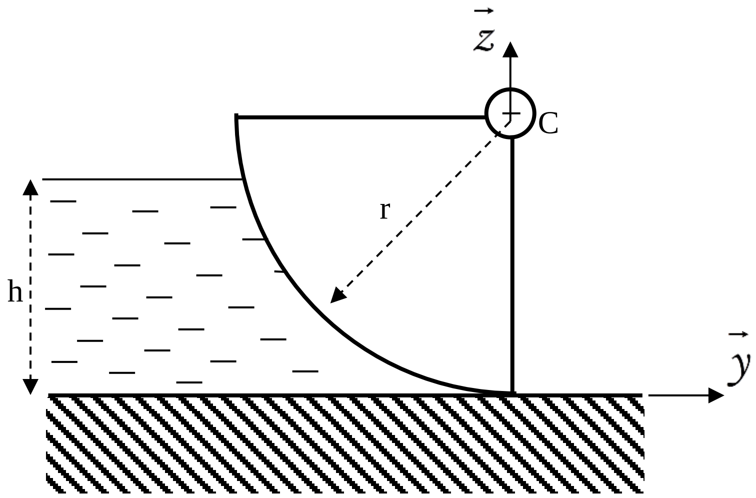
Exercice :

Une vanne secteur de rayon r et de longueur L est schématisée sur le dessin ci-contre. Elle assure la retenue d'une hauteur h d'eau.

A.N.: $\rho_{eau} = 1\ kg.l^{-1}$; $g = 9.81\ m.s^{-2}$; $r = 1.2\ m$
$L = 1\ m$; $h = 0.6\ m$



1. *Exprimer la densité surfacique d'effort de l'action hydrostatique de l'eau sur la vanne.(remarque : cette densité dépend de l'altitude du point où elle est exprimée)*

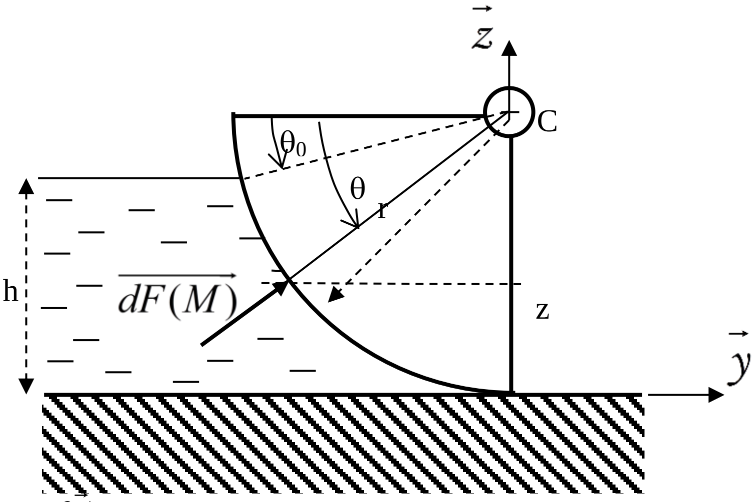
2. *Montrer que la résultante du torseur de l'action de l'eau sur la vanne s'écrit en projection suivant l'axe y :* $R_y = \frac{1}{2}\rho_{eau} g L h^2$

3. *Montrer que la résultante du torseur de l'action de l'eau sur la vanne s'écrit en projection suivant l'axe z :* $R_z = \rho_{eau} g L r \left[\frac{(h-r)}{r}\sqrt{(2r-h)h} + \frac{r}{2}\left(\frac{\pi}{2} - Arc\sin\left(\frac{r-h}{r}\right)\right) + \frac{r-h}{2r}\sqrt{(2r-h)h} \right]$

4. *Déterminer le moment en C du torseur de l'action de l'eau sur la vanne.*

5. *Faire les applications numériques*

Corrigé



Q1 : $\overrightarrow{dF(M)} = -\rho g(h-z)dS\vec{n}$

$$\begin{cases} z = r - r\sin\theta \\ dS = rd\theta L \\ \vec{n} = -\cos\theta\vec{y} - \sin\theta\vec{z} \end{cases}$$

$$\overrightarrow{R_{eau\to vanne}} = \int_{\theta_0}^{\frac{\pi}{2}} \rho g(h-r+r\sin\theta)rd\theta L(\cos\theta\vec{y}+\sin\theta\vec{z})$$

Q2 : $R_y = \rho grL\left\{\left[(h-r)\sin\theta\right]_{\theta_0}^{\frac{\pi}{2}} + r\left[\frac{\sin^2\theta}{2}\right]_{\theta_0}^{\frac{\pi}{2}}\right\}$ **or** $\sin\theta_0 = \dfrac{r-h}{r}$

D'où $R_y = \dfrac{1}{2}\rho_{eau} gLh^2$

Q3 : $R_z = \rho grL\left\{\left[(r-h)\cos\theta\right]_{\theta_0}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{r}{2}\left[\theta\right]_{\theta_0}^{\frac{\pi}{2}} - r\left[\frac{\sin 2\theta}{4}\right]_{\theta_0}^{\frac{\pi}{2}}\right\}$

comme $\cos\theta_0 = \sqrt{1-\sin^2\theta_0} = \dfrac{1}{r}\sqrt{(2r-h)h}$ et $\sin 2\theta_0 = 2\sin\theta_0\cos\theta_0 = \dfrac{2(r-h)}{r^2}\sqrt{(2r-h)h}$

D'où $R_z = \rho_{eau} gLr\left[\dfrac{(h-r)}{r}\sqrt{(2r-h)h} + \dfrac{r}{2}\left(\dfrac{\pi}{2} - Arc\sin\left(\dfrac{r-h}{r}\right)\right) + \dfrac{r-h}{2r}\sqrt{(2r-h)h}\right]$

Q4 : $\overrightarrow{dm(M)} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{dm(C)} = \overrightarrow{CM} \wedge \overrightarrow{dF(M)} = \vec{0}$ donc $\overrightarrow{M_{(C,eau\to vanne)}} = \vec{0}$

On obtient donc :

$$\left\{T_{eau\to vanne}\right\}_C = \left\{\begin{matrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{2}\rho_{eau} gLh^2 & 0 \\ \rho_{eau} gLr\left[\frac{(h-r)}{r}\sqrt{(2r-h)h} + \frac{r}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\theta_0\right) + \frac{r-h}{2r}\sqrt{(2r-h)h}\right] & 0 \end{matrix}\right\}_C$$

Q5 : A.N. : $\left\{T_{eau\to vanne}\right\}_C = \left\{\begin{matrix} 0 & 0 \\ 1770\ N & 0 \\ 4310\ N & 0 \end{matrix}\right\}_C$