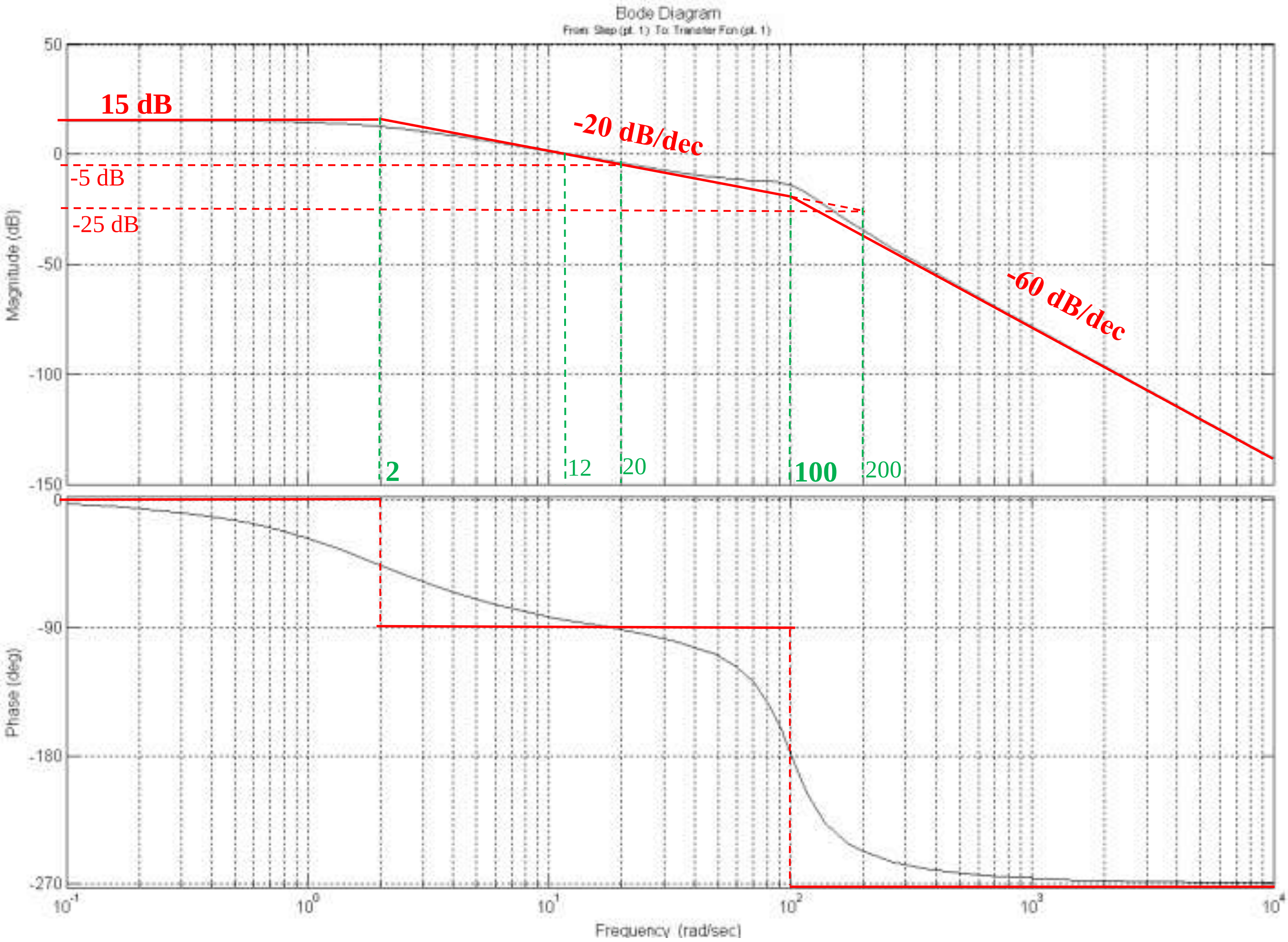
Exercice :

$$H(p) = \frac{6}{(1+0{,}5.p).\left(1+0{,}006.p+\frac{1}{100^2}.p^2\right)} = H_1(p).H_2(p)$$

Q1 : Etude asymptotique : cassures à $\omega_{c1} = \frac{1}{0{,}5} = 2\,rad/s$ et $\omega_{c2} = 100\,rad/s$

- $\omega \ll 2$ *ou BF* : $H(p) \approx 6$ donc asymptote de gain horizontale à $20\log 6 \approx 15dB$ et asymptote de phase horizontale à 0°
- $2 \ll \omega \ll 100$: $H(p) \approx \frac{6}{0{,}5.p.}$ donc asymptote de gain de pente -20dB/dec passant par les points ($\omega = 2$; $G_{dB} = 15$) et ($\omega = 12$; $G_{dB} = 0$) par exemple et asymptote de phase horizontale à -90°
- $\omega \gg 100$ *ou HF* : $H(p) \approx \frac{6}{\left(\frac{0{,}5}{100^2}.p^3\right)}$ donc asymptote de gain de pente -60dB/dec et asymptote de phase horizontale à -270°



Q2 : Il y a résonance pour la fonction de transfert $H_2(p)$ car c'est une FT du deuxième ordre avec un coefficient d'amortissement ($\xi = \frac{1}{2}.100.0{,}006 = 0{,}3$) inférieur à $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Problème :

Q1) *Expliquer en quoi le diagramme de Bode de la figure 6 est cohérent avec les critères souhaités de l'exigence du cahier des charges.*

- *Précision de l'angle de rotation : parfaite aux basses fréquences* → On a bien un gain nul en dB (et donc de 1 en réel)
- *Résonance : Pas de résonance* → Pas de dépassement du gain par rapport à la valeur statique : OK
- *Résonance : Pulsation de cassure* $\omega_c = 2\pi * 5Hz$ → OK
- *Filtrage des vibrations hautes fréquences : Décroissance de 40dB/décade*→ La courbe descend de 80 dB en 2 décades ($\omega_c \rightarrow 100\omega_c$) : OK

Q2) *Déterminer l'expression analytique, dans le domaine de Laplace, de la fonction de transfert* $H(p) = \dfrac{Z_8(p)}{Z_7(p)}$ *du filtre réalisé. « p » est la variable de Laplace.*

Par transformée de Laplace en considérant les conditions initiales nulles :

$$-k_T\left(Z_8(p) - Z_7(p)\right) - c_T p\left(Z_8(p) - Z_7(p)\right) = Mp^2 Z_8(p)$$

$$H(p) = \frac{Z_8(p)}{Z_7(p)} = \frac{k_T + c_T p}{k_T + c_T p + Mp^2}$$

Q3) *Montrer que H(p) peut se mettre sous la forme suivante :* $H(p) = \dfrac{1 + 2\dfrac{\xi}{\omega_0} p}{1 + 2\dfrac{\xi}{\omega_0} p + \dfrac{p^2}{\omega_0^2}}$

$$H(p) = \frac{1 + \dfrac{c_T}{k_T} p}{1 + \dfrac{c_T}{k_T} p + \dfrac{M}{k_T} p^2} = \frac{1 + 2\dfrac{\xi}{\omega_0} p}{1 + 2\dfrac{\xi}{\omega_0} p + \dfrac{p^2}{\omega_0^2}}$$

On trouve : $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k_T}{M}}$; $\xi = \dfrac{c_T}{2\sqrt{k_T M}}$

Q4) *Montrer la pertinence du choix des bras en comparant la valeur numérique de ω_0 à la pulsation de cassure ω_c souhaitée (voir figure 6).*

$\omega_0 = 31,6\ rad.s^{-1}$

$\omega_C = 2\pi * 5 = 31,4\ rad.s^{-1}$

La raideur du ressort correspond bien au ω_C désiré.

Q5) *Représenter, sur le document réponse 3, les diagrammes de Bode de H(p), pour* $\xi = 1$

Pour $\xi = 1$, $H(p) = \dfrac{1 + 0,063p}{1 + 0,063p + 0,001p^2}$. Tracés à la fin.

Q6) *Commenter le choix de ξ à prendre. Discuter en particulier de son influence sur la résonance et le filtrage hautes fréquences.*

D'après la figure 9, il faut que ξ soit supérieur ou égal à 2, pour qu'il n'y ait pas de résonance.

Quand ξ augmente, le phénomène de résonance diminue puis s'annule.

La décroissance du gain aux hautes fréquences est de -20 dB/décade alors que le cahier des charges impose -40 dB/décade.

La diminution de la valeur ξ permet d'obtenir sur une bande de fréquence une décroissance à – 40 dB/décade, mais celle-ci ne continue pas jusqu'à l'infini.

Q7) *Conclure quant à la pertinence du choix d'un amortissement actif pour satisfaire les niveaux des critères de l'exigence du cahier des charges 6.*

D'après la question précédente, il est impossible de satisfaire à tous les critères de la fonction FS1 du cahier des charges avec ce filtre passif.

Q8) *Déterminer l'expression de μ_1 et μ_2, et calculer numériquement les fonctions de transfert $\frac{Z_8(p)}{Z_7(p)}$ et $\frac{\theta_8(p)}{\theta_7(p)}$, en laissant h comme inconnue.*

$$\frac{Z_8(p)}{Z_7(p)} = \frac{2k/M}{p^2+gp+2k/M} \qquad \frac{\theta_8(p)}{\theta_7(p)} = \frac{2k/(3(B_8+Mh^2))}{p^2+gp+2k/(3(B_8+Mh^2))}$$

Donc $\mu_1 = \frac{2k}{M}$ soit $\mu_1 = 1000 s^{-2}$ $\mu_2 = \frac{2kL^2}{3(B_8+Mh^2)}$ soit $\mu_2 = \frac{30000}{(83+1000h^2)} s^{-2}$

Q9) *Exprimer, en fonction de μ, la condition que g doit vérifier pour qu'il n'y ait pas de résonance.*

Les fonctions de transfert sont du second ordre. Pour ne pas avoir de résonance, le coefficient d'amortissement de chaque fonction doit être supérieur à $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Pour la fonction générique $\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{\mu}{p^2+gp+\mu}$ le coefficient d'amortissement vaut :

$\xi = \frac{g}{2\sqrt{\mu}} > \frac{\sqrt{2}}{2}$ Donc $g > \sqrt{2\mu}$

Q10) *Déterminer la valeur de h qui permettrait, au mieux, de satisfaire la valeur de ω_c pour chaque mouvement.*

Pour le second niveau du critère « résonance », on veut $\omega_c = 2\pi * 5Hz$.

Avec la fonction générique $\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{\mu}{p^2+gp+\mu}$ la pulsation de cassure vaut : $\omega_c = \sqrt{\mu}$

Il faut donc chercher à avoir μ_1 et μ_2 le plus proche de $100.\pi^2 = 986{,}9\ s^{-2}$

Pour les mouvements de translation selon $\overrightarrow{z_7}$, μ_1 en est proche quel que soit h.

Par contre, pour les mouvements de rotation autour de $\overrightarrow{y_7}$, μ_2 ne dépasse pas $360 s^{-2}$.

Il faut choisir une valeur de h la plus faible possible.

Q11) *Conclure quant à la capacité de la plateforme à satisfaire ou non le niveau « pas de résonance » de l'exigence du cahier des charges.*

D'après la question 9, on doit avoir :

$\mu < g^2/2 = 1250\ s^{-2}$

Au passage, l'unité est bien la même que dans l'énoncé : $[s^{-2}] = [N].[kg]^{-1}.[m]^{-1}$

Cette condition est vérifiée pour μ_1 et μ_2 quelle que soit la valeur de h entre 0 et 1 m.

Q12) *Lors d'un mouvement à 1,5 Hz, déterminer la diminution d'amplitude entre $\theta_8(t)$ et $\theta_7(t)$ dû au non-respect du niveau lié à la pulsation de cassure de l'exigence du cahier des charges.*

À 1.5Hz, $\omega = 2\pi * 1{,}5 = 9{,}42\ rad.s^{-1}$

À cette pulsation, $\frac{\theta_8(p)}{\theta_7(p)} = -6{,}2\ dB$ La diminution d'amplitude du signal $\theta_7(t)$ en régime permanent vaut donc : $10^{\frac{-6{,}2}{20}} = 0{,}49$

Q13) *Déterminer l'expression de $H_0(p)$ pour que les schémas blocs des figures 15 et 16 soient équivalents.*

$$H_0(p) = \frac{2k}{Mp^2} * \frac{1}{1+g/p} = \frac{2kp}{Mp^2(p+g)}$$

Q14) L'écart statique en position est nul puisque H_0 est de classe > 0. En calculant $\varepsilon_s = \lim_{t\to\infty}(Z_7(t) - Z_8(t)) = \lim_{p\to 0} p((Z_7(p) - Z_8(p)) = \lim_{p\to 0} p\left(\frac{1}{p} - \frac{H_0}{1+H_0}\frac{1}{p}\right) = \lim_{p\to 0}\left(\frac{1}{1+H_0}\right) = 0$. Le correcteur est correctement choisi.

Q5) *Suite…*

Diagramme de Gain

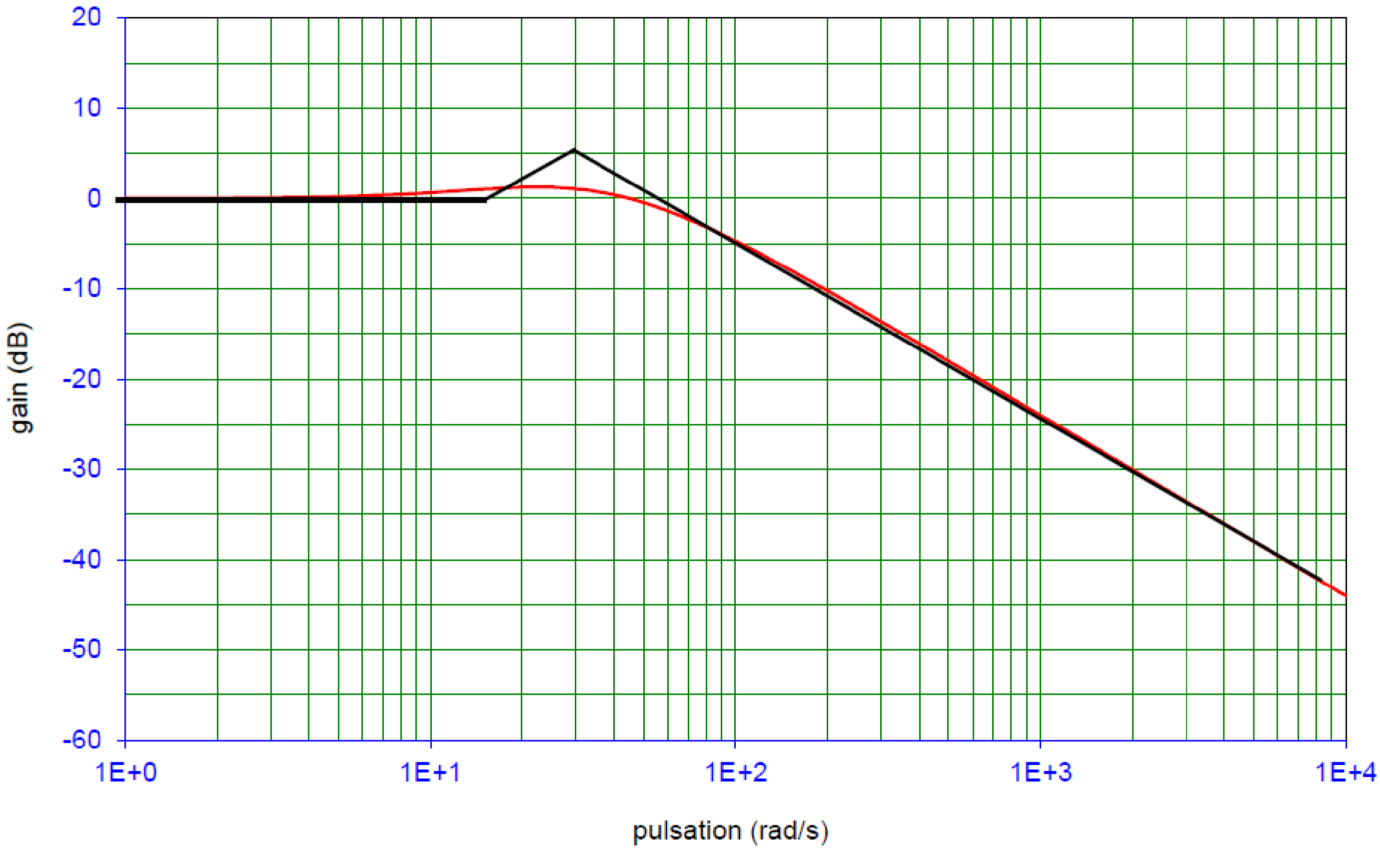


Diagramme de Phase