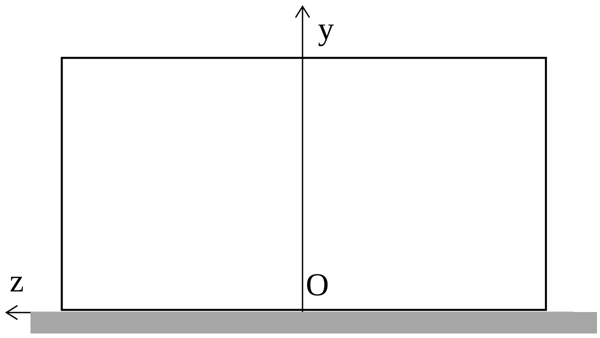
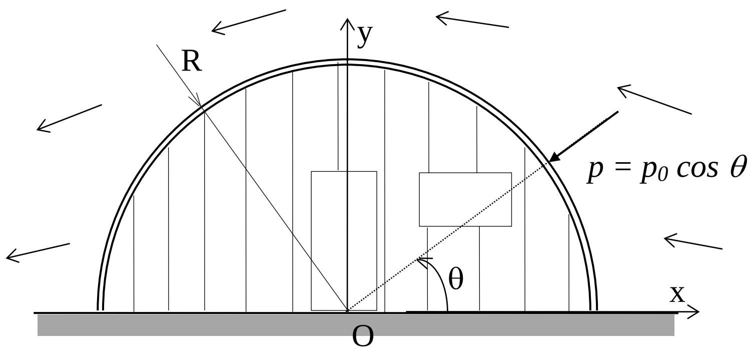
Exercice :

Le hangar ci-dessous, demi-cylindrique de rayon *R* et de longueur *L* selon z, est soumis à un vent horizontal. On peut approximer la pression *p* agissant sur la toiture par $p_0 \cos\theta$. La pression est donc positive du côté du hangar qui est au vent (x > 0) et négative du côté sous le vent (x < 0).

Déterminer le torseur en O représentant l'action du vent sur le hangar.





Corrigé

$$T_{vent\to hangar}=\begin{Bmatrix} \vec{R}_{vent\to hangar}=\int -p(M)\vec{n}(M)ds \\ \vec{M}_{O,vent\to hangar}=\int -\overrightarrow{OM}\wedge p(M)\vec{n}(M)ds \end{Bmatrix}_O$$

$$p(M)=p_0\cos\theta$$

$$\vec{n}(M)=\overrightarrow{er}$$

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OM'}+\overrightarrow{M'M}=z\,\vec{z}+R\overrightarrow{er}$$ (M' projeté de M sur l'axe (O,z))

$$ds=Rd\theta dz \text{ avec } \theta\in[0,\pi] \text{ et } z\in\left[-\frac{L}{2},\frac{L}{2}\right]$$

$$\vec{R}_{vent\to hangar}=\int -p(M)\vec{n}(M)ds=\iint -p_0\cos\theta\, Rd\theta dz\overrightarrow{er}$$

On projette :

$$\vec{R}_{vent\to hangar}.\vec{x}=\iint -p_0\cos\theta\,Rd\theta dz\overrightarrow{er}.\vec{x}=-p_0R\iint\cos^2\theta\,d\theta dz=-p_0R\int_0^{\pi}\cos^2\theta\,d\theta\int_{-L/2}^{L/2}dz$$

- $$\vec{R}_{vent\to hangar}.\vec{x}=\frac{-p_0RL}{2}\int_0^{\pi}1+\cos 2\theta\,d\theta=\frac{-p_0RL}{2}\left[\theta+\frac{\sin\theta}{2}\right]_0^{\pi}=\frac{-p_0RL}{2}\pi$$
- $$\vec{R}_{vent\to hangar}.\vec{y}=\iint -p_0\cos\theta\,Rd\theta dz\overrightarrow{er}.\vec{y}=-p_0R\iint\cos\theta\sin\theta\,d\theta dz=\frac{-p_0RL}{2}\left[\frac{X^2}{2}\right]_{\sin 0}^{\sin\pi}=0$$
- $$\vec{R}_{vent\to hangar}.\vec{z}=\iint -p_0\cos\theta\,Rd\theta dz\overrightarrow{er}.\vec{z}=0$$

$$\vec{M}_{O,vent\to hangar}=\int -\overrightarrow{OM}\wedge p(M)\vec{n}(M)ds=\iint(z\,\vec{z}+R\overrightarrow{er})\wedge(-p_0\cos\theta\,Rd\theta dz\overrightarrow{er})=-p_0R\iint z\cos\theta\,d\theta dz\vec{e}_\theta$$

On projette :

- $$\vec{M}_{O,vent\to hangar}.\vec{x}=-p_0R\iint z\cos\theta\,d\theta dz\vec{e}_\theta.\vec{x}=p_0R\iint z\cos\theta\sin\theta\,d\theta dz=p_0R\int_0^{\pi}\cos\theta\sin\theta\,d\theta\int_{-L/2}^{L/2}zdz=0$$
- $$\vec{M}_{O,vent\to hangar}.\vec{y}=-p_0R\iint z\cos\theta\,d\theta dz\vec{e}_\theta.\vec{y}=p_0R\iint z\cos^2\theta d\theta dz=0$$
- $$\vec{M}_{O,vent\to hangar}.\vec{z}=-p_0R\iint z\cos\theta\,d\theta dz\vec{e}_\theta.\vec{z}=0$$