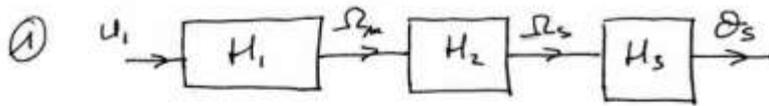


Problème 1: radar



$$G_m(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U_2(p)} = \frac{K_m}{1+T_m p} \quad \text{et} \quad \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = A$$

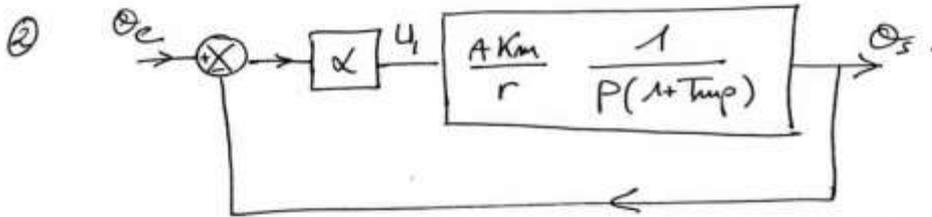
d'où $H_1(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U_1(p)} = \frac{AK_m}{1+T_m p}$

$$\frac{\Theta_s}{\Theta_m} = \frac{1}{r} \quad \text{d'où} \quad \Theta_s = \frac{1}{r} \Theta_m \Rightarrow \frac{d\Theta_s}{dt} = \frac{1}{r} \frac{d\Theta_m}{dt} \Leftrightarrow \omega_s(t) = \frac{1}{r} \omega_m$$

$$\Rightarrow p \Theta_s(p) = \frac{1}{r} p \Theta_m(p)$$

$$\Leftrightarrow \Omega_s(p) = \frac{1}{r} \Omega_m(p)$$

d'où $H_2 = \frac{\Omega_s(p)}{\Omega_m(p)} = \frac{1}{r}$ et $H_3 = \frac{\Theta_s(p)}{\Omega_s(p)} = \frac{1}{p}$.



$$FTBF = \frac{\Theta_s(p)}{\Theta_c(p)} = \frac{H}{1+GH} = \frac{\frac{\alpha AK_m}{r} \frac{1}{P(1+T_m p)}}{1 + \frac{\alpha AK_m}{r} \frac{1}{P(1+T_m p)}} = \frac{1}{1 + \frac{r}{\alpha AK_m} p + \frac{T_m r}{\alpha AK_m} p^2}$$

d'où $\omega_0 = \sqrt{\frac{\alpha AK_m}{r T_m}}$

$$\frac{2m}{\omega_0} = \frac{r}{\alpha AK_m} \Rightarrow m = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{r}{\alpha A T_m K_m}}$$

d'où $\alpha = \frac{1}{4m^2} \frac{r}{A T_m K_m}$ avec $m = m_{\min} \approx 0,7$

d'où $\alpha \approx 63,78$ en V/rad.

avec $m = 0,7 \quad \omega_0 T_r = 3 \Rightarrow T_r = 3 \sqrt{\frac{r T_m}{\alpha AK_m}} \approx 0,168 \text{ s}$

④ $\forall \varphi = 180^\circ + \text{Arg} FTBO(j\omega_1)$ avec $\omega_1 / 20 \log |FTBO(j\omega_1)| = 0$

on lit : $f\omega_1 \approx 1,1 \Rightarrow \omega_1 \approx 12,6 \text{ rad/s}$.

et $\text{Arg} FTBO(j\omega_1) \approx -115^\circ$

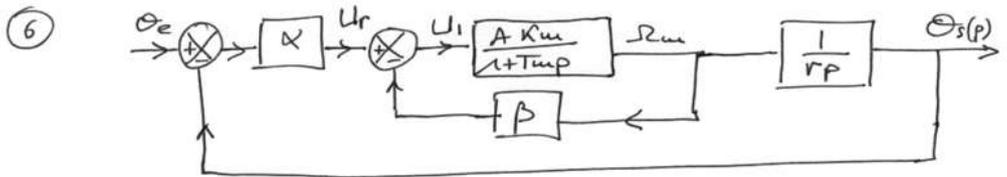
d'où $\boxed{\forall \varphi \approx 65^\circ}$.

⑤ $E_V = \lim_{t \rightarrow \infty} (\Theta_2 - \Theta_3) = \lim_{p \rightarrow 0} p (\Theta_2(p) - \Theta_3(p))$ avec $\Theta_2(p) = \frac{\Omega_0}{p^2}$

$= \lim_{p \rightarrow 0} p \left(\frac{\Omega_0}{p^2} - \frac{1}{1 + \frac{2m}{\omega_0} p + \frac{1}{\omega_0^2} p^2} \frac{\Omega_0}{p^2} \right)$

$= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{\frac{2m}{\omega_0} + \frac{1}{\omega_0^2} p}{1 + \frac{2m}{\omega_0} p + \frac{1}{\omega_0^2} p^2} \Omega_0 = \frac{2m}{\omega_0} \Omega_0 = \frac{r}{\alpha A K_m} \Omega_0$

d'où $\boxed{E_V \approx 0,039 \text{ rad}}$



$FTBF_{\text{interne}} = H_i(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U_r(p)} = \frac{A K_m}{1 + T_m p} = \frac{A K_m}{1 + \frac{A \beta K_m}{1 + T_m p}} = \frac{K}{1 + \frac{T_m}{1 + A \beta K_m} p}$

avec $K = \frac{A K_m}{1 + A \beta K_m}$ et $\zeta = \frac{T_m}{1 + A \beta K_m}$.

$FTBF = \frac{\Theta_3(p)}{\Theta_2(p)} = \frac{\alpha H_i \frac{1}{r p}}{1 + \alpha H_i \frac{1}{r p}} = \frac{1}{1 + \frac{r}{\alpha K} p + \frac{r}{\alpha K} \zeta p^2} = \frac{1}{1 + \frac{2m'}{\omega_0'} p + \frac{1}{\omega_0'^2} p^2}$

$E_V' = \frac{2m'}{\omega_0'} \Omega_0 = \frac{r}{\alpha} \frac{1 + A \beta K_m}{A K_m} \Omega_0 = 0,02 \text{ rad}$.

~~100~~ $m' = 0,7 = \frac{1}{2} \frac{r}{\alpha K} \omega_0 = \frac{1}{2} \frac{r}{\alpha} \left(\frac{1}{A K_m} + \beta \right) \sqrt{\frac{1}{r} \frac{A K_m}{T_m}}$
 $= \frac{1}{2} \frac{E_V'}{\Omega_0} \sqrt{\frac{A K_m}{r T_m}} \sqrt{\alpha}$

d'où $\boxed{\alpha = \frac{4m'^2 \Omega_0^2}{E_V'^2} \frac{r T_m}{A K_m} \approx 245}$ et $\boxed{\beta = \frac{E_V' \alpha}{r \Omega_0} - \frac{1}{A K_m} \approx 4,8}$.

$$\omega_0' T_r' = 3 \Rightarrow T_r' = 3 \sqrt{\frac{r \xi}{\alpha K}} = 3 \sqrt{\frac{r T_m}{\alpha A K_m}} \approx 0,086 \text{ s}$$

$$\text{PTV?} \quad \text{FTBO} = \alpha H_i \frac{1}{r_p} = \frac{\alpha}{r} \frac{25}{1 + \beta K_m} \frac{1}{1 + \frac{T_m}{1 + \beta K_m} p} \frac{1}{p}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{0,02}$

on cherche ω_1' / $20 \log | \text{FTBO}(j\omega_1') | = 0$

$$\Leftrightarrow 20 \log 25 - 20 \log \omega_1' - 20 \log \sqrt{1 + 0,02^2 \omega_1'^2} = 0$$

par dichotomie on obtient $\omega_1' \approx 22,7 \text{ rad/s}$.

$$\text{Arg FTBO}(j\omega_1') = -90^\circ - \text{Arctan } 0,02 \omega_1' \approx 114^\circ$$

$$\text{d'où } \boxed{\text{PTV} = 66^\circ}$$

Conclusion: PTV reste inchangée donc la stabilité du système reste inchangée.

$$T_r' < T_r$$

$$\varepsilon_{\sigma}' < \varepsilon_{\sigma}$$

on a gagné en précision et rapidité.

Problème 2 : Enceinte thermostatée

Q1 - Identification de la F.T.B.O.

La réponse à l'échelon de tension :

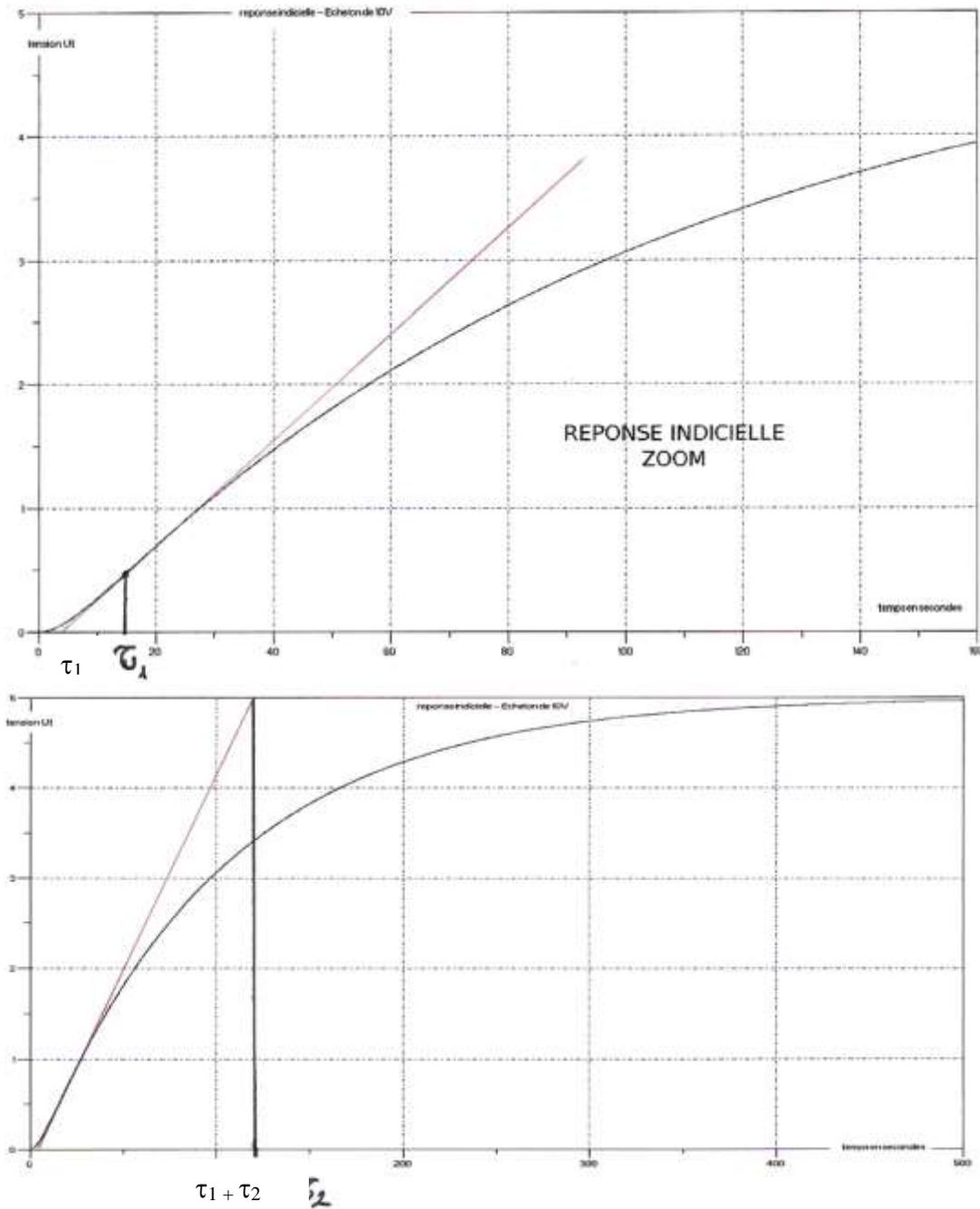
- présente une tangente horizontale à l'origine,
- est aperiodique amorti.

Par conséquent la forme proposée, fonction de transfert du **second ordre** avec pôles **réels négatifs** est pertinente.

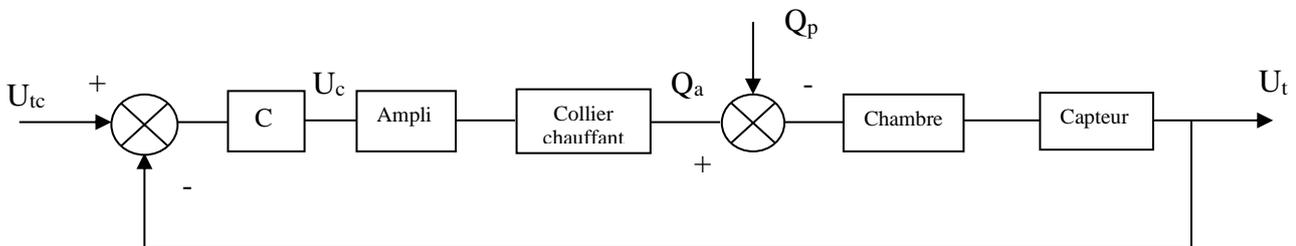
De toute évidence $G = 1/2$

En exploitant la remarque " Si $\tau_1 \ll \tau_2$ on peut approximer τ_1 comme l'intersection..." on relève :

- $\tau_1 \approx 5 \text{ s}$
- $\tau_1 + \tau_2 \approx 120 \text{ s} \Rightarrow \tau_2 \approx 115 \text{ s}$



O2 – Schéma bloc de la régulation



O3 – Temps de réponse du système régulé

$$H_{bf}(p) = \frac{U_t(p)}{U_{tc}(p)} = \frac{H_{bo}(p)}{1 + H_{bo}(p)}$$

car le retour est unitaire.

$$H_{bf}(p) = \frac{1/3}{1 + \frac{105}{1,5} \cdot p + \frac{500}{1,5} \cdot p^2}$$

D'où l'on déduit :

- la pulsation propre ω_0 telle que : $\omega_0^2 = \frac{1,5}{500} = 30 \cdot 10^{-4} \Rightarrow \omega_0 = 5,5 \cdot 10^{-2} \text{ rad.s}^{-1}$

- le facteur d'amortissement ξ tel que : $\frac{2 \cdot \xi}{\omega_n} = 70 \Rightarrow \xi = 1,92 \approx 2$

L'abaque « Temps de réponse réduit pour second ordre » donne :

$\omega_0 \cdot t_{5\%} \approx 12 \Rightarrow t_{5\%} = \underline{\underline{218 \text{ s}}}$ **Incompatible** avec le cahier des charges (Montée en température rapide : 3 mn maximum).

Q4 – Ecart de position – Ecart de traînage

$$\varepsilon_s = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \left(\frac{1}{p} - \frac{0,5}{0,5 + (1 + 5 \cdot p) \cdot (1 + 100 \cdot p)} \cdot \frac{1}{p} \right) = \frac{2}{3} = 66\%$$

$$\varepsilon_v = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \left(\frac{1}{p^2} - \frac{28}{28 + (1 + 5 \cdot p) \cdot (1 + 100 \cdot p)} \cdot \frac{1}{p^2} \right) = \infty$$

$\varepsilon_s = \underline{\underline{0,66}}$ **66 %** **Incompatible** avec le cahier des charges.

Q5 – Diagrammes de Bode de la F.T.B.O.

On procède par superposition : $H_{bo}(j\omega) = H_1(j\omega) \cdot H_2(j\omega) = \frac{0,5}{1 + j \cdot 5\omega} \cdot \frac{1}{1 + j \cdot 100\omega}$

Pulsations de coupure $\omega_1 = 0,2 \text{ rd/s}$; $\omega_2 = 0,01 \text{ rd/s}$

Qd $\omega \rightarrow 0$ $H_{bo} \approx \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} G \approx -6\text{dB} \\ \varphi \approx 0 \end{cases}$

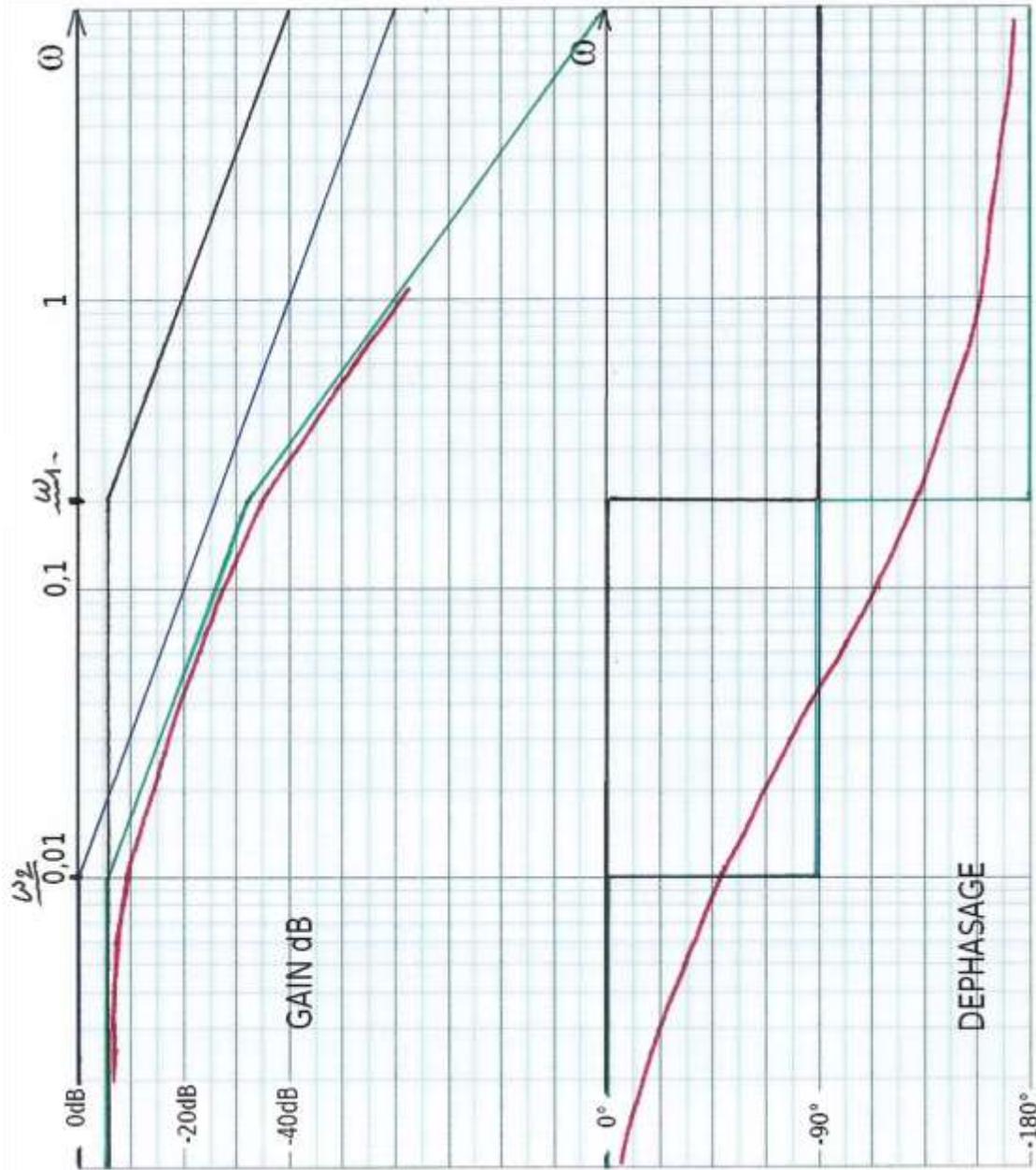
$$G = -6\text{dB} - 10 \cdot \text{Log}(1 + 25 \cdot \omega^2) - 10 \cdot \text{Log}(1 + 10^4 \cdot \omega^2)$$

$$\varphi = -\text{Arc tan}(5 \cdot \omega) - \text{Arc tan}(100 \cdot \omega)$$

| | | | |
|-----------------|------|------|------|
| ω (rd/s) | 0,01 | 0,1 | 1 |
| G (dB) | -9 | -27 | -60 |
| φ (°) | -48 | -115 | -169 |

Valeurs du gain, de la phase à différentes pulsations

Tracé des lieux asymptotiques et réels :



Q6 – Réglage du correcteur à action proportionnelle.

Sur le diagramme de Bode précédent, on lit $G_{dB} = -35dB$ lorsque la phase vaut -135° ; il faut donc translater la courbe de gain de $+35dB$ pour avoir une marge de phase de 45° .

On a donc $20 \log(K) = 35$ soit : **K = 56**

Q7 – Détermination des performances après correction.

Puisque le retour est unitaire, nous avons la FTBF qui vaut :

$$FTBF = \frac{28}{28 + (1 + 5.p).(1 + 100.p)} = \frac{28/29}{1 + \frac{105}{29}.p + \frac{500}{29}.p^2} \quad \text{soit } K = 0,97 ; m = 0,44 ; \omega_0 = 0,24$$

L'abaque du 2nd ordre donne pour $m = 0,44$: $t_r \cdot \omega_0 = 5,5$ soit : **t_r = 23s** < 3 minutes

$$\varepsilon_s = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \left(\frac{1}{p} - \frac{28}{28 + (1 + 5.p) \cdot (1 + 100.p)} \cdot \frac{1}{p} \right) = \frac{1}{29} = 4\%$$

$$\varepsilon_v = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \left(\frac{1}{p^2} - \frac{28}{28 + (1 + 5.p) \cdot (1 + 100.p)} \cdot \frac{1}{p^2} \right) = \infty$$

Conclusion :

En réduisant la marge de phase de 180° à 45° (ce qui est suffisant), nous avons gagné en rapidité (nous passons de 218s à 23s) et nous avons également gagné en précision en position (nous passons de 66% d'erreur à 4%). Par contre la précision en vitesse reste mauvaise.

ATTENTION ! le coefficient d'amortissement est très faible donc il y aura un dépassement de consigne important, ce qui n'est pas tolérable (risque de cuisson des îlots) : **on ne peut donc pas régler K à 56.**

Problème 3 : Ariane 5

Q1. Déterminons les fonctions de transfert A(p), F(p) et le gain Kh

Nous avons :

$$Q = S \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{V}{2B} \cdot \frac{dP}{dt} \xrightarrow{L} Q(p) = S \cdot p \cdot Y(p) + \frac{V}{2B} \cdot p \cdot P(p)$$

$$\text{Soit : } P(p) = \frac{2B}{V \cdot p} Q(p) - \frac{2BS}{V} Y(p)$$

$$\text{D'où } \boxed{A(p) = \frac{1}{S \cdot p}} \quad \text{et} \quad \boxed{K_h = \frac{2BS}{V}}$$

Nous avons

$$M \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} = P(p) \cdot S - K \cdot y - \lambda \cdot \frac{dy}{dt} \xrightarrow{L} M \cdot p^2 \cdot Y(p) = PS - K \cdot Y(p) - \lambda \cdot p \cdot Y(p)$$

$$\text{d'où } \boxed{F(p) = \frac{Y(p)}{P(p)} = \frac{S}{M \cdot p^2 + \lambda \cdot p + K}}$$

Q2. Déterminons l'ordre du système en boucle fermée, le gain statique et la fréquence de résonance

▪ Ordre du système en boucle fermée

D'après le diagramme de Bode, l'asymptote est horizontale quand $\omega \rightarrow 0$ donc la FTBF ne présente pas d'intégrateur.

D'après le diagramme de Bode, l'asymptote de la FTBF quand $\omega \rightarrow \infty$ est une droite dont la pente vaut -60dB/décade, le système est donc d'ordre 3.

▪ Gain statique

D'après le diagramme de Bode, le gain en décibel est nul pour $\omega \rightarrow 0$ donc le gain statique vaut 1.

▪ Fréquence de résonance

On lit sur le diagramme de Bode la pulsation à la résonance $\omega_R = 125 \text{ rad.s}^{-1}$, ce qui correspond à une fréquence de résonance 19,89 Hz.

La fréquence de résonance vaut 20 Hz.

Q3. Vérifions le cahier des charges

- L'écart en régime permanent en réponse à un échelon de position est nul d'après la courbe donnée en annexes car la limite en régime permanent vaut 1. **Ce critère est respecté.**
- Le temps de réponse à 5% est égal à **0,5 s > 0,15s** (d'après la réponse indicielle). **Ce critère n'est pas respecté.**

Q4. Déterminons K_c pour avoir une marge de gain de 10dB.

Sur le diagramme de Black de la FTBO nous lisons un gain de -2dB lorsque le déphasage vaut -180°. Puisque le gain pur K_c n'influe pas sur la phase, il va traduire verticalement la courbe. Pour avoir un gain de -10dB lorsque le déphasage vaut -180°, il faut traduire verticalement de -8dB ce qui correspond à :

$$20 \cdot \log K_c = -8 \text{ dB soit } K_c = 10^{\frac{-8}{20}} = 0,4 \quad \text{d'où } \boxed{K_c = 0,4}$$

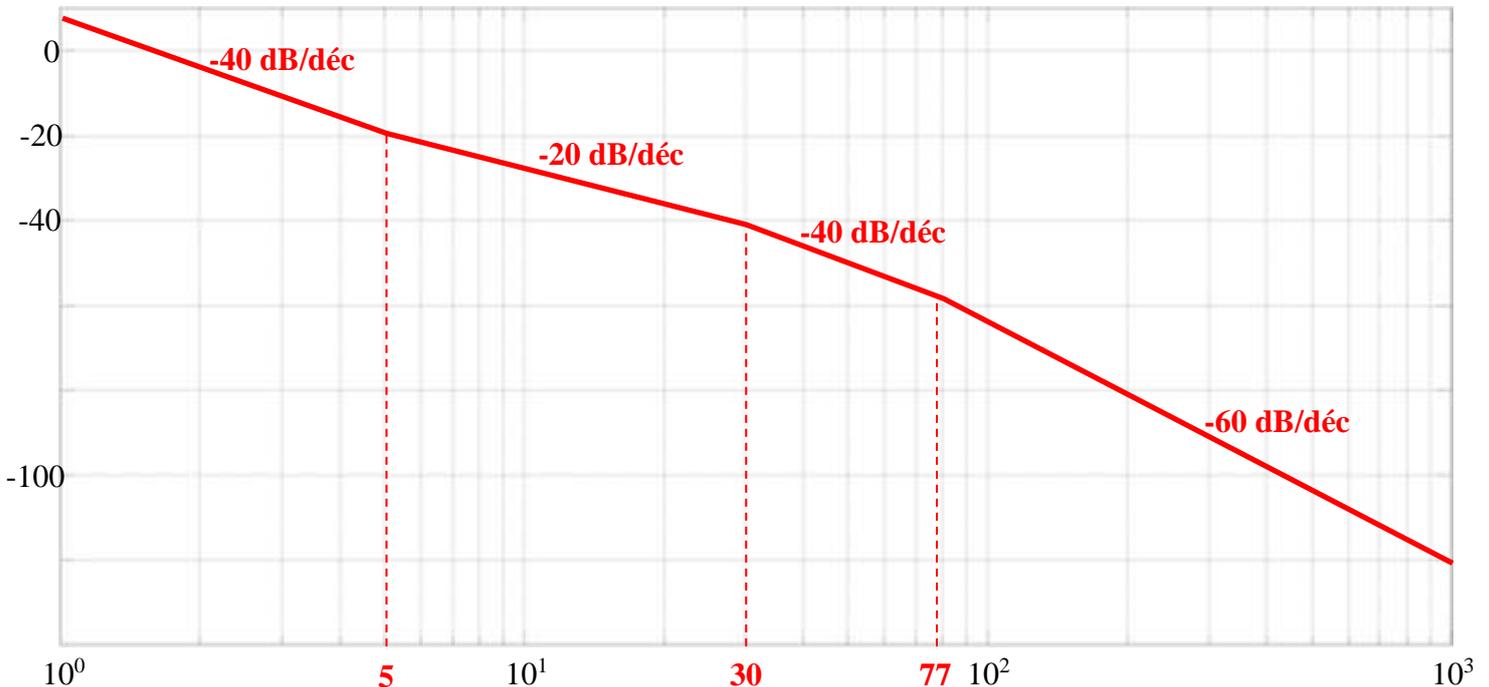
Problème 4 : Etude d'un drone quadrirotor

Q1- Dans le domaine de Laplace : $4\Delta F(p) = mp^2 \Delta Z(p)$ donc $\boxed{\frac{\Delta Z(p)}{\Delta F(p)} = \frac{4}{mp^2}}$

D'où l'expression de la FTBO : $FTBO = 20 K (1+Tp) \frac{37,5}{1+\frac{p}{77}} 0,004 \frac{4}{mp^2} \frac{0,05}{1+\frac{p}{30}}$

$$\boxed{FTBO = 2,5K \frac{1+Tp}{p^2 (1+\frac{p}{30})(1+\frac{p}{77})}}$$

Q2- Diagramme de Bode de la FTBO, tracé asymptotique du gain :



- Q3-** Pour obtenir une marge de phase de 30° , la phase sera : $-180^\circ + 38^\circ = -142^\circ$ pour $G_{dB} = 0dB$.
 Par lecture sur la courbe de phase, cela correspond à la pulsation 10 rad/s .
 A cette pulsation, on lit sur le tracé précédent que le gain de la FTBO vaut environ $-25dB$.
 Ainsi, le gain proportionnel K n'ayant pas d'influence sur la courbe de phase (puisque son argument est nul), il doit permettre de translater la courbe de gain de $+25dB$, soit :

$$20 \log K = 25 \text{ dB} \quad \text{d'où } K = 18$$

- Q4-** Le critère de précision est vérifié car il n'y a pas d'écart statique : le système est de classe 2 en boucle ouverte (double intégrateur).
 Justification calculatoire :

$$FTBF = 0,05 \cdot \frac{20 \cdot K \cdot (1+T \cdot p) \cdot 37,5 \cdot 4 \cdot 10^{-3} \cdot 4 \cdot (1 + \frac{p}{30})}{mp^2 (1 + \frac{p}{30})(1 + \frac{p}{77}) + 0,05 \cdot 20 \cdot K \cdot (1+T \cdot p) \cdot 37,5 \cdot 4 \cdot 10^{-3} \cdot 4}$$

$$\varepsilon_s = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot (1 - FTBF) \cdot \frac{1}{p}$$

$$= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{mp^2 (1 + \frac{p}{30})(1 + \frac{p}{77}) + 0,05 \cdot 20 \cdot K \cdot (1+T \cdot p) \cdot 37,5 \cdot 4 \cdot 10^{-3} \cdot 4 \cdot (1 - (1 + \frac{p}{30}))}{mp^2 (1 + \frac{p}{30})(1 + \frac{p}{77}) + 0,05 \cdot 20 \cdot K \cdot (1+T \cdot p) \cdot 37,5 \cdot 4 \cdot 10^{-3} \cdot 4}$$

$$= 0$$

- Q5-** Un coefficient d'amortissement inférieur à $0,7$ engendre un 1^{er} dépassement supérieur à 5% , donc ce critère du cahier des charges n'est pas vérifié.

- Q6-** Pour $H(p) = \frac{K}{1 + 2\xi \frac{p}{\omega_0} + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$ les pôles vérifient : $1 + 2\xi \frac{p}{\omega_0} + \frac{p^2}{\omega_0^2} = 0$

$$\Delta = \frac{\xi^2}{\omega_0^2} - \frac{1}{\omega_0^2} = \frac{\xi^2 - 1}{\omega_0^2} \quad \text{négatif si } \xi < 1. \quad \boxed{p_{3,4} = -\xi \cdot \omega_0 \pm j \cdot \sqrt{1 - \xi^2} \cdot \omega_0}$$

Sur la figure, on lit pour les pôles dominants $\xi \cdot \omega_0 = 5$ soit $\boxed{\omega_0 = \frac{5}{\xi} = \frac{5}{0,6} = 8 \text{ rad/s}}$

- Q7-** $\boxed{t_{5\%} \approx \frac{5}{\omega_0} = \frac{5}{\frac{5}{0,6}} = 0,6s}$ critère de rapidité tout juste vérifié