Exercice :

Le dispositif représenté figure 1 permet de maintenir constant le niveau dans un bassin. A partir d'une certaine hauteur d'eau h, la vanne s'ouvre automatiquement sous l'action des forces de pression. Lorsque le niveau de l'eau a baissé, la vanne se referme sans intervention. La vanne a une forme rectangulaire de hauteur $b = 0{,}6\,m$ et de longueur $2L = 1m$ $(-L \leq y \leq L)$.

La vanne est articulée par rapport au barrage en A tel que $\overrightarrow{OA} = a.\vec{z}$

L'eau exerce sur la vanne une action mécanique définie par une densité surfacique d'effort : $f(M) = \rho_e.g.(h-z)$ où ρ_e est la masse volumique de l'eau et g l'accélération de la pesanteur.

On donne : $\rho_e = 1kg/dm^3$ $\quad g = 9{,}81m/s^2$ $\quad a = 0{,}27\,m$

Question 1 : Déterminer en **O** le torseur d'action mécanique exercée par l'eau sur la vanne.

Question 2 : Déterminer la position du centre de poussée de l'eau sur la vanne (le centre de poussée est tel que l'action de l'eau sur la vanne soit modélisable par un glisseur). En déduire à partir de quelle hauteur h la vanne s'ouvre.
Faire l'application numérique.

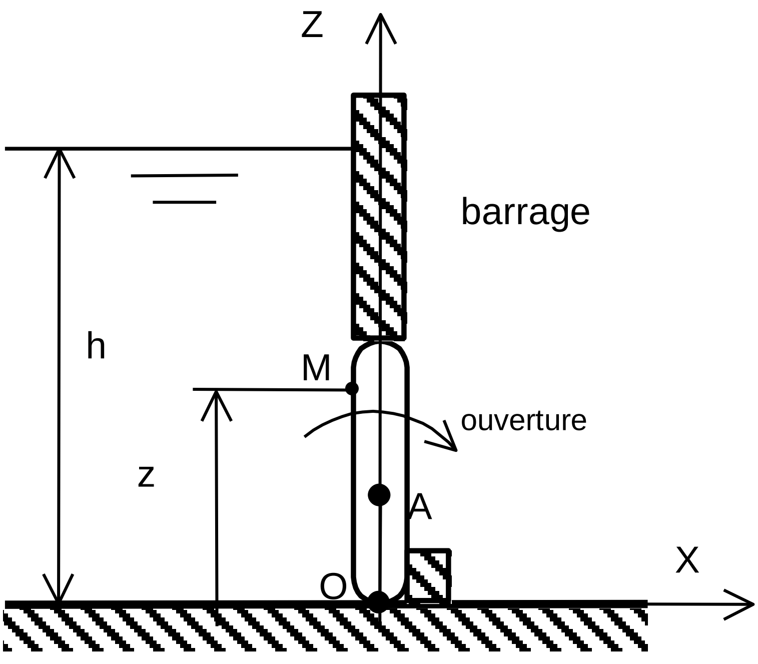

figure 1

CORRIGE

Q1- <u>Modélisation locale</u> :

$$\overrightarrow{dF} = p(M).dS.\vec{x}$$

$$\overrightarrow{dM_M} = \vec{0},\ \overrightarrow{dM_O} = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{dF} = (y.\vec{y} + z.\vec{z}) \wedge p(M).dS.\vec{x} = p(M).dS.(-y.\vec{z} + z.\vec{y})$$

<u>Modélisation globale</u> : intégrons en coordonnées cartésiennes (dS = dy.dz)

$$\vec{F} = \rho_e.g.\int_0^b \int_{-L}^{L} (h-z).dy.dz.\vec{x} = \rho_e.g.2L.b.(h-\frac{b}{2}).\vec{x}$$

$$\overrightarrow{M_O} = \int_0^b \int_{-L}^{L} \overrightarrow{dM_O} = \rho_e.g.\int_0^b \int_{-L}^{L} (h-z).(-y.\vec{z} + z.\vec{y}).dy.dz = \rho_e.g.2L.b^2.(\frac{h}{2} - \frac{b}{3}).\vec{y}$$

Q2- Cherchons C tel que $\overrightarrow{M_C} = \vec{0}$; par symétrie, on a $\overrightarrow{OC} = c.\vec{z}$

$$\overrightarrow{M_C} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{M_O} + \overrightarrow{CO} \wedge \vec{F} = \vec{0}$$

On trouve : $\overrightarrow{OC} = b\dfrac{(\frac{h}{2} - \frac{b}{3})}{(h - \frac{b}{2})}\vec{z}$

La vanne s'ouvre automatiquement si c > a, soit $b\dfrac{(\frac{h}{2} - \frac{b}{3})}{(h - \frac{b}{2})} > a$

On trouve donc : $h > \dfrac{b.(2b-3a)}{3.(b-2a)} = 1,3m$