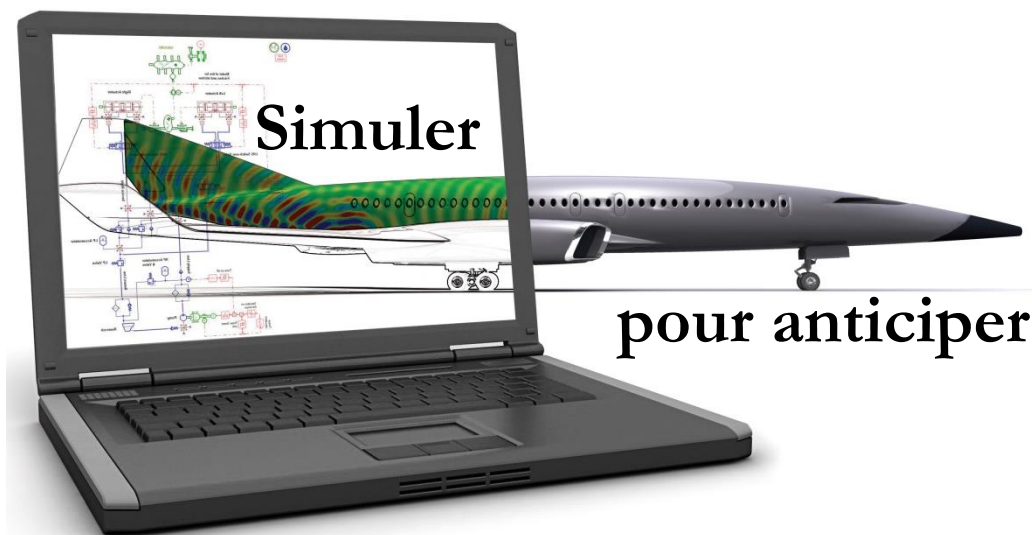


# STATIQUE

La statique est l'étude de l'équilibre des **systèmes matériels non déformables** au **repos**.

## Extraits du référentiel :

| Compétence visée                                                     | Savoir-faire associé                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |
|----------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Proposer un modèle de connaissance et de comportement                | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Associer un modèle à une action mécanique</li> <li>• Déterminer la relation entre le modèle local et le modèle global</li> <li>• Associer à chaque liaison son torseur d'actions mécaniques transmissibles</li> </ul>                                                          |
| Procéder à la mise en oeuvre d'une démarche de résolution analytique | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Proposer une méthode permettant la détermination d'une inconnue de liaison ou le calcul complet des inconnues de liaison</li> <li>• Choisir une méthode pour déterminer la valeur des paramètres conduisant à des positions d'équilibre (par exemple arc-boutement)</li> </ul> |



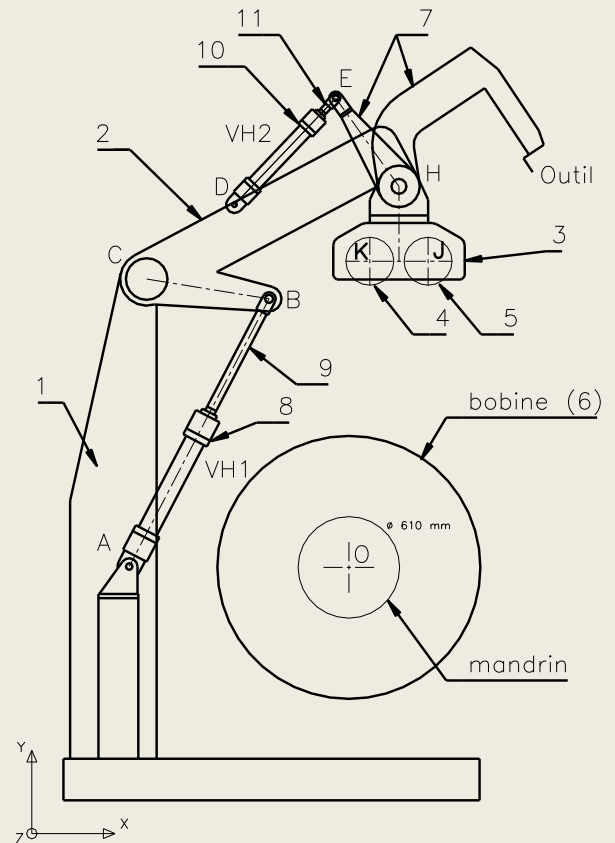
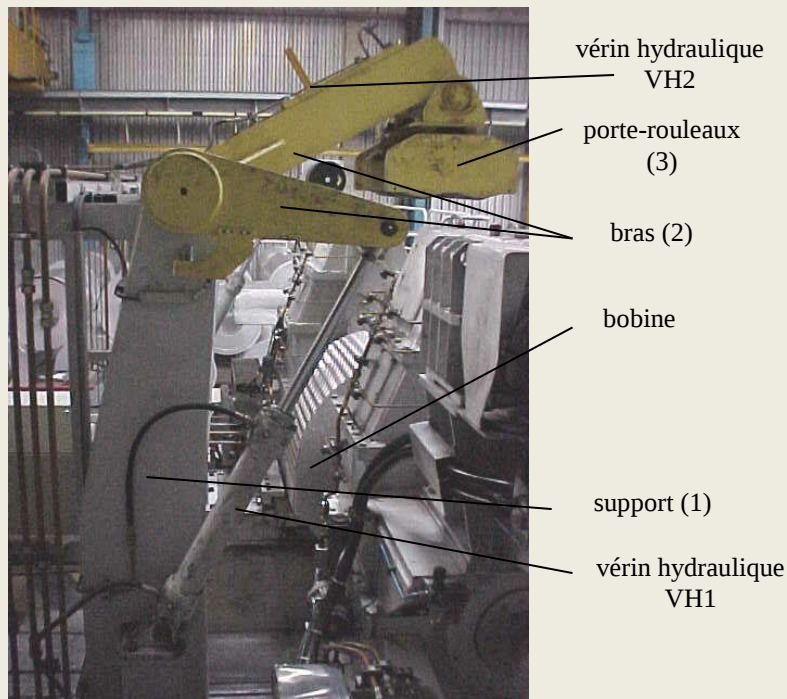
*Sciences Industrielles de l'Ingénieur  
1ère année de CPGE  
Lycée Claude Fauriel*

### Illustration : ligne de fabrication de tôle d'aluminium (extrait Centrale Marseille MP 02)

La société Péchiney-Rhénalu installée à Issoire (Puy de Dôme) est spécialisée dans la fabrication de tôles d'aluminium de différentes épaisseurs à hautes caractéristiques mécaniques. Schématiquement, le processus de fabrication débute par la coulée de lingots d'aluminium et de métaux d'addition qui sont ensuite laminés et conditionnés en bobines. Ces bobines de diamètre maxi 2700 mm, pesant autour de 25 tonnes sont ensuite déroulées et débitées en tôles de différentes dimensions.

On centre notre étude mécanique sur le bras porte rouleau équipant le poste d'entrée de la ligne LG37 comme le montre la photo.

Dans cet ensemble mécanique, on distingue notamment le support (1), le bras (2) animé en rotation par les 2 vérins hydrauliques VH1, le vérin hydraulique VH2, le porte-rouleau (3) ainsi que les deux rouleaux (4) et (5).



La dérouleuse manipule des bobines de tôles d'alliages d'aluminium de forme cylindrique, enroulées sur un mandrin expansible. Afin de faciliter leurs manipulations, la dernière spire des bobines de tôles est soudée. Après chargement de la bobine sur le poste d'entrée et positionnement de l'ensemble mobile, la première opération consiste à venir casser le cordon de soudure qui maintient la dernière couche enroulée.

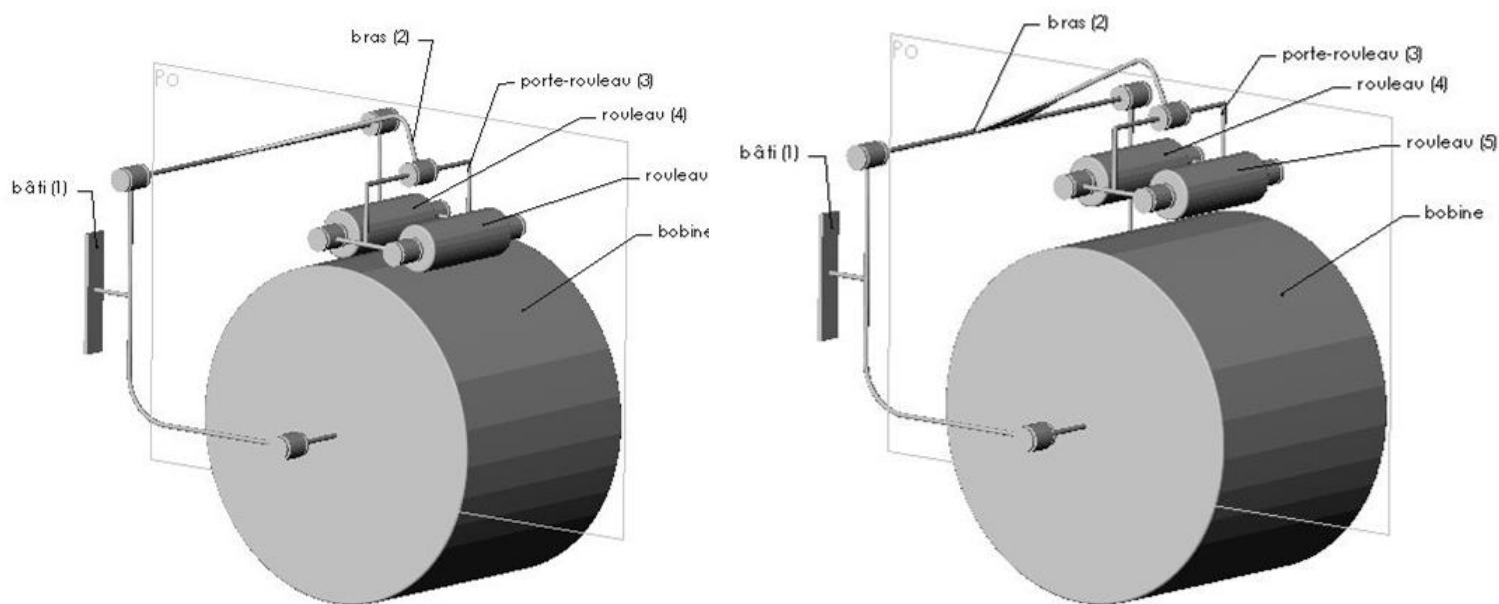
Les deux vérins hydrauliques (VH1) placés de part et d'autre du mécanisme, animent en rotation le bras (2) équipé de la tête (3) permettant le contact entre les rouleaux (4 et 5) et la bobine (6). L'outil, solidaire du coude (7), est actionné par l'unique vérin hydraulique (VH2). L'opérateur commande la rotation lente de la bobine de façon à amener le cordon de soudure en contact avec l'extrémité de l'outil. Ce dernier permet ainsi de casser le cordon de soudure qui maintenait la tôle enroulée.

Durant toute cette phase, les vérins hydrauliques (VH1) maintiennent les rouleaux (4 et 5) en contact avec la bobine. Ils appliquent ainsi un effort presseur sur la bobine évitant le déroulement spontané de la première spire une fois le cordon de soudure cassé.

Extrait du cahier des charges :

| exigence                                                                  | critères                           | valeurs                                            |
|---------------------------------------------------------------------------|------------------------------------|----------------------------------------------------|
| Assurer le maintien de la bobine sans « marquage » de la tôle d'aluminium | Pression de contact rouleau/bobine | $P < 1500 \text{ daN/m}$<br>pression de « matage » |

Les figures ci-après montrent schématiquement les deux configurations possibles du mécanisme sans contact ou en contact entre les rouleaux et la bobine. On a volontairement omis de représenter les vérins hydrauliques (VH1 et VH2) car ils n'interviennent pas dans le modèle cinématique.



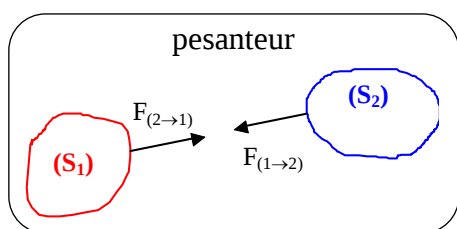
## 1 - Modélisation des actions mécaniques :

### 1.1 - Définition :

On appelle action mécanique toute cause susceptible de maintenir un solide au repos ou de créer un mouvement ou de déformer un solide (solide ou ensemble de solides).

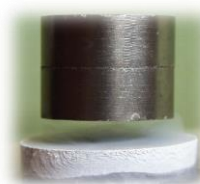
On distingue deux types d'actions mécaniques:

- les actions **volumiques** ou **à distance** qui s'exercent sans contact entre les solides:



ou

actions électromagnétiques



- les actions **surfaiques** ou **de contact**:

entre deux solides en contact

ou

entre un solide et un fluide



## 1.2 - Modélisation locale :

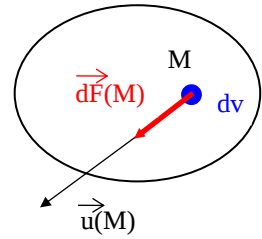
### 1.2.1- Actions volumiques

$$\vec{dF}(M) = f(M).dv.\vec{u}(M) \quad \text{sur un volume élémentaire } dv$$

$f(M)$  = répartition volumique d'effort en M en  $N/m^3$

Pour la pesanteur :  $\vec{u}(M)$  = verticale descendante

$f(M) = \rho(M).g$  avec  $\rho(M)$  = masse volumique en  $kg/m^3$   
et  $g$  = accélération de la pesanteur



### 1.2.2 Actions surfaciques:

Soient deux solides  $S_1$  et  $S_2$  en contact sur une surface  $ds$ . On isole  $S_1$ .

L'action est dirigée vers l'intérieur du solide isolé.

$$\text{action locale en M de } S_2 \text{ sur } S_1: \vec{dF}(M) = \vec{dF}_n(M) + \vec{dF}_t(M)$$

$$\vec{dF}(M) = -p(M) ds \vec{n}(M) + q(M) ds \vec{t}(M)$$

$p(M)$  = pression de contact en M

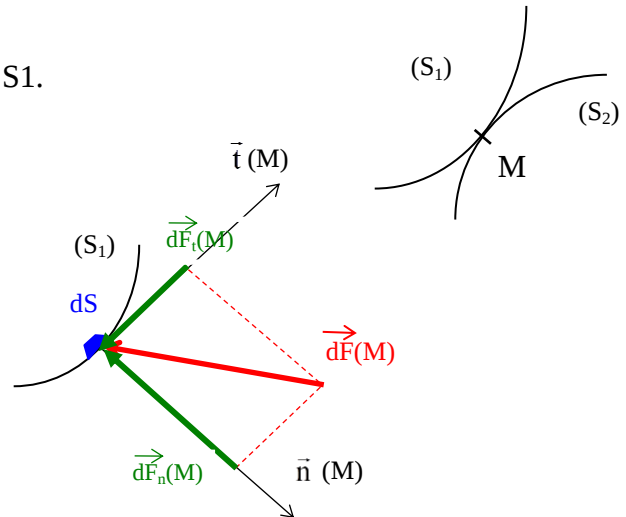
$\vec{n}(M)$  = vecteur unitaire normal au plan tangent commun en M, orienté vers l'extérieur du solide isolé.

$q(M)$  = répartition surfacique tangentielle d'effort en M.

$\vec{t}(M)$  = vecteur unitaire d'une direction du plan tangent commun en M.

S'il n'y a pas de frottement en M (ou s'il est négligeable ou si fluide sur solide),  $q(M) = 0$

Sinon, les lois de Coulomb définissent  $q(M)$  et la direction et le sens de  $\vec{t}(M)$ :



1er cas : la vitesse de glissement en M entre  $S_1$  et  $S_2$  n'est pas nulle

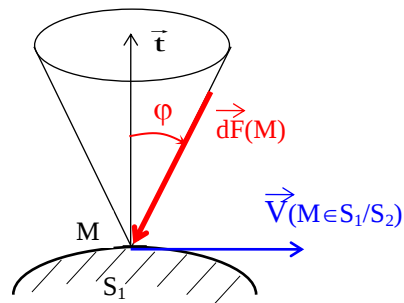
$$\vec{V}(M \in S_1/S_2) \neq \vec{0}$$

$$q(M) = f.p(M) \quad \text{avec } f = \text{coefficient de frottement en M entre } S_1 \text{ et } S_2$$

$\vec{t}(M)$  est opposée à la vitesse de glissement de  $S_1/S_2$  ( $S_1$  étant le solide isolé)

$$f = \tan \varphi = \frac{q(M)}{p(M)}$$

le cône de frottement est le cône de demi-angle au sommet  $\varphi$  sur lequel se situe l'action élémentaire lorsque la vitesse de glissement change de direction.



2ème cas: la vitesse de glissement en M entre  $S_1$  et  $S_2$  est nulle

$$\vec{V}(M \in S_1/S_2) = \vec{0}$$

$$q(M) \leq f.p(M) \quad \text{et } \vec{t}(M) \text{ de direction indéterminée}$$

L'effort est alors à l'intérieur du cône de frottement, incliné de  $\alpha \leq \varphi$  par rapport à la normale  $\vec{t}$ .

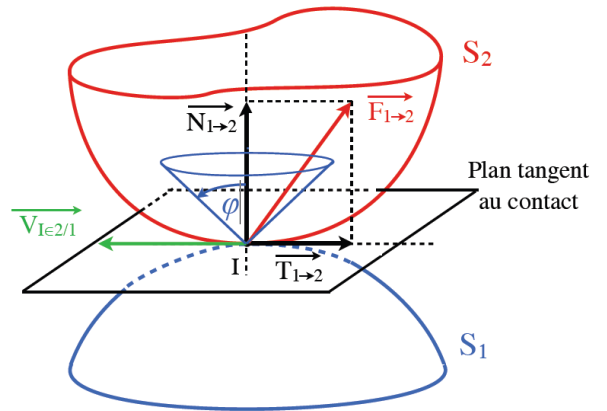
L'effort n'est jamais à l'extérieur du cône de frottement!

Cas du **contact ponctuel** :  $\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = \vec{N}_{1 \rightarrow 2} + \vec{T}_{1 \rightarrow 2}$

- Si  $\vec{V}(I \in 2/1) = \vec{0}$  ;  $\|\vec{T}_{1 \rightarrow 2}\| \leq f \|\vec{N}_{1 \rightarrow 2}\|$  et  $\vec{T}_{1 \rightarrow 2}$  de direction inconnue ( $\in$  plan tangent)
- Si  $\vec{V}(I \in 2/1) \neq \vec{0}$  ;  $\|\vec{T}_{1 \rightarrow 2}\| = f \|\vec{N}_{1 \rightarrow 2}\|$  et  $\vec{T}_{1 \rightarrow 2}$  opposé à  $\vec{V}(I \in 2/1)$

Le coef. de frott. dépend de nombreux critères :

- nature des matériaux en contact (critère prépondérant)
- état de surface
- température
- pression de contact
- vitesse de glissement



Valeurs moyennes :

acier/acier : 0,15  
acier/bronze : 0,10  
acier/Ferodo : 0,3  
pneu/route : 0,6

En général, on prend une valeur moyenne constante en tout point de la surface.

### 1.3 - Modélisation globale:

Soit S le solide isolé:  $\vec{F}(\text{Ext} \rightarrow S) = \int_{M \in S} d\vec{F}(M)$  On perd de l'information en globalisant les efforts.

Premier principe de la statique: **Toute action mécanique est entièrement caractérisée, d'un point de vue mécanique, par un torseur.**

Le torseur d'action mécanique permet de rendre compte de « l'effet » d'une force ailleurs qu'en son point d'application. Le moment représente l'aptitude d'une force à faire tourner une solide autour d'un axe donné.

$$\mathcal{T}(\text{Ext} \rightarrow S) = \left\{ \begin{array}{l} \vec{F}(\text{Ext} \rightarrow S) \\ \vec{M}_A(\text{Ext} \rightarrow S) \end{array} \right\} \text{ avec } \vec{M}_B(\text{Ext} \rightarrow S) = \vec{M}_A(\text{Ext} \rightarrow S) + \vec{F}(\text{Ext} \rightarrow S) \wedge \overrightarrow{AB}$$

Illustration : *pourquoi les poignées de portes sont-elles placées à l'opposé des gonds ?*

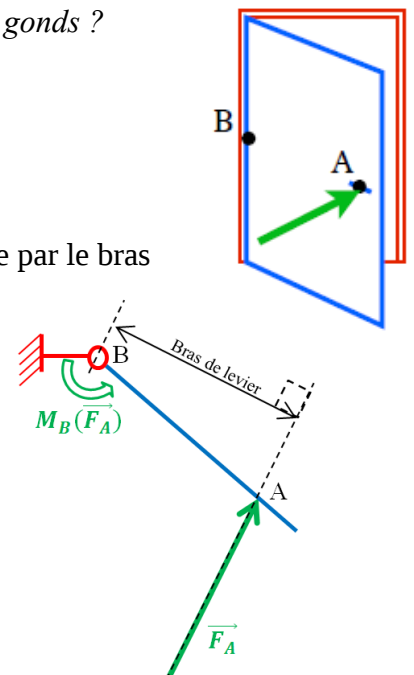
$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{F}(\text{Ext} \rightarrow \text{porte}) = \vec{F}_A \\ \vec{M}_A(\text{Ext} \rightarrow \text{porte}) = \vec{0} \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{l} \vec{F}(\text{Ext} \rightarrow \text{porte}) = \vec{F}_A \\ \vec{M}_B(\text{Ext} \rightarrow \text{porte}) = \vec{F}_A \wedge \overrightarrow{AB} \neq \vec{0} \end{array} \right\}_B$$

La force en A produit un moment en B dont le module est le produit de la force par le bras de levier (distance d du point B à la droite support de la force).

$$\|\vec{M}_B(\text{Ext} \rightarrow \text{porte})\| = \|\vec{F}_A \wedge \overrightarrow{AB}\| = \|\vec{F}_A\| \cdot d$$

Moralité : pour fermer une porte, on exerce une force Perpendiculairement à la porte le plus loin possible (à l'opposé) Des gonds. La force sera ainsi minimale.

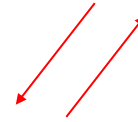
✍ Afin de montrer la nécessité du modèle torseur pour les actions Mécaniques, répondre aux questions de l'exercice « frein de TGV »(fin du cours).



## Cas particuliers :

- Actions mécaniques représentables par un **couple** : action du stator sur le rotor d'un moteur électrique

$$\mathbf{T}(\text{Ext} \rightarrow \text{S}) = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{M}_A(\text{Ext} \rightarrow \text{S}) \end{Bmatrix}$$



- Actions mécaniques représentables par un **glisseur** : c'est une « force centrale en physique »

$$\mathbf{T}(\text{Ext} \rightarrow \text{S}) = \begin{Bmatrix} \vec{F}(\text{Ext} \rightarrow \text{S}) \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$



pour tout point  $M \in$  droite d'action,  $\vec{M}_M = \vec{0}$

1.3.1 - Actions à distance: *pesanteur*

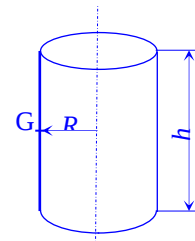
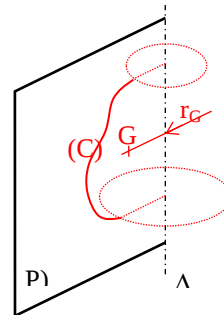
$$\int_{M \in S} -\rho(M) g \vec{z} dv = \vec{P} = -m g \vec{z} \quad \text{avec } \vec{z} = \text{verticale ascendante}$$

$$\mathbf{T}(\text{pes} \rightarrow \text{S}) = \begin{Bmatrix} \vec{P} \\ \vec{0} \end{Bmatrix} \quad \text{avec } G(\text{barycentre}) \text{ tel que } \int \vec{GM} dm = \vec{0} \Rightarrow m \vec{OG} = \int_{M \in S} \vec{OM} dm$$

Premier théorème de Guldin:

L'aire de la surface engendrée par une courbe plane  $C$  tournant autour d'un axe  $\Delta$  de son plan  $P$ , ne la traversant pas, est égale au produit de la longueur de la courbe par le périmètre du cercle décrit par son centre de gravité.

$$S = 2 \pi r_G L$$

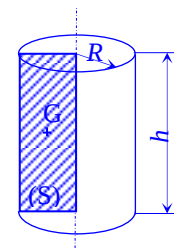
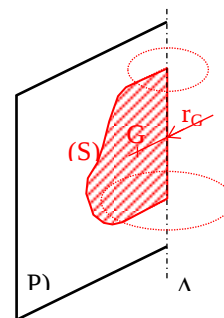


$$S = 2 \pi R h$$

Deuxième théorème de Guldin:

Le volume engendré par une surface  $S$  plane tournant autour d'un axe  $\Delta$  de son plan, ne la traversant pas, est égal au produit de l'aire de la surface par le périmètre du cercle décrit par son centre de gravité.

$$V = 2 \pi r_G S$$

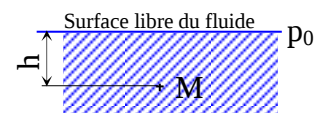


$$V = 2 \pi \cdot R/2 \cdot Rh$$

Ces 2 théorèmes permettent de trouver des surfaces, des volumes ou la position de centres de gravité.

## 1.3.2 - Action hydrostatique d'un fluide sur un solide :

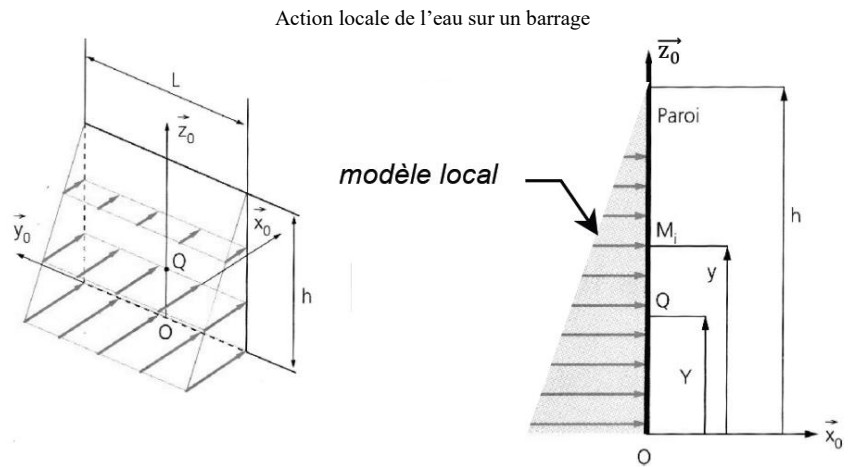
- Pression variable : pression en un point  $M$  d'un fluide :  $p(M) = p_0 + \rho g z$   
avec  $p_0$  = pression à la surface libre du fluide  
 $\rho$  = masse volumique du fluide  
 $g$  = accélération de la pesanteur  
 $z$  = profondeur au point  $M$  depuis la surface libre du fluide



On a alors

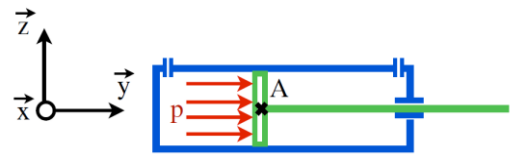
$$\mathbf{T}(\text{fluide} \rightarrow \mathbf{S}) = \left\{ \begin{array}{l} \int_S -p(\mathbf{M}) \vec{n}(\mathbf{M}) dS \\ \int_S \vec{OM} \wedge (-p(\mathbf{M}) \vec{n}(\mathbf{M}) dS) \end{array} \right\}$$

$\vec{n}(\mathbf{M})$  = normale en M dirigée vers l'extérieur du solide isolé



- Pression constante :  $p(\mathbf{M}) = p_0$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{F}(\text{huile} \rightarrow \text{piston}) = p \cdot S \vec{y} \\ \vec{M}_A(\text{huile} \rightarrow \text{piston}) = \vec{0} \end{array} \right\}$$



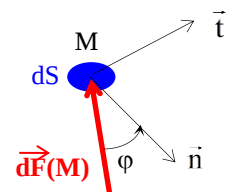
Action de l'huile dans un vérin hydraulique

### 1.3.3 - Actions de contact entre solides :

La répartition des efforts est très complexe (imperfections des surfaces de contact)  $\Rightarrow$  lois empiriques pour fournir des ordres de grandeur : le modèle le plus simple est de choisir une pression uniforme entre les pièces c'est-à-dire  $p(\mathbf{M}) = p_0 = \text{Cte}$

d'où l'action élémentaire en M (à la limite du glissement):

$$\vec{dF}(\mathbf{M}) = -p_0 \cdot dS \cdot \vec{n}(\mathbf{M}) + f \cdot p_0 \cdot dS \cdot \vec{t}(\mathbf{M})$$



On obtient le torseur d'action mécanique en intégrant sur la surface de contact:

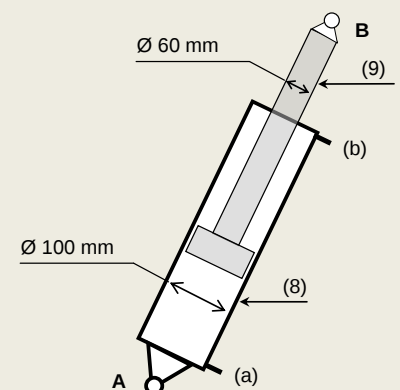
$$\mathbf{T}(\mathbf{S}_2 \rightarrow \mathbf{S}_1) = \left\{ \begin{array}{l} \int_S -p(\mathbf{M}) \vec{n}(\mathbf{M}) dS + q(\mathbf{M}) \vec{t}(\mathbf{M}) dS \\ \int_S \vec{OM} \wedge (-p(\mathbf{M}) \vec{n}(\mathbf{M}) dS + q(\mathbf{M}) \vec{t}(\mathbf{M}) dS) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \int_S -p_0 \vec{n}(\mathbf{M}) dS + f p_0 \vec{t}(\mathbf{M}) dS \\ \int_S \vec{OM} \wedge (-p_0 \vec{n}(\mathbf{M}) dS + f p_0 \vec{t}(\mathbf{M}) dS) \end{array} \right\}$$

### Illustration : ligne de fabrication de tôle d'aluminium

Durant la phase de préparation de la bobine (cassure du cordon de soudure) les vérins VH1 maintiennent l'ensemble (2+3) de manière à appliquer un effort presseur sur la tôle, évitant son déroulement spontané. Dans cette configuration, ce sont les chambres (b) des vérins qui sont alimentées (voir figure ci-contre). La pression d'alimentation des chambres (b) est estimée à  $60 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ . Les chambres (a) sont à l'échappement (on suppose alors une pression nulle).

On se propose de déterminer l'intensité des actions de contact entre les rouleaux et la bobine.

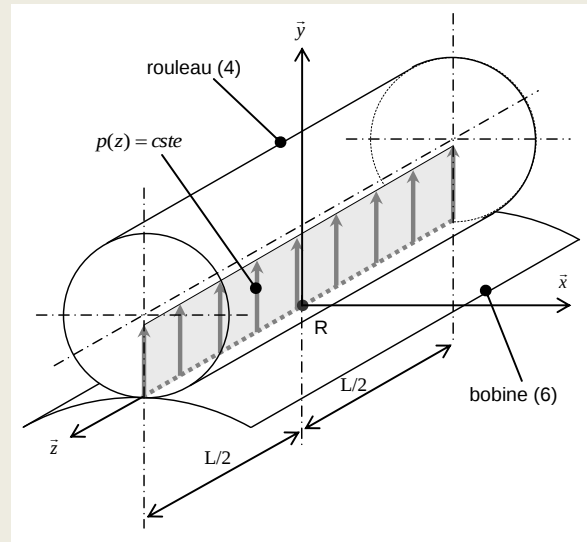
L'intensité des actions mécaniques extérieures mises en jeu sur le système permet de négliger les actions mécaniques de pesanteur.



On modélise les actions de contact entre les rouleaux et la bobine à partir de la géométrie du contact (en supposant une répartition de pression linéique constante ( $p$  en N/m) comme le montre la figure ci-contre).

**Q1 : Déterminer l'expression littérale du torseur de l'action mécanique de la bobine (6) sur un rouleau en R, en fonction de  $p$  et  $L$ .**

la pression de contact  $p$  est supposée cste  
la surface de contact est le segment  $L$  : suivant  $(R, \vec{z})$  de longueur  $L$   
la normale au contact orientée vers l'extérieur du solide isolé est  $\vec{n}(M) = -\vec{y}$   
le frottement est négligé (les rouleaux sont montés libres sur axes de rotation : pas de moteur)



$$\text{donc } \{T_{6 \rightarrow 4}\}_R = \left\{ \begin{array}{l} \int_L -p \vec{n}(M) dl \\ \int_L \overrightarrow{RM} \wedge (-p \vec{n}(M) dl) \end{array} \right\} \text{ avec } \int_L -p \vec{n}(M) dl = p \int_{-L/2}^{L/2} dz \vec{y} = p.L \vec{y}$$

$$\text{et } \int_L \overrightarrow{RM} \wedge (-p \vec{n}(M) dl) = p \int_{-L/2}^{L/2} z \vec{z} \wedge \vec{y} dz = -p \int_{-L/2}^{L/2} z dz \vec{x} = -p \left[ \frac{z^2}{2} \right]_{-L/2}^{L/2} \vec{x} = \vec{0}$$

$$\text{d'où : } \{T_{6 \rightarrow 4}\}_R = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{6/4} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_R = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ +p.L & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{R(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

### 1.3.4 - Actions de contact dans les liaisons sans frottement:

Nous allons chercher à caractériser le torseur des actions mécaniques de contact (ou torseur des inter-efforts ou torseur des efforts transmissibles) entre les solides  $S_1$  et  $S_2$  pour les liaisons normalisées. De façon générale, ce torseur s'écrit:

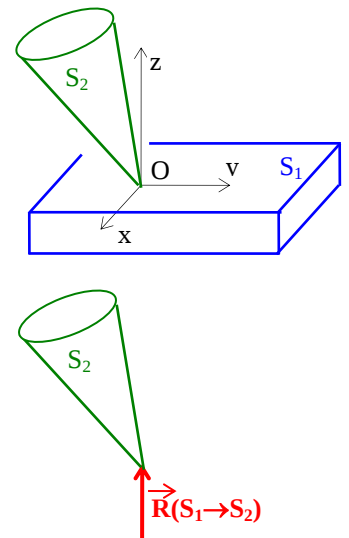
$$T_{(S_1 \rightarrow S_2)} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}(S_1 \rightarrow S_2) \\ \vec{M}_O(S_1 \rightarrow S_2) \end{array} \right\}_O = \left\{ \begin{array}{l} X\vec{x} + Y\vec{y} + Z\vec{z} \\ L\vec{x} + M\vec{y} + N\vec{z} \end{array} \right\}_O = \left\{ \begin{array}{ll} X & L \\ Y & M \\ Z & N \end{array} \right\}_R$$

#### 1.3.4.1 - Contact ponctuel :

Pas de frottement  $\Rightarrow \vec{R}(S_1 \rightarrow S_2)$  porté par la normale en O (point de contact entre  $S_1$  et  $S_2$ ) au plan tangent commun aux 2 solides soit  $\vec{z}$

$$\text{et } \vec{M}_O(S_1 \rightarrow S_2) = \vec{0} \text{ d'où le torseur } T_{(S_1 \rightarrow S_2)} = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ Z & 0 \end{array} \right\}_R$$

Le torseur d'inter-efforts garde cette forme en tout point de l'axe  $\vec{z}$ .



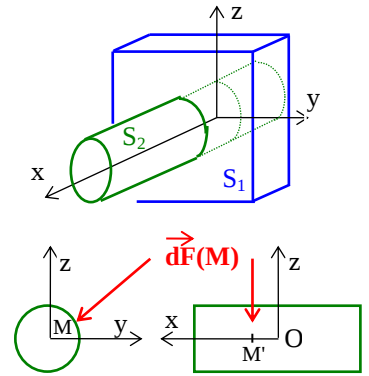
## 1.3.4.2 - Liaison pivot glissant:

Pas de frottement  $\Rightarrow \vec{dF}(M) = -p(M).dS. \vec{n} \perp (O, \vec{x})$

$$\vec{R}(S_1 \rightarrow S_2) = \int_{M \in S_2} -p(M). \vec{n}. dS \perp (O, \vec{x}) \Rightarrow \vec{R}(S_1 \rightarrow S_2) = Y \vec{y} + Z \vec{z}$$

$$\vec{dM} = \vec{OM} \wedge \vec{dF} = (\vec{OM}' + \vec{M'M}) \wedge \vec{dF} = \vec{OM}' \wedge \vec{dF} \perp (O, \vec{x})$$

$$\text{donc } \vec{M}(S_1 \rightarrow S_2) = M \vec{y} + N \vec{z}$$



$$\text{d'où le torseur des inter-efforts de la liaison pivot glissant: } T_{(S_1 \rightarrow S_2)} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}_R$$

(forme identique en tout point de l'axe x)

Remarque: les degrés de liberté de la liaison apparaissent sous forme de composantes nulles dans le torseur statique (pas de transmission possible d'efforts si mouvement entre les 2 solides):

- rotation autour de x  $\Rightarrow$  pas de moment sur x
- translation selon x  $\Rightarrow$  pas de résultante sur x

→ Tableau récapitulatif des formes des torseurs statiques des liaisons:

| Liaison                                                            | Torseur                                                   | Forme particulière conservée           | Liaison                                    | Torseur                                                   | Forme particulière conservée                 |
|--------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------|----------------------------------------|--------------------------------------------|-----------------------------------------------------------|----------------------------------------------|
| ponctuelle de normale $(O, \vec{z})$                               | $\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ Z & 0 \end{Bmatrix}_R$ | points de $(O, \vec{z})$               | pivot glissant d'axe $(O, \vec{x})$        | $\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}_R$ | points de $(O, \vec{x})$                     |
| linéique rectiligne d'axe $(O, \vec{x})$ de normale $(O, \vec{z})$ | $\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M \\ Z & 0 \end{Bmatrix}_R$ | points du plan $(O, \vec{x}, \vec{z})$ | glissière hélicoïdale d'axe $(O, \vec{x})$ | $\begin{Bmatrix} X & L \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}_R$ | points de $(O, \vec{x})$<br>$L = -pX / 2\pi$ |
| linéique annulaire d'axe $(O, \vec{x})$                            | $\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y & 0 \\ Z & 0 \end{Bmatrix}_R$ | au point O                             | glissière d'axe $(O, \vec{x})$             | $\begin{Bmatrix} 0 & L \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}_R$ | en tout point de l'espace                    |
| rotule de centre O                                                 | $\begin{Bmatrix} X & 0 \\ Y & 0 \\ Z & 0 \end{Bmatrix}_R$ | au point O                             | pivot d'axe $(O, \vec{x})$                 | $\begin{Bmatrix} X & 0 \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}_R$ | points de $(O, \vec{x})$                     |
| appui plan de normale $(O, \vec{z})$                               | $\begin{Bmatrix} 0 & L \\ 0 & M \\ Z & 0 \end{Bmatrix}_R$ | en tout point de l'espace              | encastrement                               | $\begin{Bmatrix} X & L \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}_R$ | en tout point de l'espace                    |

## 2 - Isolement d'un système matériel:

Système matériel E = ensemble de solides et fluides qu'on veut étudier (pas nécessairement figé dans une position).

**2.1 - Système isolé:** tout ou partie d'un système matériel que l'on rend distinct de son environnement → *quantité de fluide, partie de pièce, une pièce ou un ensemble de pièces...*

L'espace est donc séparé en 2 parties: le système isolé E et son environnement  $\bar{E}$ .

### 2.2 - Efforts intérieurs et extérieurs:

- efforts extérieurs appliqués à un système E = actions mécaniques exercées par  $\bar{E}$  sur E modélisée par un torseur.
- efforts intérieurs: actions exercées mutuellement par les différentes parties du système isolé.

## 3 - Principe fondamental de la statique:

**3.1 - Équilibre d'un système matériel E par rapport à un repère R:** on dit qu'un système E est en équilibre par rapport à un repère R si, à un instant donné, tous ses éléments sont immobiles par rapport à R.

$$\mathbf{E} \text{ en équilibre / } \mathbf{R} \Leftrightarrow \forall \mathbf{M} \in \mathbf{E}, \vec{V}(\mathbf{M} \in \mathbf{E} / \mathbf{R}) = \vec{0}$$

### 3.2 - Énoncé du principe fondamental de la statique:

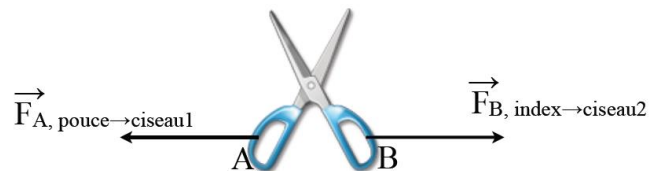
**Si un système matériel E est en équilibre par rapport à un repère galiléen, alors le torseur des actions extérieures qui lui est appliqué est égal au torseur nul.**

$$\mathbf{T}(\bar{\mathbf{E}} \rightarrow \mathbf{E}) = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \vec{0} \end{array} \right\}$$

**Attention à bien écrire les torseurs au même point de réduction!**

 **ce n'est pas une condition suffisante!**

$\mathbf{T}(\text{Ext} \rightarrow \text{ciseaux}) = \{0\}$  mais les ciseaux ne sont pas en équilibre !



Repères galiléens approchés (cf cours de physique):

- repère de Copernic (centre = soleil, directions = 3 étoiles)  $\Rightarrow$  étude des fusées
- repère défini par le centre d'inertie de la terre et les directions de 3 étoiles

$\Rightarrow$  mouvement des corps restant au voisinage de la terre ou expériences terrestres de longue durée

- repère lié à la terre  $\Rightarrow$  études abordées en S.I.

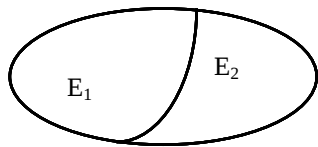
### 3.3 - Théorèmes généraux de la statique:

- Théorème de la Résultante Statique : **E en équilibre /  $\mathbf{R}_g \Rightarrow \vec{\mathbf{R}}(\bar{\mathbf{E}} \rightarrow \mathbf{E}) = \vec{0}$**

- Théorème du Moment Statique : **E en équilibre /  $\mathbf{R}_g \Rightarrow \vec{\mathbf{M}}_0(\bar{\mathbf{E}} \rightarrow \mathbf{E}) = \vec{0}$**  ( $\forall$  le point O)

Conséquence: en projetant ces 2 équations vectorielles sur un repère orthonormé, on trouve 6 équations scalaires; la résolution d'un problème de statique revient donc à écrire et résoudre un système de 6 équations scalaires.

### 3.4 - Théorème des actions réciproques (ou mutuelles): Soit $E = E_1 \cup E_2$



$$T(\bar{E} \rightarrow E) = T(\bar{E} \rightarrow E_1) + T(\bar{E} \rightarrow E_2) = \{0\} \quad (1)$$

$$T(\bar{E}_1 \rightarrow E_1) = T(E_2 \rightarrow E_1) + T(\bar{E} \rightarrow E_1) = \{0\} \quad (2)$$

$$T(\bar{E}_2 \rightarrow E_2) = T(E_1 \rightarrow E_2) + T(\bar{E} \rightarrow E_2) = \{0\} \quad (3)$$

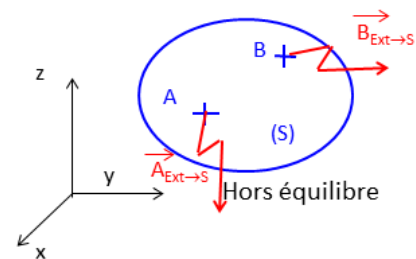
$$(1) - (2) - (3) \quad T(E_2 \rightarrow E_1) + T(E_1 \rightarrow E_2) = \{0\}$$

**Si un système matériel  $E_1$  exerce une action mécanique sur un autre système  $E_2$ , alors  $E_2$  exerce sur  $E_1$  une action opposée.**

### 3.5 - Équilibre d'un solide (ou ensemble de solides) soumis à 2 actions modélisables par des glisseurs:

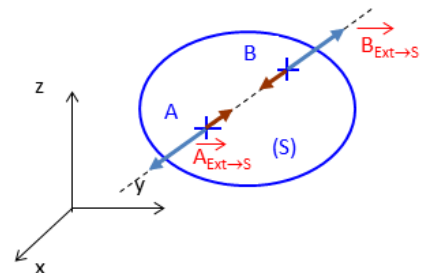
Notation:  $\vec{A}_{\text{Ext} \rightarrow S}$  = effort modélisable par un glisseur exercé en A par l'extérieur sur S

$$T_A(\text{Ext} \rightarrow S) = \left\{ \begin{array}{c} \vec{A}_{\text{Ext} \rightarrow S} \\ \vec{0} \end{array} \right\} \quad \text{et} \quad T_B(\text{Ext} \rightarrow S) = \left\{ \begin{array}{c} \vec{B}_{\text{Ext} \rightarrow S} \\ \vec{0} \end{array} \right\}$$



$$S \text{ en équilibre} \Rightarrow \begin{cases} \vec{A}_{\text{Ext} \rightarrow S} + \vec{B}_{\text{Ext} \rightarrow S} = \vec{0} & (1) \\ \overrightarrow{AB} \wedge \vec{B}_{\text{Ext} \rightarrow S} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \text{ et } \vec{B}_{\text{Ext} \rightarrow S} \text{ colinéaires donc } \vec{B}_{\text{Ext} \rightarrow S} \text{ passe par A} \end{cases}$$

de (1)  $\vec{A}_{\text{Ext} \rightarrow S}$  opposé à  $\vec{B}_{\text{Ext} \rightarrow S}$  donc  $\vec{A}_{\text{Ext} \rightarrow S}$  passe par B.  
les normes et les sens des forces restent inconnus.

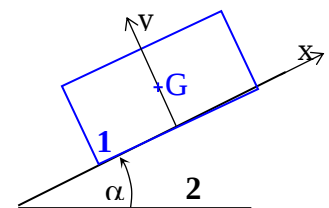


**Théorème: si un solide (ou un ensemble de solides) est en équilibre sous l'action de 2 efforts modélisables par des glisseurs, ceux-ci sont colinéaires et de somme nulle.**

Exemple: solide sur un plan incliné

On suppose l'action de 2 sur 1 modélisable par un glisseur.

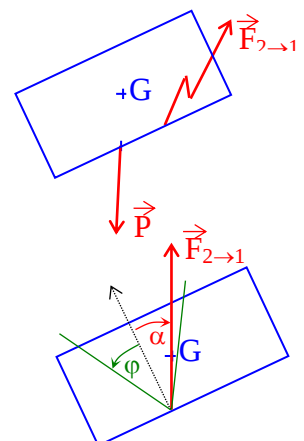
Déterminons le coefficient de frottement minimal pour que 1 reste en équilibre.



a – on isole le solide 1 et on fait le bilan des actions extérieures:

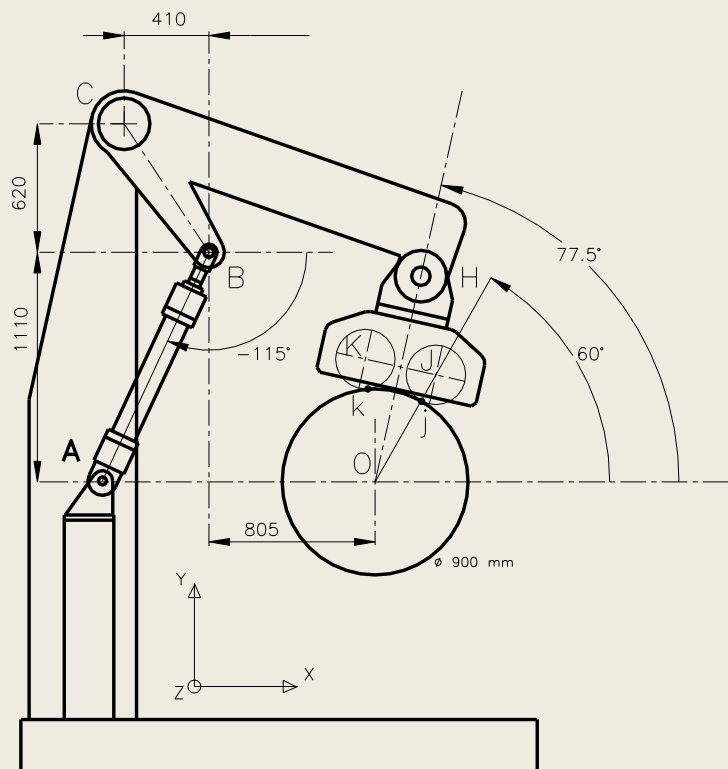
b – 1 est en équilibre sous l'action de deux glisseurs: ils sont donc directement opposés  $\Rightarrow \vec{F}_{2 \rightarrow 1}$  est vertical et passe par G

c -  $\vec{F}_{2 \rightarrow 1}$  est à l'intérieur du cône de frottement  
 $\Rightarrow 1$  reste en équilibre si  $\alpha < \varphi$

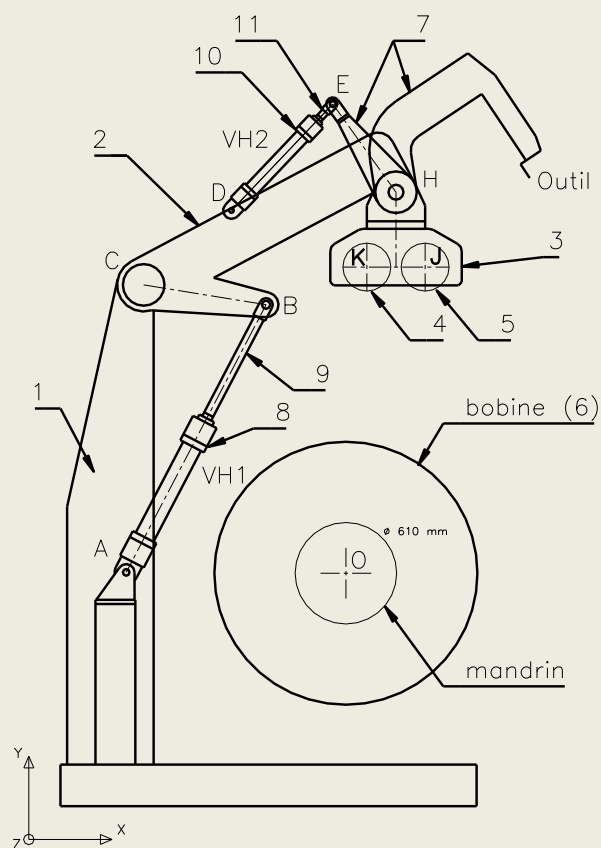


**Illustration :** ligne de fabrication de tôle d'aluminium

### ETUDE DE LA POSITION BASSE (CONFIGURATION AVEC CONTACT)



Position basse avec contact rouleaux (4) et (5) avec (6)



Position haute sans contact rouleaux (4) et (5) avec (6)

On suppose que les liaisons en A et B sont des liaisons rotules parfaites.

Q2 : Justifier que le support de  $\vec{B}_{9 \rightarrow 2}$  (résultante des actions mécaniques des deux vérins VH1 sur 2) est porté par la droite (AB).

On isole l'ensemble 8+9+fluide contenu dans le vérin. Il est soumis à l'action de la pesanteur que l'on néglige et aux actions en A et B.

$$\left\{ \begin{matrix} \vec{T}_{1 \rightarrow 8} \\ \vec{M}_A(1 \rightarrow 8) \end{matrix} \right\}_A = \left\{ \begin{matrix} \vec{X}_{18} \\ \vec{Y}_{18} \\ \vec{Z}_{18} \end{matrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right\}_A \text{ et } \left\{ \begin{matrix} \vec{T}_{2 \rightarrow 9} \\ \vec{M}_B(2 \rightarrow 9) \end{matrix} \right\}_B = \left\{ \begin{matrix} \vec{X}_{29} \\ \vec{Y}_{29} \\ \vec{Z}_{29} \end{matrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right\}_B \quad \text{ce sont des glisseurs}$$

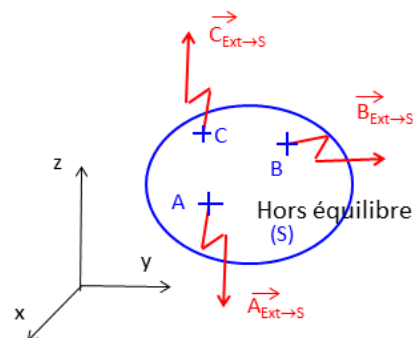
Le TMS nous dit que ces glisseurs ont même support, la droite passant par leur point d'application : (AB)

### 3.6 - Équilibre d'un solide (ou ensemble de solides) soumis à 3 actions modélisables par des glisseurs:

$$\mathbf{T}_A(\text{Ext} \rightarrow \mathbf{S}) = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\mathbf{A}}_{\text{Ext} \rightarrow \mathbf{S}} \\ \vec{\mathbf{0}} \end{array} \right\}_A \quad \mathbf{T}_B(\text{Ext} \rightarrow \mathbf{S}) = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\mathbf{B}}_{\text{Ext} \rightarrow \mathbf{S}} \\ \vec{\mathbf{0}} \end{array} \right\}_B$$

$$T_C(\text{Ext} \rightarrow S) = \left\{ \begin{array}{c} \vec{C}_{\text{Ext} \rightarrow S} \\ \vec{0} \end{array} \right\}$$

$$\text{S en \u00e9quilibre} \Rightarrow \begin{cases} \vec{A}_{\text{Ext} \rightarrow \text{S}} + \vec{B}_{\text{Ext} \rightarrow \text{S}} + \vec{C}_{\text{Ext} \rightarrow \text{S}} = \vec{0} & (1) \\ \overrightarrow{AB} \wedge \vec{B}_{\text{Ext} \rightarrow \text{S}} + \overrightarrow{AC} \wedge \vec{C}_{\text{Ext} \rightarrow \text{S}} = \vec{0} & (2) \end{cases}$$



$$\begin{aligned} \vec{X} = \overrightarrow{AB} \wedge \vec{B}_{\text{Ext} \rightarrow S} & \quad \perp \overrightarrow{AB} \text{ et } \perp \vec{B}_{\text{Ext} \rightarrow S} & \text{donc } \perp \text{ au plan } P_1 \text{ contenant } A, B \text{ et } \vec{B}_{\text{Ext} \rightarrow S} \\ \vec{Y} = \overrightarrow{AC} \wedge \vec{C}_{\text{Ext} \rightarrow S} & \quad \perp \overrightarrow{AC} \text{ et } \perp \vec{C}_{\text{Ext} \rightarrow S} & \text{donc } \perp \text{ au plan } P_2 \text{ contenant } A, C \text{ et } \vec{C}_{\text{Ext} \rightarrow S} \end{aligned}$$

de (2),  $\vec{X}$  et  $\vec{Y}$  sont colinéaires donc les plans  $P_1$  et  $P_2$  ont une normale commune et un point commun  $A \Rightarrow$  ils sont confondus donc  $\vec{B}_{\text{Ext} \rightarrow S}$  et  $\vec{C}_{\text{Ext} \rightarrow S}$  appartiennent au même plan  $P_1 = P_2 = P$

de (1),  $\vec{A}_{\text{Ext} \rightarrow S} \in P \Rightarrow$  les 3 glisseurs  $\vec{A}_{\text{Ext} \rightarrow S}$ ,  $\vec{B}_{\text{Ext} \rightarrow S}$  et  $\vec{C}_{\text{Ext} \rightarrow S}$  sont coplanaires.

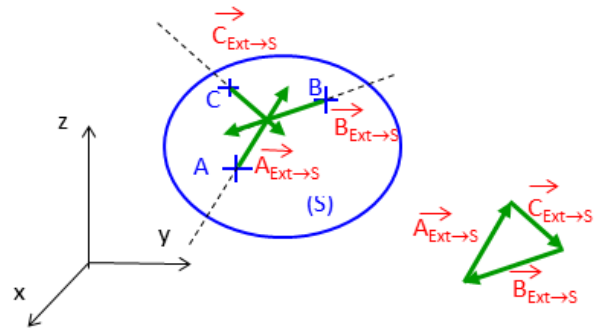
\* soit  $I$  l'intersection de  $\vec{A}_{\text{Ext} \rightarrow S}$  et de  $\vec{B}_{\text{Ext} \rightarrow S}$  si elle existe  $\Rightarrow$   
 $\vec{M}_I(\vec{A}_{\text{Ext} \rightarrow S}) = \vec{0}$  et  $\vec{M}_I(\vec{B}_{\text{Ext} \rightarrow S}) = \vec{0}$

Exprimons le théorème du moment statique en  $I$ :  $\vec{M}_I(\vec{A}_{\text{Ext} \rightarrow S}) + \vec{M}_I(\vec{B}_{\text{Ext} \rightarrow S}) + \vec{M}_I(\vec{C}_{\text{Ext} \rightarrow S}) = \vec{0}$

d'où  $\vec{M}_I(\vec{C}_{\text{Ext} \rightarrow S}) = \vec{0}$  donc  $\vec{C}_{\text{Ext} \rightarrow S}$  passe par  $I \Rightarrow$  Les 3 glisseurs sont alors concourants en  $I$ .

\* si  $I$  n'existe pas, alors  $\vec{A}_{\text{Ext} \rightarrow S} // \vec{B}_{\text{Ext} \rightarrow S}$

d'après le théorème de la résultante, la somme des 3 glisseurs est nulle donc  $\vec{C}_{\text{Ext} \rightarrow S} // \vec{A}_{\text{Ext} \rightarrow S}$



**Théorème:** Si un solide, soumis à trois actions modélisables par des glisseurs, est en équilibre, alors ces trois glisseurs sont:

- coplanaires
- concourants ou parallèles
- de somme vectorielle nulle.

### Illustration : ligne de fabrication de tôle d'aluminium

#### ETUDE DE LA POSITION BASSE (CONFIGURATION AVEC CONTACT)

On appelle respectivement  $k$  et  $j$  les points de contact entre la bobine et les rouleaux (4 et 5) de centre  $K$  et  $J$ . On considèrera une rotule comme modèle de liaison pour la liaison en  $H$ .

Q3 : Justifier par un raisonnement simple que les actions de contact en  $k$  et  $j$  ont même intensité. On pourra isoler le sous-système  $ss = \{ \text{tête (3)} + \text{rouleaux (4 et 5)} \}$  afin d'étayer le raisonnement.

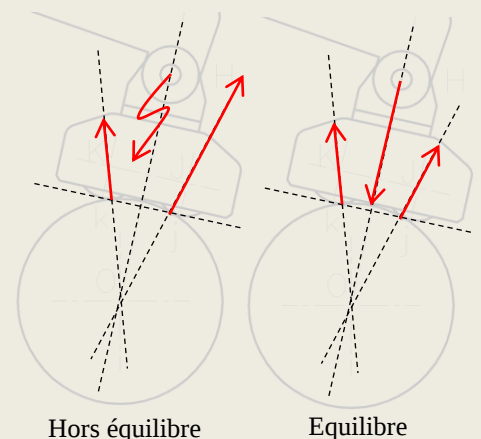
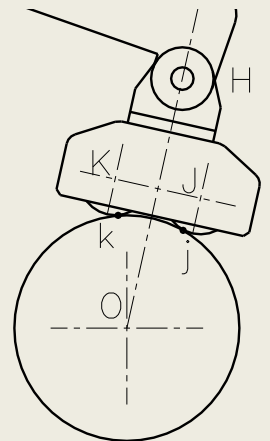
On isole le sous-système  $ss = \{ \text{tête (3)} + \text{rouleaux (4 et 5)} \}$ . Soumis à l'action :

$\vec{k}_{6 \rightarrow 4}$  : glisseur de direction  $(Ok)$  car frottement négligé (question 2)

$\vec{j}_{6 \rightarrow 5}$  : glisseur de direction  $(Oj)$  car frottement négligé (question 2)

$\vec{H}_{2 \rightarrow 3}$  : glisseur (liaison rotule) de direction inconnue

TMS en  $O \Rightarrow \vec{H}_{2 \rightarrow 3}$  de direction  $(OH)$  et TRS en projection sur la perpendiculaire à  $(OH) \Rightarrow$  module des actions en  $k$  et  $j$  de même valeur



## 4 - Applications aux problèmes plans:

Toutes les résultantes appartiennent au même plan (x,y par exemple) et tous les moments sont perpendiculaires à ce plan.

Les torseurs des actions mécaniques ont alors la forme simplifiée suivante:

$$T_{(S_1 \rightarrow S_2)} = \begin{Bmatrix} X & - \\ Y & - \\ - & N \end{Bmatrix}_O \quad \text{Les valeurs représentées par } \_ \text{ ne sont pas nécessairement nulles mais on n'en tient pas compte dans le problème étudié.}$$

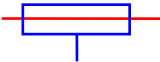
Les torseurs statiques des liaisons planes ont alors les formes suivantes:

- articulation = liaison pivot ou pivot glissant d'axe (A,  $\vec{z}$ ):  $T_{(S_1 \rightarrow S_2)} = \begin{Bmatrix} X & - \\ Y & - \\ - & 0 \end{Bmatrix}_A$




L'action de  $S_1$  sur  $S_2$  est donc modélisable par un glisseur passant par A.

- liaison glissière ou pivot glissant d'axe  $\in \text{plan}(x,y)$ , d'axe (A,  $\vec{x}$ ) par exemple:

$$T_{(S_1 \rightarrow S_2)} = \begin{Bmatrix} 0 & - \\ Y & - \\ - & N \end{Bmatrix}_A$$

Nota: en général, on néglige le poids des pièces devant les efforts mis en jeu dans les liaisons.

### Illustration : ligne de fabrication de tôle d'aluminium

#### ETUDE DE LA POSITION BASSE (CONFIGURATION AVEC CONTACT)

On se propose de déterminer l'intensité des actions de contact entre les rouleaux et la bobine.

La figure correspondant à la position basse donnée précédemment précise, entre autres, les orientations des différents supports des glisseurs d'actions mécaniques, ainsi que les positions relatives des différents points (distances exprimées en millimètres).

**Q4 :** En utilisant les notations adoptées pour l'écriture des torseurs d'action mécanique, déterminer complètement les torseurs d'actions mécaniques extérieures au système (2,3,4,5). Faire les applications numériques. On utilisera comme unités le déca-Newton (daN) et le déca-Newton.mètre (daN.m).

On étudie l'équilibre du système (2,3,4,5) :

En prenant les hypothèses suivantes :

- problème plan
- liaisons parfaites
- pesanteur négligée

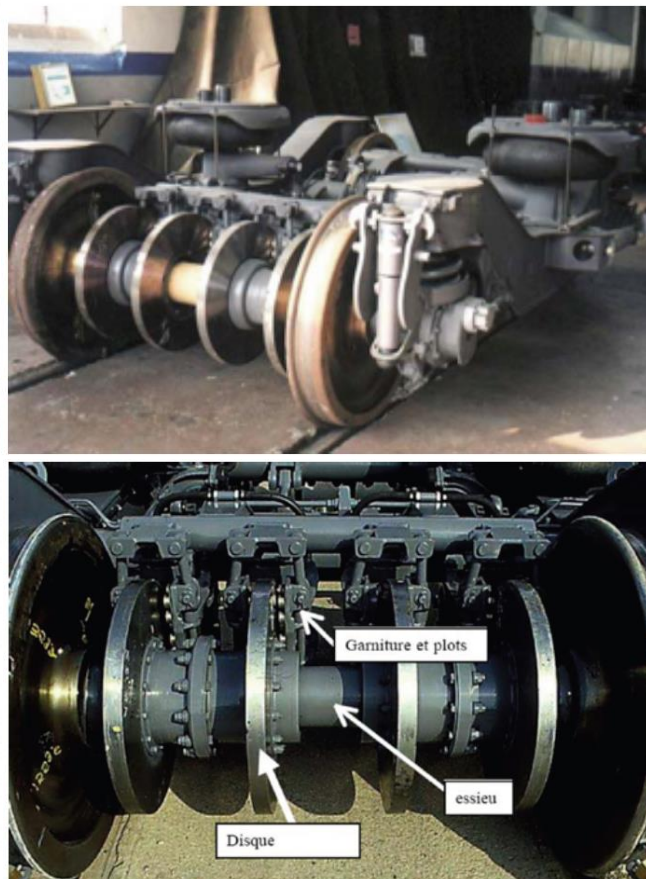
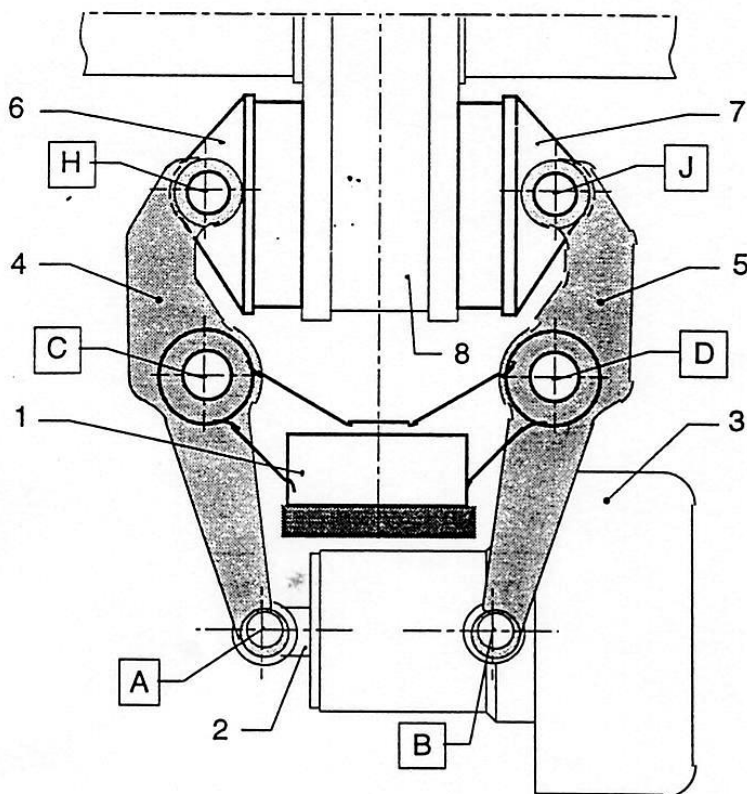
les actions mécaniques sont toutes modélisables par des glisseurs ce qui permet l'interprétation graphique page suivante

Le bilan des AME s'établit avec les notations conventionnelles et  $\|\vec{k}_{6/S2}\| = \|\vec{j}_{6/S2}\| = R$  :

• action des 2 tiges 9 des vérins:  $\{T_{9/S2}\}_B = \begin{Bmatrix} \vec{B}_{9/S2} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_B = \begin{Bmatrix} X_B & 0 \\ Y_B & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{R_1(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)} = \begin{Bmatrix} B \cos(-115^\circ) & 0 \\ B \sin(-115^\circ) & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{R_1(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)}$

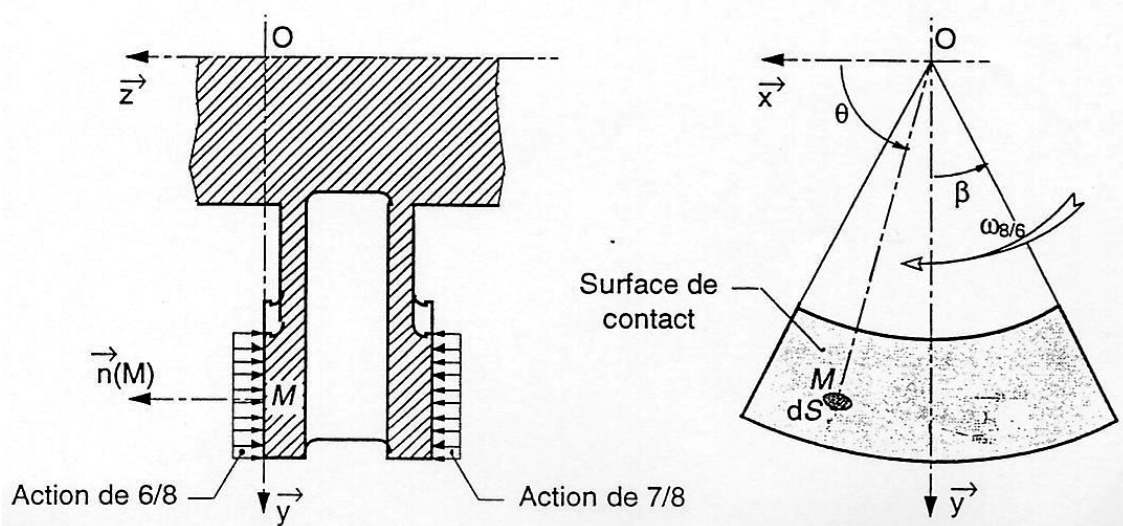


## Frein à disque de TGV



Ce frein est composé d'un vérin hydraulique flottant (2,3) agissant sur deux leviers mobiles (4) et (5) en rotation par rapport au châssis (1) et assurant l'effort presseur des plaquettes (6) et (7) sur le disque (8).

La répartition de pression sur le disque est uniforme :  $p(M) = p_0$  (avec  $p_0$  constante)



Les plaquettes de frein sont des sections circulaires d'angle  $2\beta$ , de rayon intérieur  $R_1$  et de rayon extérieur  $R_2$  :

$$\frac{\Pi}{2} - \beta \leq \theta \leq \frac{\Pi}{2} + \beta \quad \text{et} \quad R_1 \leq r \leq R_2$$

Le coefficient de frottement entre les plaquettes de frein et le disque est noté  $f$ .

En faisant l'hypothèse que le système est à la limite du glissement :

1. Déterminer le torseur des actions mécaniques de (6) sur (8) au point O.
2. Déterminer (s'il existe) le point A (appelé point d'application de l'effort) tel que les actions mécaniques de (6) sur (8) soient modélisables par un glisseur.