie d'un capteur) et un écart est généré.

Q9. $C_m(p) = J_{eq} \cdot p \cdot \Omega_m(p)$ (1) $U_m(p) = E(p) + R \cdot I(p)$ (2) $C_m(p) = k_c \cdot I(p)$ (3) $E(p) = k_e \cdot \Omega_m(p)$

Q10. $U_m(p) = k_e \cdot \Omega_m(p) + R \cdot \frac{J_{eq}}{k_c} \cdot p \cdot \Omega_m(p)$ d'où $H_m(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U_m(p)} = \frac{1}{k_e + R \cdot \frac{J_{eq}}{k_c} \cdot p}$

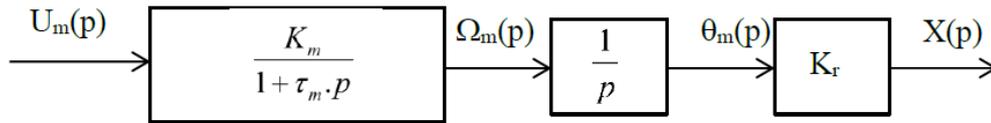
$$Q11. H_m(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U_m(p)} = \frac{\frac{1}{k_e}}{1 + R \cdot \frac{J_{eq}}{k_c \cdot k_e} \cdot p} = \frac{K_m}{1 + \tau_m \cdot p} \quad \text{d'où : } K_m = \frac{1}{k_e} = 47.6 \text{ rad.s}^{-1} \cdot \text{V}^{-1} \text{ et}$$

$$\tau_m = \frac{RJ_{eq}}{k_c \cdot k_e} = 2.49 \text{ s}$$

Q12 : La vitesse angulaire est la dérivée de la position angulaire : $\omega_m(t) = \frac{d}{dt} \theta_m(t)$ d'où $\Omega_m(p) = p \cdot \theta_m(p)$

On en déduit : $\frac{\theta_m(p)}{\Omega_m(p)} = \frac{1}{p}$. C'est une intégration.

Q13.

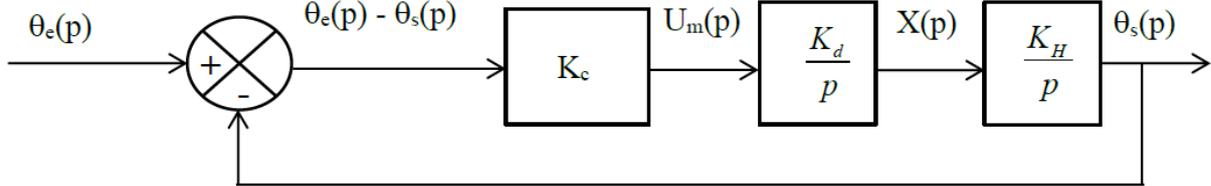


$$\text{On en déduit : } \frac{X(p)}{U_m(p)} = \frac{K_m \cdot K_r}{1 + \tau_m \cdot p} \cdot \frac{1}{p}$$

Q14. $K_H = 3 \text{ rad.s}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$. Pente de la droite.

$$Q15. pX(p) = K_d \cdot U_m(p) \quad p\theta_s(p) = K_H \cdot X(p) \quad U_m(p) = K_c \cdot (\theta_e(p) - \theta_s(p))$$

Q16.



$$Q17. H(p) = \frac{\theta_s(p)}{\theta_e(p)} = \frac{K_c \cdot K_d \cdot K_H}{p^2 + K_c \cdot K_d \cdot K_H} = \frac{1}{\frac{p^2}{K_c \cdot K_d \cdot K_H} + 1} \quad \text{ordre : 2} \quad \text{classe : 0} \quad \text{gain statique : 1}$$

$$Q18. \text{Consigne en dirac : } \theta_e(p) = 1 \text{ d'où } \theta_s(p) = H(p) \cdot \theta_e(p) = \frac{K_c \cdot K_d \cdot K_H}{p^2 + K_c \cdot K_d \cdot K_H} = \sqrt{K_c \cdot K_d \cdot K_H} \cdot \frac{\sqrt{K_c \cdot K_d \cdot K_H}}{p^2 + K_c \cdot K_d \cdot K_H}$$

Par transformée de Laplace inverse : $\theta_s(t) = \sqrt{K_c \cdot K_d \cdot K_H} \cdot \sin((\sqrt{K_c \cdot K_d \cdot K_H}) \cdot t) u(t)$

Sinusoïde d'amplitude $\sqrt{K_c \cdot K_d \cdot K_H}$ et de période $\frac{2\pi}{\sqrt{K_c \cdot K_d \cdot K_H}}$.

Q19. La solution est inconditionnellement instable (sauf à prendre $K_c = 0$ mais le système ne serait plus alimenté...).

$$Q20. K_I = 3/18 = 1/6 \text{ V/deg} = 1/6 * (180/\pi) = 9.55 \text{ V/rad}$$

Q21. sur le schéma : $\varepsilon = K_I (\theta_e(t) - \theta_s(t))$. L'écart est une image proportionnelle à la différence d'angles entre l'entrée et la sortie. Si cette différence est nulle, ε est nul.

$$Q22. \text{FT de la boucle interne : } \frac{\frac{K_m \cdot K_2}{p}}{1 + \frac{K_m \cdot K_2}{p}} = \frac{K_m \cdot K_2}{p + K_m \cdot K_2}$$

$$Q23. H(p) = \frac{\theta_s(p)}{\theta_e(p)} = K_I \frac{K_1 \cdot \frac{K_H}{p} \cdot \frac{K_m \cdot K_2}{p + K_m \cdot K_2} \cdot r \cdot K_r}{1 + K_1 \cdot \frac{K_H}{p} \cdot \frac{K_m \cdot K_2}{p + K_m \cdot K_2} \cdot r \cdot K_r \cdot K_I} = \frac{K_I \cdot K_1 \cdot K_2 \cdot K_m \cdot K_H \cdot K_r \cdot r}{p^2 + K_m \cdot K_2 \cdot p + K_I \cdot K_1 \cdot K_2 \cdot K_m \cdot K_H \cdot K_r \cdot r}$$

Sous forme canonique : $H(p) = \frac{\theta_s(p)}{\theta_e(p)} = \frac{1}{\frac{1}{K_I \cdot K_1 \cdot K_2 \cdot K_m \cdot K_H \cdot K_r \cdot r} p^2 + \frac{1}{K_I \cdot K_1 \cdot K_H \cdot K_r \cdot r} p + 1}$

Ordre : 2 classe : 0 gain statique : 1

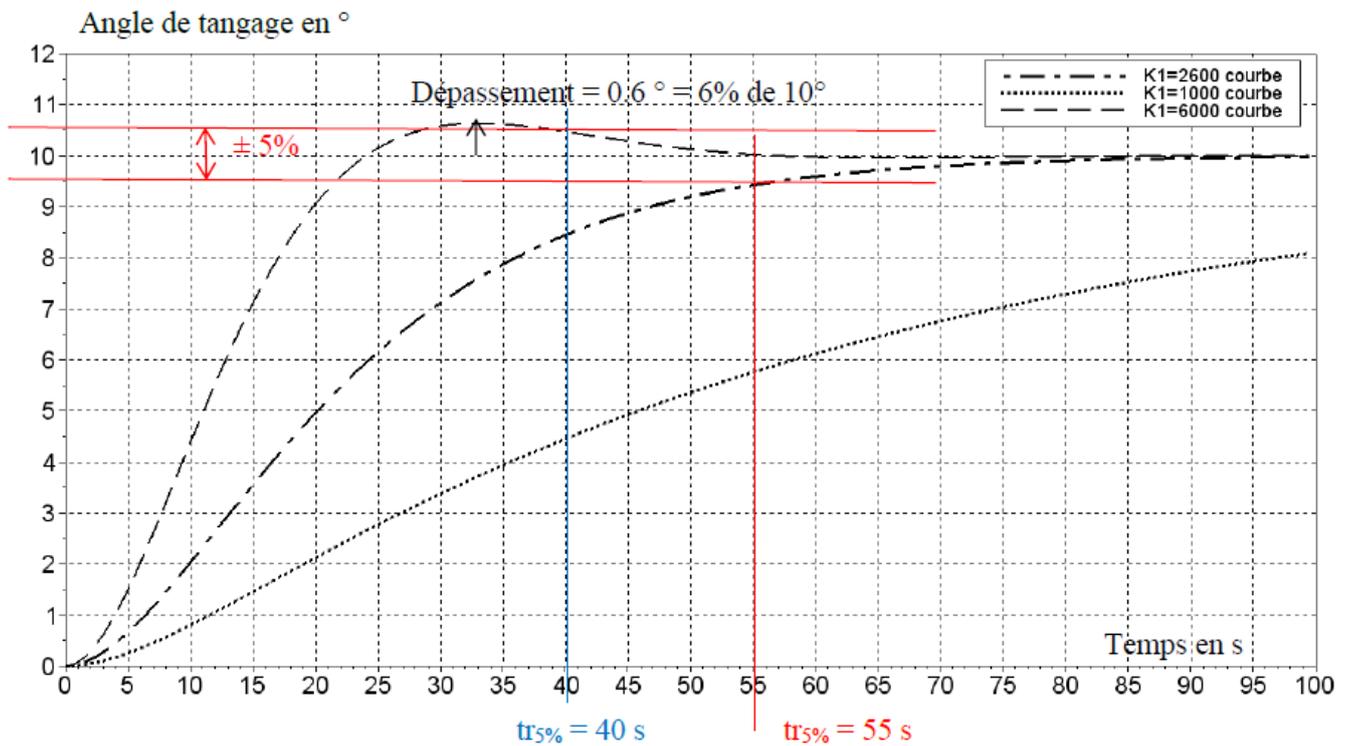
Q24. Le système est précis : l'écart ε en régime permanent vaut 0 pour les 3 valeurs de K_1 car Gain statique = 1

Le temps de réponse : les 3 valeurs de K_1 sont acceptables ($< 70s$)

- pour $K_1 = 1000$: pas mesurable $> 100s$
- pour $K_1 = 2600$: $tr_{5\%} = 55$ s
- pour $K_1 = 6000$: $tr_{5\%} = 40$ s

La stabilité : pour $K_1 = 6000$ on a dépassement de la valeur asymptotique $(0.6/10) \cdot 100 = 6\%$ ce que n'autorise pas le cahier des charges.

La valeur à choisir est donc $K_1 = 2600$



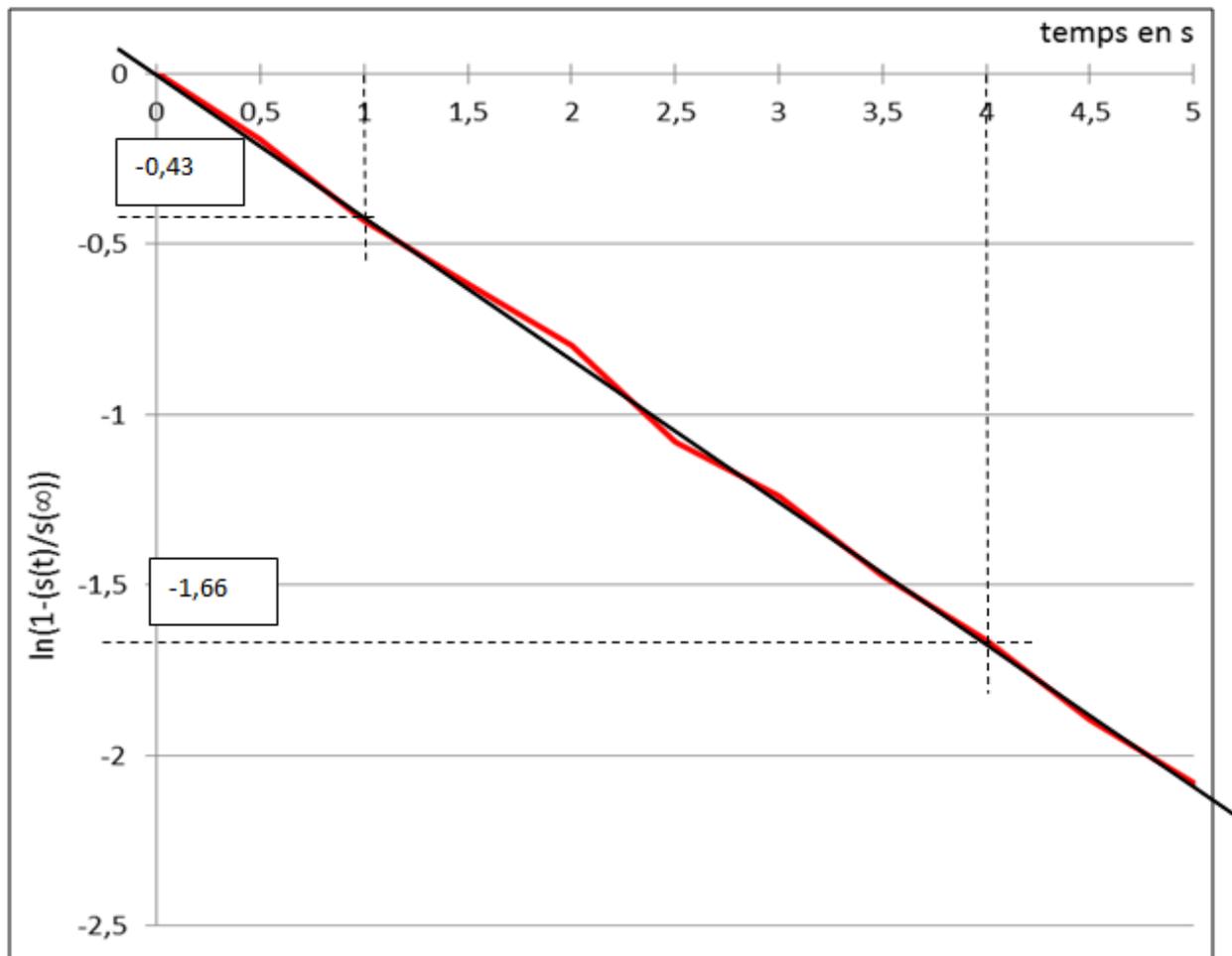
Problème N°2: Etude de la mise en température d'un procédé de chauffe

$$\text{Q1 : } E(p) = \frac{1}{p} \Rightarrow S(p) = \frac{K}{1+\tau p} \cdot \frac{1}{p}$$

$$S(p) = \frac{A}{p} + \frac{B}{1+\tau p} = \frac{K}{p} - \frac{\tau K}{1+\tau p} = K \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p + \frac{1}{\tau}} \right) \xrightarrow{L^{-1}} \underline{s(t)} = K (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) u(t)$$

$$\text{Q2 : } \ln \left(1 - \frac{s(t)}{s(\infty)} \right) = \ln \left(1 - \frac{K(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})}{K} \right) = \ln \left(1 - 1 + e^{-\frac{t}{\tau}} \right) = -\frac{t}{\tau}$$

Q3 : on détermine graphiquement la pente de la droite de régression : elle vaut $-1/\tau = (-1.66+0.43)/(4-1) = -0.41$
D'où $\tau = 2.4$ s



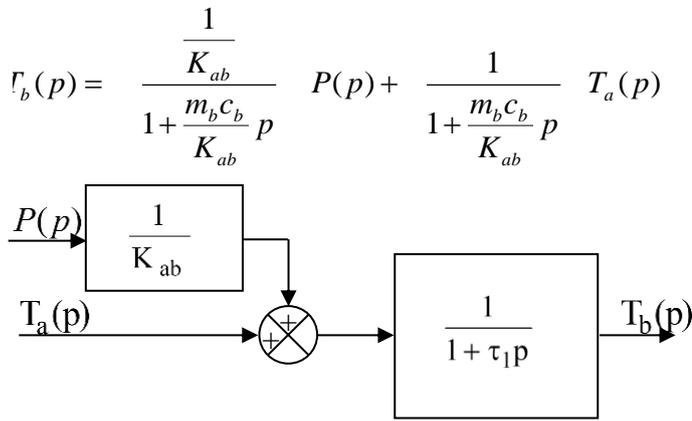
Q4 :

$$\textcircled{1} : m_b c_b p T_b(p) + K_{ab} [T_b(p) - T_a(p)] = P(p)$$

$$\textcircled{2} : m_a c_a p T_a(p) + K_{ae} [T_a(p) - T_e(p)] = K_{ab} [T_b(p) - T_a(p)]$$

$$\textcircled{3} : m_e c_e p T_e(p) + K_{ae} [T_e(p) - T_{ext}(p)] = K_{ae} [T_a(p) - T_e(p)]$$

Q5 :



$H_1(p)$: système du 1^{er} ordre

- Gain $K_1 = 1$
- Constante de temps $\tau_1 = \frac{m_b c_b}{K_{ab}}$

$$\tau_1 = \frac{200 \cdot 500}{40} = 2500s \approx 40 \text{ min}$$

Q6 :

$$\Gamma_a(p) = \frac{\frac{K_{ae}}{K_{ae} + K_{ab}}}{1 + \frac{m_a c_a}{K_{ae} + K_{ab}} p} T_e(p) + \frac{\frac{K_{ab}}{K_{ae} + K_{ab}}}{1 + \frac{m_a c_a}{K_{ae} + K_{ab}} p} T_b(p)$$

$H_3(p)$: système du 1^{er} ordre

Gain $K_3 = \frac{K_{ae}}{K_{ae} + K_{ab}}$

Constante de temps

$$\tau_3 = \frac{m_a c_a}{K_{ae} + K_{ab}} = \frac{2 \cdot 700}{400 + 40} \approx 3s$$

$$\tau_3 = 3s$$

$H_4(p)$: système du 1^{er} ordre

Gain $K_4 = \frac{K_{ab}}{K_{ae} + K_{ab}}$

Constante de temps idem $H_3(p)$

$$\tau_3 = 3s$$

Q7 :

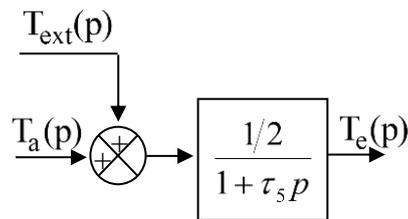
$$\Gamma_e(p) = \frac{1/2}{1 + \frac{m_e c_e}{2K_{ae}} p} [T_{ext}(p) + T_a(p)]$$

système du 1^{er} ordre

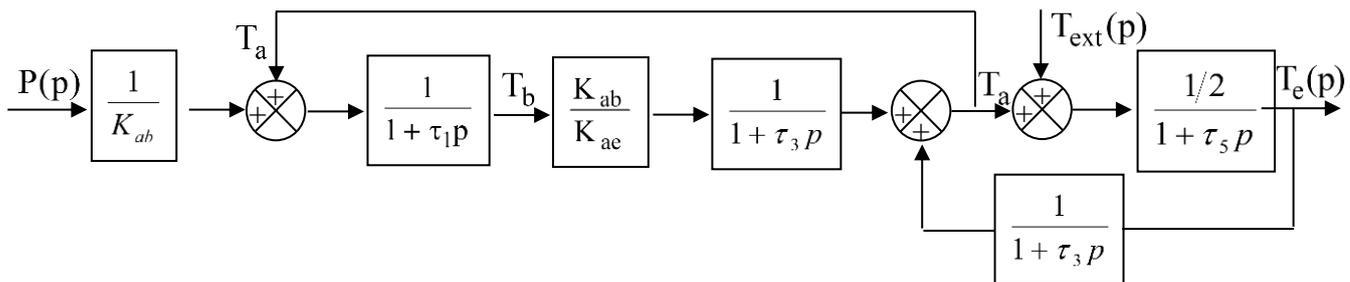
Gain $\frac{1}{2}$

Constante de temps $\tau_5 = \frac{m_e c_e}{2K_{ae}} = \frac{50 \cdot 4000}{2 \cdot 400} = 250s$

Schéma bloc :

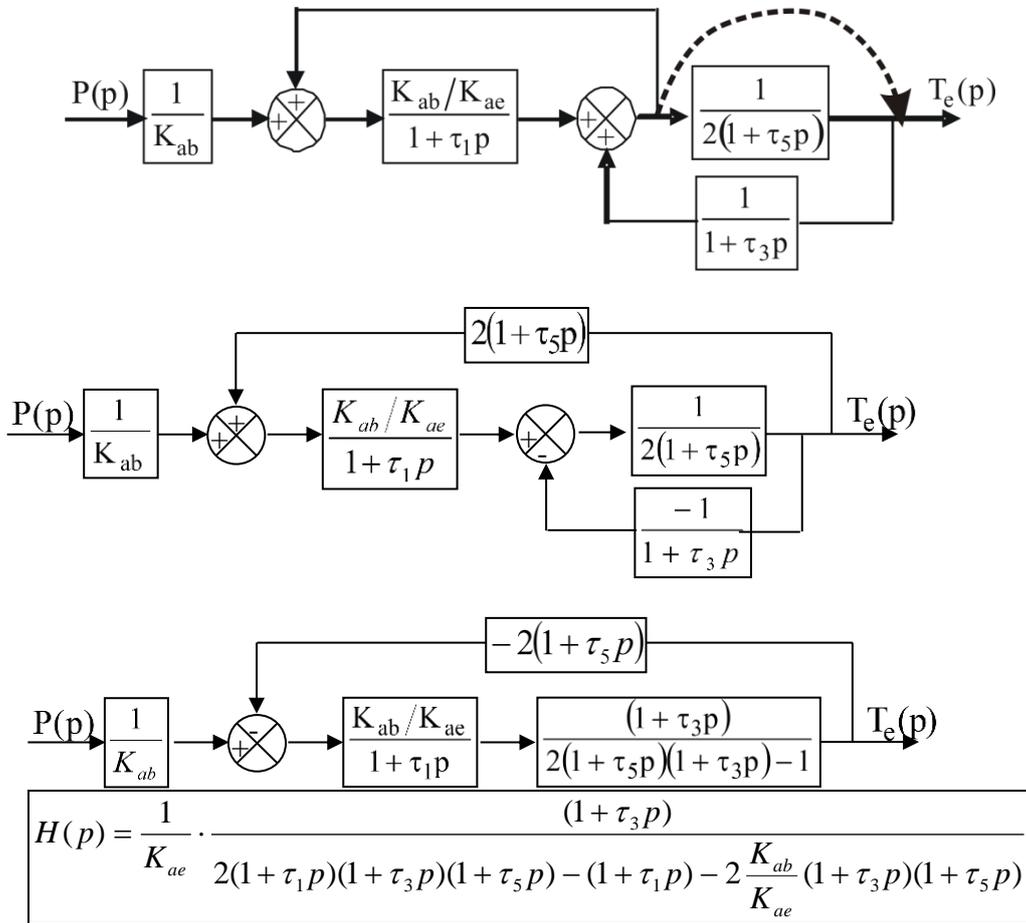


Q8 :



Q9 :

Par manipulation du schéma-bloc :



Q10 :

Entrée échelon de puissance $P(p) = \frac{P_0}{p}$ d'où $T_e(p) = \frac{P_0}{p} \cdot \frac{1}{400(1 + 2500p)(1 + 500p)}$

D'après le théorème de la valeur initiale :

$$\theta_e(0) = \lim_{p \rightarrow \infty} p T_e(p) = 0 \text{ } ^\circ\text{C} ;$$

$$\theta'_e(0) = \lim_{p \rightarrow \infty} p^2 T_e(p) = 0 \text{ } ^\circ\text{C/s}$$

D'après le théorème de la valeur finale :

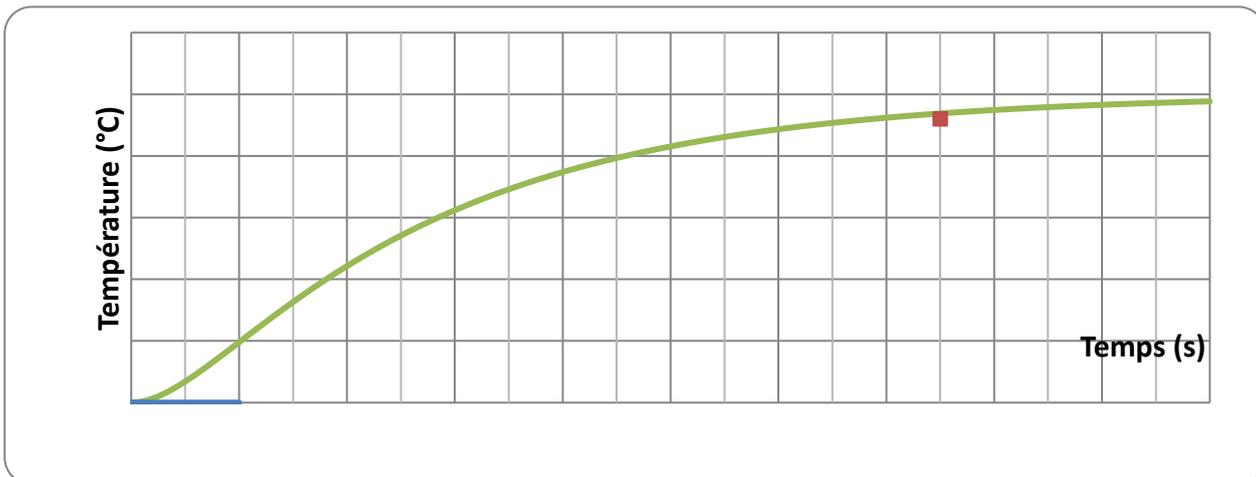
$$\theta_e(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} p T_e(p) = \frac{10^4}{400} = 25 \text{ } ^\circ\text{C} ;$$

$$\theta'_e(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} p^2 T_e(p) = 0 \text{ } ^\circ\text{C/s}$$
 asymptote horizontale

valeur initiale nulle, tangente horizontale à l'origine, valeur en régime permanent $\frac{10^4}{400} = 25 \text{ } ^\circ\text{C}$.

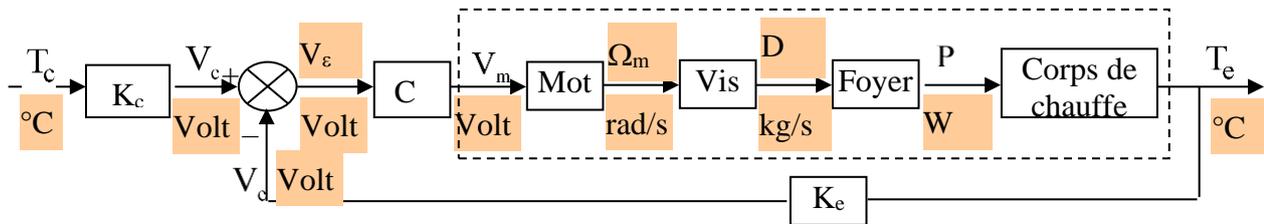
Q11 :

On connaît la valeur et la pente à l'origine, l'asymptote en régime permanent est horizontale à $25 \text{ } ^\circ\text{C}$, C'est la réponse indicielle d'un second ordre en régime amorti.



Q12 : les constantes de temps qui apparaissent dans la fonction de transfert du corps de chauffe sont beaucoup plus grandes que la constante de temps du capteur. On a vu que le temps de réponse pour un 1^{er} ordre vaut 3 fois la constante de temps. Ce qui signifie que la réactivité du capteur est beaucoup plus grande que celle du corps de chauffe. On peut donc la négliger (cette hypothèse est très générale dans la modélisation des systèmes bouclés). La fonction de transfert du capteur se limite donc à son gain statique. Ici K_c . Remarque : dans la première partie on étudie le capteur avec un module de conversion pour l'affichage de la température mesurée. Ce module est étalonné pour que la température affichée soit la température réelle. Ce n'est plus le cas ici. Le module de conversion pour l'affichage est retiré.

Q13 :



Réponse Q14 :
$$H_G(p) = \frac{T_e(p)}{T_c(p)} = K_c \frac{C H_{MC}(p)}{1 + C H_{MC}(p) K_e} = K_c \frac{\frac{C K_{MC}}{(1 + \tau_A p)(1 + \tau_B p)}}{1 + \frac{C K_{MC} K_e}{(1 + \tau_A p)(1 + \tau_B p)}}$$

$$H_G(p) = \frac{\frac{C K_{MC} K_c}{1 + C K_{MC} K_e}}{1 + \frac{\tau_A + \tau_B}{1 + C K_{MC} K_e} p + \frac{\tau_A \tau_B}{1 + C K_{MC} K_e} p^2}$$

Q15 : Pour une entrée de type échelon $\theta_c(t) = \theta_{c0}$, $T_c(p) = \frac{\theta_{c0}}{p}$:

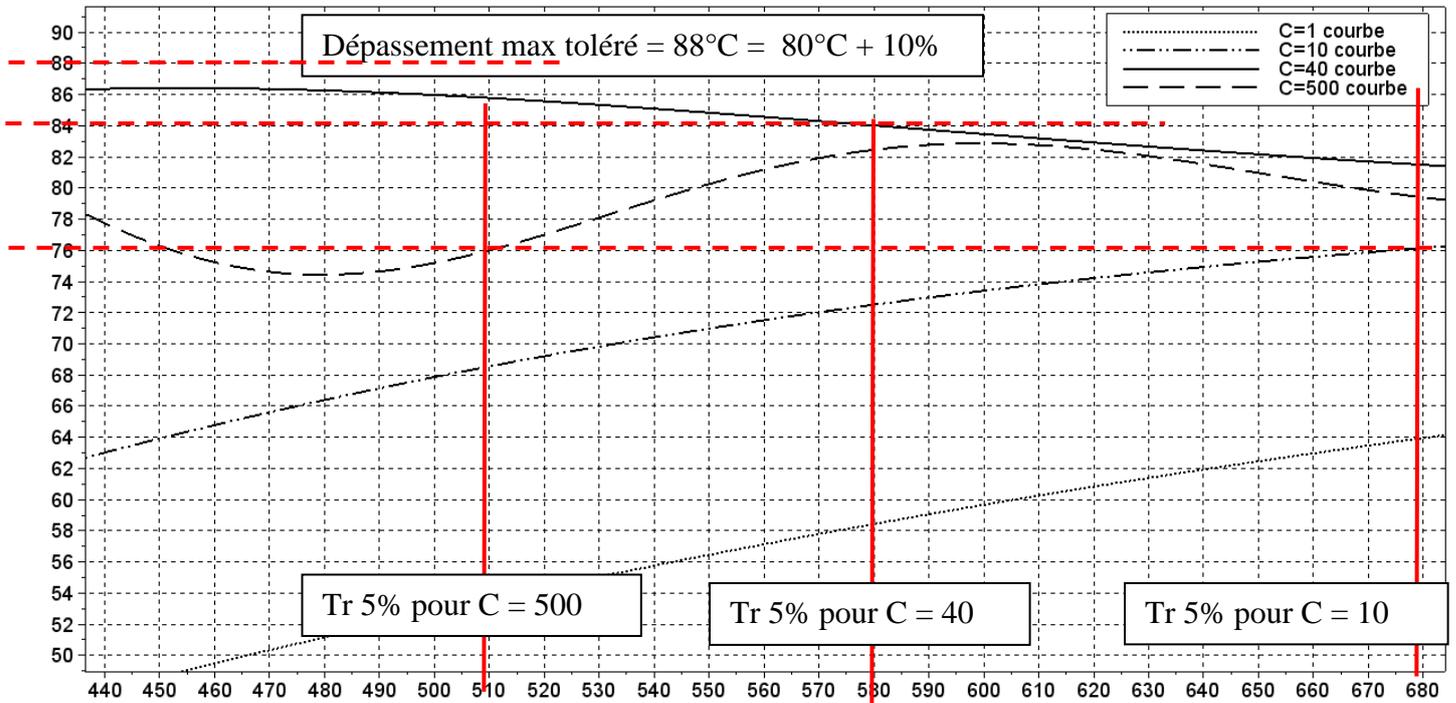
$$\lim_{t \rightarrow \infty} \theta_e(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p T_e(p) = \frac{C K_{MC} K_c}{1 + C K_{MC} K_e} \theta_{c0}$$

Q16 :
$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\theta_{c0} - \theta_e(t)) = \theta_{c0} \left(1 - \frac{C K_{MC} K_c}{1 + C K_{MC} K_e} \right)$$

Q17 : pour avoir un écart statique nul, il faut : $\frac{C K_{MC} K_c}{1 + C K_{MC} K_e} = 1$ D'où :
$$K_c = \frac{1 + C K_{MC} K_e}{C K_{MC}}$$

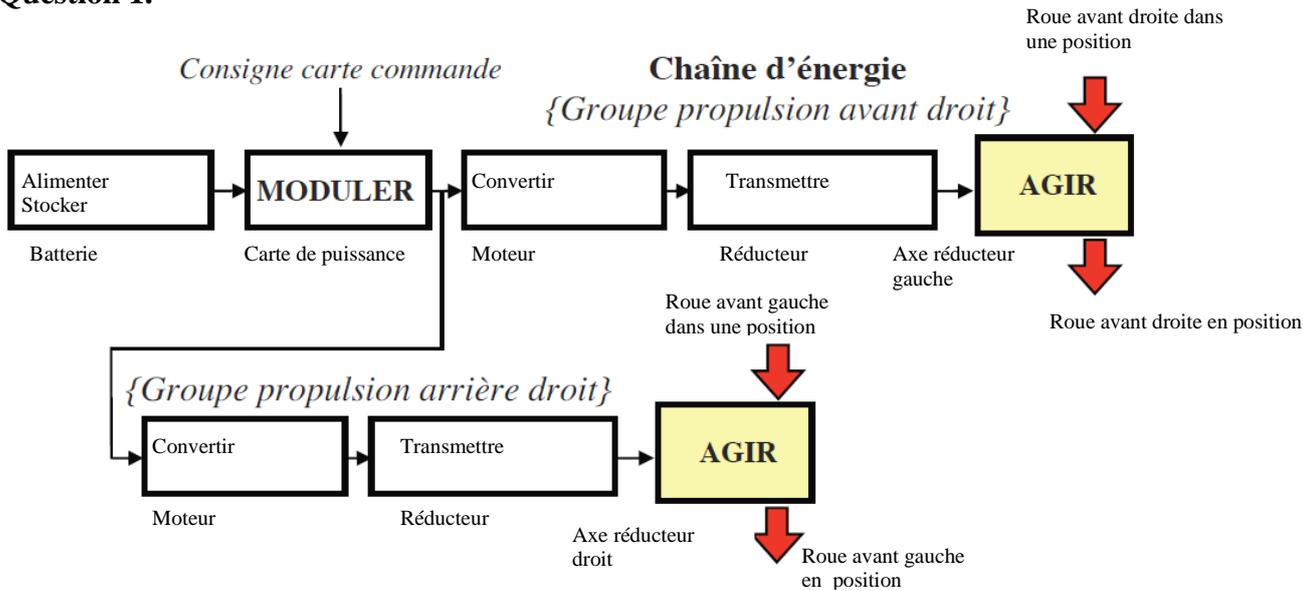
Q18 : bilan des performances

Le système est précis : l'écart en régime permanent vaut 0 pour les 4 valeurs de C grâce à K_c . On retrouve sur le schéma le résultat de la question 13...
 Le temps de réponse : on élimine C = 1 et 10. pour C = 500 : $tr_{5\%} = 510$ s, pour C = 40 : $tr_{5\%} = 580$ s, pour C = 1 : $tr_{5\%} > 900$ s, pour C = 10 : $tr_{5\%} = 680$ s
 La stabilité : pour C = 500 on a dépassement de la valeur asymptotique (120-80 = 50% de 80°C > 10% de 80°C) ce que n'autorise pas le cahier des charges.
 La valeur à choisir est donc C = 40



Problème N°3 : robot de maraîchage

Question 1.



Question 2.

Valeur de l'échelon : 15V

Valeur de ω_g en régime permanent : 98 rad.s⁻¹

On en déduit :

$$K_g = \frac{98}{15} = 6,5 \text{ rad.s}^1.V^{-1}$$

Constante de temps : 0.3s car temps de réponse à 5% $\approx 0.9s \approx 3\tau$

D'où :

$$H_g(p) = \frac{\Omega_g(p)}{U_g(p)} = \frac{6,5}{1 + 0,3p}$$

Même chose pour $H_d(p)$

On peut en déduire :

$$H_1(p) = \frac{\Omega_d(p) - \Omega_g(p)}{U_d(p) - U_g(p)} = \frac{\frac{6,5}{1+0,3p}U_d(p) - \frac{6,5}{1+0,3p}U_g(p)}{U_d(p) - U_g(p)}$$

$$H_1(p) = \frac{6,5}{1+0,3p}$$

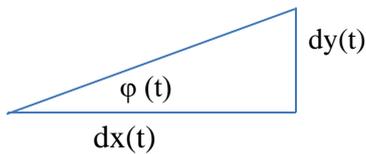
Question 3.

À partir de la question précédente, on peut écrire : $\omega_d = \frac{V + e\dot{\varphi}}{r}$ et $\omega_g = \frac{V - e\dot{\varphi}}{r}$

On en déduit : $\Delta\omega = \omega_d - \omega_g = \frac{V + e\dot{\varphi}}{r} - \frac{V - e\dot{\varphi}}{r}$ $\Delta\omega = \frac{2e}{r}\dot{\varphi} = \frac{2e}{r} \frac{d\varphi}{dt}$

$$H_{21}(p) = \frac{\Phi(p)}{\Delta\Omega(p)} = \frac{r}{2ep} \quad (\text{Condition initiale nulle})$$

Question 4.



$\tan \varphi(t) = \frac{dy(t)}{dx(t)}$ si φ est petit $\tan \varphi(t) = \varphi(t)$ d'où $\varphi(t) = \frac{dy(t)}{dx(t)} = \frac{dy(t)}{dt} \cdot \frac{dt}{dx(t)}$

$$\frac{dy(t)}{dt} = \varphi(t) \frac{dx(t)}{dt} \quad \dot{y}(t) = \varphi(t)\dot{x}(t) = \varphi(t)V$$

Question 5.

D'après la question précédente : $H_{22}(p) = \frac{Y(p)}{\Phi(p)} = \frac{V}{p}$ (condition initiale nulle)

On en déduit :

$$H_2(p) = H_{21}(p)H_{22}(p) = \frac{r}{2ep} \frac{V}{p} = \frac{rV}{2ep^2}$$

Question 6.

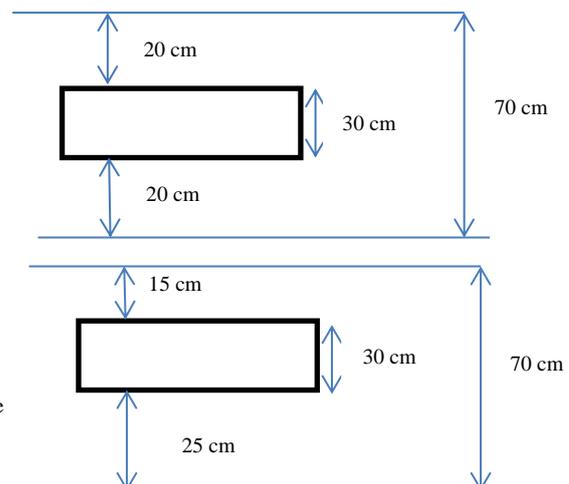
Si le robot est centré

D'après la courbe de la figure 10, on en déduit

$$U_{\text{cap-0}} = 1,3V$$

Si le robot est décalé vers la gauche de 5 cm ($y(t)$ positif par rapport à la ligne moyenne)

D'après la courbe de la figure 10, $U_{\text{cap-droit}} = 1.1V$ et $U_{\text{cap-gauche}} = 1.6V$



Question 7.

Autour de ce point de fonctionnement $K_c = \frac{(1.6-1.1)}{0.05} = 10 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$

Question 8.

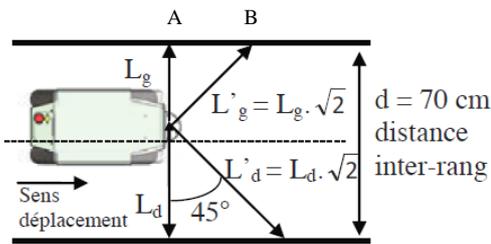
L'utilisation des 2 capteurs à 45° va permettre d'introduire un temps d'avance pour la prise en compte de décalage du robot. Il est ainsi possible de voir à l'avance dans quelle direction le robot se dirige et ainsi de pouvoir corriger la trajectoire au plus tôt.

Question 9.

La distance entre les points A et B vaut L_g . On obtient donc un temps d'avance de $t_g = \frac{L_g}{V}$

De la même manière $t_d = \frac{L_d}{V}$

Si on considère que le robot est centré : $t_g = t_d = \frac{35 \cdot 10^{-2}}{0.2} = 1.75 \text{ s}$

**Question 10.**

Le système est stable pour $K_{cor} = 0.05$ et 0.2

Il est précis (écart nul en régime permanent entre entrée et sortie) pour les mêmes valeurs de K_{cor}

Les temps de réponse à 5% sont de 4.7 s pour $K_{cor} = 0.2$ et 14 s pour $K_{cor} = 0.05$

On choisit la valeur 0.2 pour K_{cor} .

l'Id 111 est respectée. Notre étude montre que le système peut être rendu instable par un mauvais choix de gain de correcteur (cela vient de la double intégration en chaîne directe).

Problème N°4: Stabilisateur gyroscopique de bateau

Q1 :

Repère	Constituants du schéma-blocs
1	contrôleur électronique
2	servo-distributeur
3	vérins

Repère	Constituants du schéma-blocs
4	structure articulée
5	dynamique du bateau
6	centrale inertielle

Q2 :

Lorsque $\beta \rightarrow 0$, on a à l'ordre 1 : $\sin \beta \rightarrow \beta$ et $\cos \beta \rightarrow 1$, d'où :

$$A_3 \ddot{\beta} + (A_3 - C_3) \dot{\alpha}^2 \beta - C_3 \dot{\gamma} \dot{\alpha} = C_h(t)$$

De plus, $\dot{\gamma} = \omega_m \gg \dot{\alpha}$ (approximation gyroscopique) donc on néglige le terme en $\dot{\alpha}^2 \beta$ devant celui en $\dot{\gamma} \dot{\alpha}$.

D'où : $A_3 \ddot{\beta} = C_h(t) + C_3 \omega_m \dot{\alpha}$. On identifie $I_g = A_3$

Q3 :

Dans les conditions de Heaviside, on a :

$$(eq1) \Rightarrow I_g p^2 \beta(p) = C_h(p) + C_3 \omega_m p \alpha(p)$$

$$(eq2) \Rightarrow I_b p^2 \alpha(p) = C_{mes}(p) - f_b p \alpha(p) - k_b \alpha(p) - C_3 \omega_m p \beta(p)$$

d'où, avec $C_h(p) = 0$, (eq1) dans (eq2) donne :

$$\alpha(p) \left(I_b p^2 + f_b p + k_b + C_3 \omega_m p \frac{C_3 \omega_m p}{I_g p^2} \right) = C_{mes}(p)$$

soit
$$H(p) = \frac{\alpha(p)}{C_m(p)} = \frac{1}{\left(k_b + \frac{C_3^2 \omega_m^2}{I_g} \right) + f_b p + I_b p^2}$$
 On identifie :
$$\begin{cases} K = k_b + \frac{C_3^2 \omega_m^2}{I_g} \\ A = f_b \\ B = I_b \end{cases}$$

Ce système est stable car c'est un système d'ordre 2 à coefficients positifs (critère de Routh simplifié).

Q4 :

L'angle γ_a reste très faible devant β sur toute la plage de variation de ce dernier (visiblement inférieur à $0.1 rad$).

D'où : $\beta \gg \gamma_a$.

De même $\beta \gg \gamma_b$, ainsi : $C_h = e \cos \beta (F_a - F_b)$

Q5 :

Dans les conditions de Heaviside, on a :

$$\begin{cases} eq3 \Rightarrow Q(p) = S e \Omega_\beta(p) + \frac{V_0}{2 B S e} p C_h(p) \\ eq1 \Rightarrow I_g p^2 \beta(p) = C_h(p) + C_3 \omega_m \Omega_\alpha(p) \\ eq2 \Rightarrow (I_b p^2 + f_b p + k_b) \alpha(p) = C_{mer}(p) - C_3 \omega_m \Omega_\beta(p) \end{cases}$$

$$eq3 \Rightarrow C_h(p) = \underbrace{\frac{2 B S e}{p V_0}}_{H_1(p)} \left(Q(p) - \underbrace{S e}_{H_6(p)} \Omega_\beta(p) \right)$$

$$eq1 \Rightarrow \Omega_\beta(p) (= p \beta(p)) = \underbrace{\frac{1}{I_g p}}_{H_2(p)} \left(C_h(p) + \underbrace{C_3 \omega_m}_{-H_3(p)} \Omega_\alpha(p) \right)$$

$$eq2 \Rightarrow \alpha(p) = \frac{1}{\underbrace{I_b p^2 + f_b p + k_b}_{H_4(p) \cdot H_5(p)}} \left(C_{mer}(p) - \underbrace{C_3 \omega_m}_{-H_3(p)} \Omega_\beta(p) \right). \text{ Or } H_5(p) \text{ est un intégrateur : } H_5(p) = \frac{1}{p} \text{ ce qui}$$

permet de déduire :

$H_1(p) = \frac{2BSe}{pV_0}$	$H_2(p) = \frac{1}{I_g p}$
$H_3(p) = -C_3 \omega_m$	$H_4(p) = \frac{p}{I_b p^2 + f_p p + k_b}$
$H_5(p) = \frac{1}{p}$	$H_6(p) = Se$

Q6 :

On cherche à identifier la forme suivante issue du schéma-blocs de l'énoncé : $\alpha(p) = H_b(p)(K_{sv}I(p) - H_a C_{mer}(p))$

Par lecture sur le schéma-blocs initial, on obtient :

$$\alpha(p) = H_5 H_4 \left[C_{mer}(p) + H_3 H_2 \left(-H_3 \Omega_\alpha(p) + H_1 (K_{sv} I(p) - H_6 \Omega_\beta(p)) \right) \right]$$

Or, $\Omega_\alpha(p) = \frac{\alpha(p)}{H_5}$ et $(\Omega_\beta(p) H_3 + C_{mer}(p)) H_4 H_5 = \alpha(p)$, soit $\Omega_\beta(p) = \left(\frac{\alpha(p)}{H_4 H_5} - C_{mer}(p) \right) \frac{1}{H_3}$

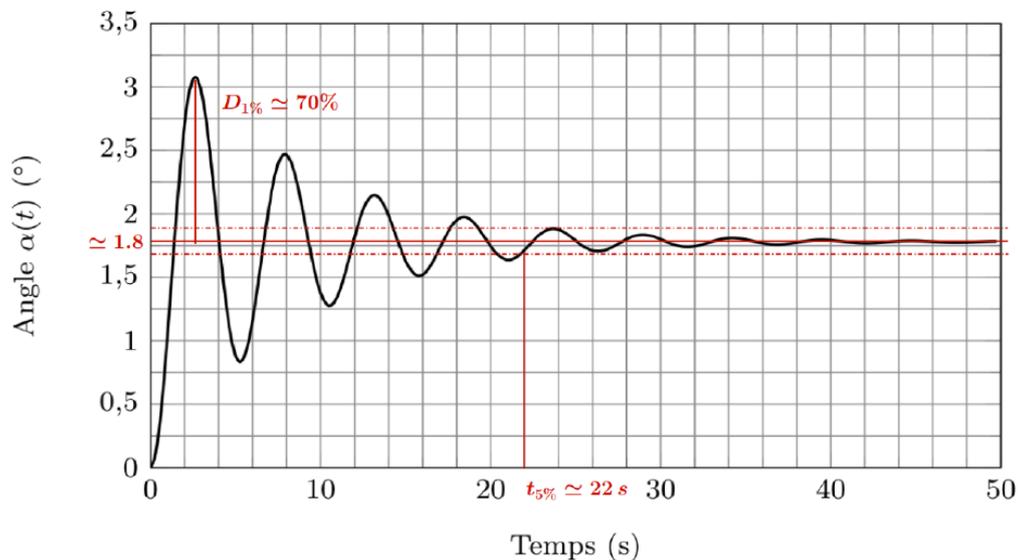
d'où : $\alpha(p) = C_{mer}(p) \left(H_4 H_5 + \frac{H_1 H_2 H_3 H_4 H_5 H_6}{H_3} \right) + I(p) (H_1 H_2 H_3 H_4 H_5 K_{sv})$
 $+ \alpha(p) \left(-\frac{H_2 H_3^2 H_4 H_5}{H_5} - \frac{H_1 H_2 H_3 H_4 H_5 H_6}{H_3 H_4 H_5} \right)$

Après une factorisation en $\alpha(p)$, on identifie : $H_b = \frac{H_1 H_2 H_3 H_4 H_5}{1 + H_2 H_3^2 H_4 + H_1 H_2 H_6}$

et $H_b H_a = -\frac{H_4 H_5 + H_1 H_2 H_4 H_5 H_6}{1 + H_2 H_3^2 H_4 + H_1 H_2 H_6} = H_b \left(-\frac{H_4 H_5 (1 + H_1 H_2 H_6)}{H_1 H_2 H_3 H_4 H_5} \right)$

d'où : $H_a = -\frac{1 + H_1 H_2 H_6}{H_1 H_2 H_3}$

Q7 :



On propose un modèle d'ordre 2 (présence de dépassements) : $H_b(p) = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$

$$K = \frac{\alpha(\infty)}{i(0)} = \frac{1.8}{1}, \quad \boxed{K = 1.8^\circ \cdot A^{-1}}$$

$$D_{1\%} = \frac{3.1 - 1.8}{1.8} \approx 70\%. \text{ On lit sur l'abaque 2 que ce dépassement correspond à } \boxed{\xi = 0.1}.$$

On lit $t_{5\%} \approx 22$ s. Or $\xi = 0.1$ donc l'abaque 1 donne : $t_{5\%} \cdot \omega_0 = 30$, soit $\omega_0 \approx 1.4 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$

$$\mathbf{Q8} : \mu_s = \lim_{t \rightarrow \infty} (\alpha_c(t) - \alpha(t)) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot (\alpha_c(p) - \alpha(p)) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{\alpha_{co}}{p} \left(1 - \frac{G(p)C(p)}{1+G(p)C(p)} \right)$$

$$\text{Ce qui donne : } \mu_s = \lim_{p \rightarrow 0} \alpha_{co} \left(\frac{1}{1+G(p)C(p)} \right) = \lim_{p \rightarrow 0} \alpha_{co} \left(\frac{1}{1+K_{sv} \cdot \frac{K_b \cdot K_p}{1+2\xi \frac{p}{\omega_0} + \frac{p^2}{\omega_0^2}}} \right) = \alpha_{co} \frac{1}{1+K_{sv}K_bK_p}$$

Cette erreur doit être nulle $\Rightarrow \alpha_{co} \frac{1}{1+K_{sv}K_bK_p} = 0 \Rightarrow 1 + K_{sv}K_bK_p \rightarrow \infty$ donc $K_p \rightarrow \infty$ impossible

$$\mathbf{Q9} : \text{l'erreur doit être inférieure à 5\%} \Rightarrow \alpha_{co} \frac{1}{1+K_{sv}K_bK_p} \leq 0,05 * \alpha_{co} \Rightarrow 1 + K_{sv}K_bK_p \geq 20$$

D'où $K_p \geq \frac{19}{K_{sv}K_b}$ soit $K_p \geq 9,5 A$

Q10 :

$$\begin{aligned} \text{on détermine la FTBF : } \frac{\alpha(p)}{\alpha_c(p)} \Big|_{C_{mer}=0} &= \frac{K_{sv} \cdot \frac{K_b \cdot K_p}{1+2\xi \frac{p}{\omega_0} + \frac{p^2}{\omega_0^2}}}{1+K_{sv} \cdot \frac{K_b \cdot K_p}{1+2\xi \frac{p}{\omega_0} + \frac{p^2}{\omega_0^2}}} = \frac{K_{sv} \cdot K_b \cdot K_p}{1+2\xi \frac{p}{\omega_0} + \frac{p^2}{\omega_0^2} + K_{sv} \cdot K_b \cdot K_p} \\ &= \frac{K_{sv} \cdot K_b \cdot K_p}{1 + K_{sv} \cdot K_b \cdot K_p} \cdot \frac{1}{1 + \frac{2\xi}{1 + K_{sv} \cdot K_b \cdot K_p} \frac{p}{\omega_0} + \frac{1}{1 + K_{sv} \cdot K_b \cdot K_p} \frac{p^2}{\omega_0^2}} \\ &= \frac{19}{20} \cdot \frac{1}{1 + \frac{0,2}{20} \frac{p}{1,4} + \frac{1}{20} \frac{p^2}{1,4^2}} = \frac{K_{bf}}{1 + 2\xi_{bf} \frac{p}{\omega_{0bf}} + \frac{p^2}{\omega_{0bf}^2}} \end{aligned}$$

Par identification avec la FT d'un 2^{ième} ordre, on trouve :

$$\omega_{0bf} = 1,4 * \sqrt{20} = 6,26 \text{ rad/s et } \xi_{bf} = 0,005 * \sqrt{20} = 0,02$$

Avec les abaques annexe 3 on trouve : $D_1(\%) > 90\%$. Le cahier des charges n'est pas respecté.

Q11 :

Expression de $\alpha(t) = C_0 |H_r(j\omega)| \sin(\omega t + \varphi(\omega))$

Pulsation	Rapport d'amplitude		Déphasage	
	Sans stabilisation	Avec stabilisation	Sans stabilisation	Avec stabilisation
1 rad/s	$10^{-\frac{90}{20}}$	$10^{-\frac{111}{20}}$	-20°	$\simeq -20^\circ$
10 rad/s	$10^{-\frac{135}{20}}$	$10^{-\frac{134}{20}}$	-180°	$\simeq -165^\circ$

Conclusion : On constate qu'à basse fréquence, le couple ressenti après stabilisation est bien plus faible et diminue d'un facteur 10 environ à 1 rad/s.

A haute fréquence, le stabilisateur a peu d'influence mais le couple était déjà très atténué.

La phase n'a aucune incidence sur le ressenti des passagers quelle que soit la fréquence.

Q12 :

Entre 10 et 35 secondes, on observe 4 périodes complètes, donc : $\omega_{mer} = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{25/4}$. A.N. : $\omega_{mer} \simeq 1 \text{ rad.s}^{-1}$

On passe d'une amplitude (crêtes à crêtes) de environ 60° à des oscillations d'amplitudes de l'ordre de 6° , soit une atténuation de l'ordre de $\frac{6}{60} = 0.1$. Cette atténuation d'un facteur 10 est très proche de celle lue sur le

digramme de Bode (Question 18). En effet, $\frac{10^{-\frac{111}{20}}}{10^{-\frac{90}{20}}} = 10^{-\frac{21}{20}} \simeq 0.1$.

Problème N°5: Analyse harmonique de la Ducati 620 Monster

$$Q1 \quad H_1(p) = \frac{1}{m_1 p^2} ; \quad H_4(p) = \frac{1}{\cos^2 \alpha} (b_{18} p + k_{18}) ; \quad H_3(p) = \left(\frac{L_1 L_5}{\lambda_{760} L_3} \right)^2 (b_{67} p + k_{67})$$

Q2 Les contacts roues sol sont toujours maintenus et la moto se déplace à vitesse constante. On a supposé que le basculement avant/arrière de la moto n'est pas pris en compte. La roue arrière va donc subir les mêmes oscillations du sol avec un retard par rapport à la roue avant.

Ce retard s'exprime dans les conditions précédentes: $t_{\text{retard}} = \frac{a_3 + a_4}{V}$ en utilisant les unités SI.

On en déduit donc que $\Delta Y_3(t) = \Delta Y_4(t - t_{\text{retard}})$ soit $\Delta Y_3(p) = \Delta Y_4(p) e^{-\frac{a_3 + a_4}{V} p}$

$$Q3 \quad \text{on lit } \Delta Y_1(1 + H_1 H_3 + H_1 H_4) = H_1 H_3 \Delta Y_3 + H_1 H_4 \Delta Y_4 \quad \text{soit} \quad H(p) = \frac{H_1 (H_3 e^{-t_{\text{retard}} p} + H_4)}{1 + H_1 (H_3 + H_4)}$$

Q4 Posons $H_3 = A(b_{67} p + k_{67})$ et $H_4 = B(b_{18} p + k_{18})$: comme $A \ll B$, on a :

$$H(p) = \frac{\Delta Y_1}{\Delta Y_4} = \frac{B b_{18} p + B k_{18}}{m_1 p^2 + B b_{18} p + k_{18}}, \quad \text{aux pulsations élevées } H(j\omega) \text{ tend vers } \frac{-B b_{18} j}{m_1 \omega} \text{ donc on a :}$$

Le gain qui décroît de 20dB/déc et la phase qui converge vers -90° .

Q5 La résonance sur la courbe de gain et la variation de phase de 0° à -180° sont typiques d'un système du second ordre. La « remontée » de la phase à -90° et la pente à 20dB par décades indiquent que le second ordre est multiplié par une fonction du type $(1+Tp)$:

- quand la pulsation tend vers zéro le gain tend vers $20 \log K$, qui est égal à zéro ici donc: $K=1$
- A la résonance $\omega_R = \omega_0 \sqrt{1-2m^2}$ et la grande amplitude de la résonance nous indique que l'amortissement m est très petit. Par conséquent $\omega_R \approx \omega_0 \approx 20 \text{ rad.s}^{-1}$
- pour $\omega = 1/T$ la phase est proche de -135° soit ici: $1/T \approx 400 \text{ rad.s}^{-1}$ soit $T \approx 2,5 \text{ ms}$.

$$Q7 \quad S(p) = \frac{K(1+Tp)}{1 + \frac{2m}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}} = \frac{K(1+Tp)\omega_0^2}{(m\omega_0 + p)^2 + (1-m^2)\omega_0^2} = \frac{KT\omega_0^2(p + m\omega_0) + K\omega_0^2(1-Tm\omega_0)}{(m\omega_0 + p)^2 + (1-m^2)\omega_0^2}$$

$$\text{Soit : } S(p) = \frac{KT\omega_0^2(p + m\omega_0)}{(m\omega_0 + p)^2 + (1-m^2)\omega_0^2} + \frac{\frac{K\omega_0(1-Tm\omega_0)}{\sqrt{1-m^2}} \omega_0 \sqrt{1-m^2}}{(m\omega_0 + p)^2 + (1-m^2)\omega_0^2}$$

$$\text{D'où : } s(t) = KT\omega_0^2 e^{-m\omega_0 t} \sin(\omega_0 \sqrt{1-m^2} t) + K\omega_0^2 (1-Tm\omega_0) e^{-m\omega_0 t} \cos(\omega_0 \sqrt{1-m^2} t)$$

Q8 On souhaite que la fréquence des oscillations perçues à haute vitesse soit inférieure à 5Hz. La fréquence des oscillations à haute vitesse sera ici: $f = \frac{\omega_0 \sqrt{1-m^2}}{2\pi}$ et si on se place dans le cas le plus défavorable, choisissons $m^2 \ll 1$ nous trouvons par le calcul $f_{osc} \approx 3,2 \text{ Hz}$

Le critère de la fréquence d'oscillation perçue de la fonction FS1 est donc satisfait.

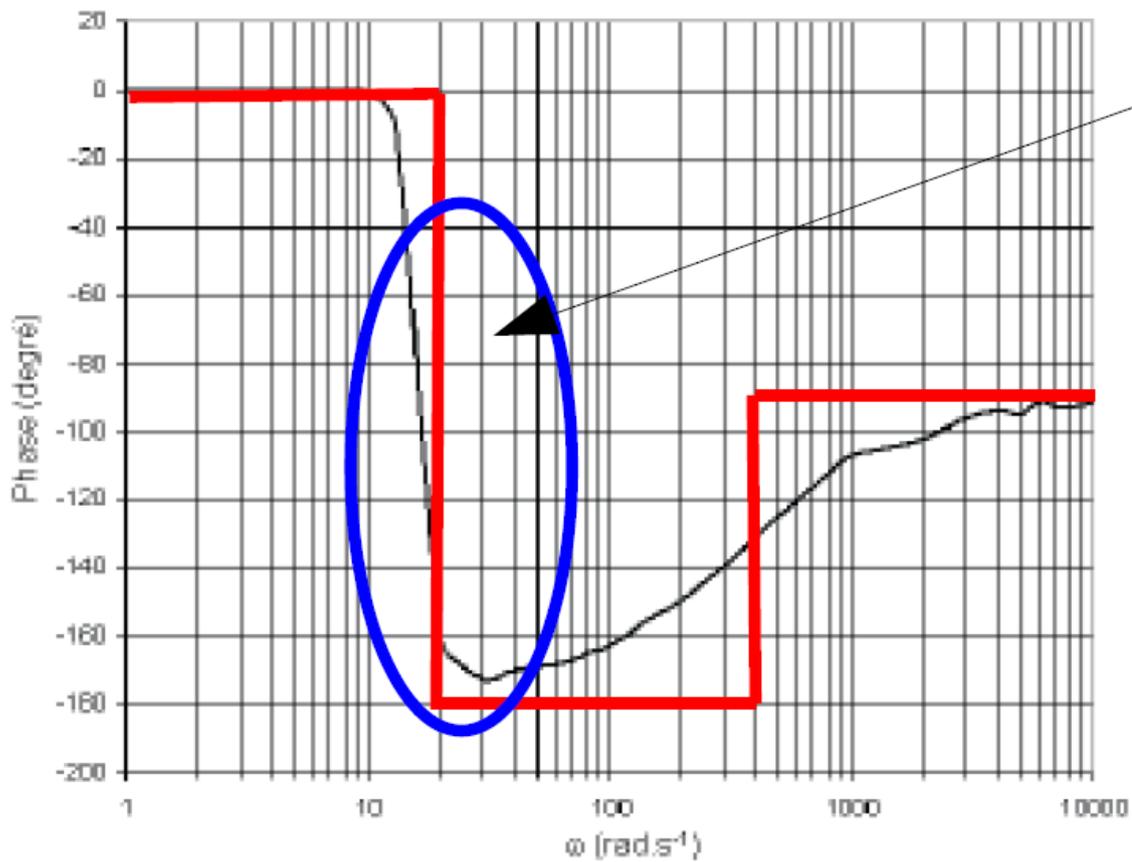
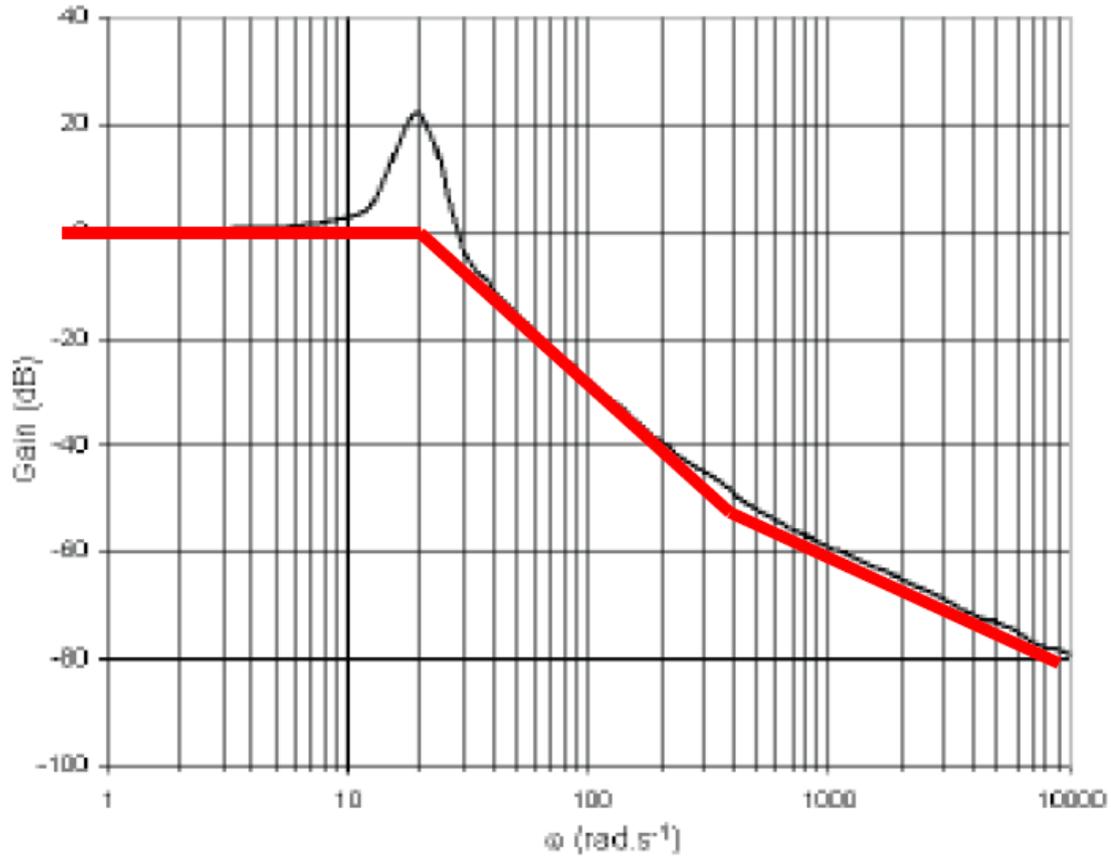
Q9 Nous reconnaissons ici la réponse à un échelon d'un système du second ordre. Nous proposons donc le modèle suivant : $H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2m}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$

- $K=1$ car le signal tend vers 1 quand t tend vers l'infini
- Le premier dépassement est environ $D_1=22\%$. Or $D_1 = e^{-\frac{\pi m}{\sqrt{1-m^2}}}$ on obtient donc $m \approx 0,43$
- La période d'un 2nd ordre vaut $T = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1-m^2}}$ donc $\omega_0 \approx 2,9 \text{ rad.s}^{-1}$

Q10 Graphiquement on mesure $t_{5\%} \omega_0$ de l'ordre de 6 secondes soit $t_{5\%} \approx 2s < 3s$

Le critère du temps d'oscillation perçue de la fonction FS1 est bien satisfait.

Q6 :



Limites du modèle