MPSI

Programme de colle - semaine 25 du 14/04/2025 au 20/04/2025

1 Changements de base et conséquences

- Matrice de passage d'une base $\mathcal{B}$ à une base $\mathcal{B}'$ (notée $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$). $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E)$. $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ est inversible et son inverse est $P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$ (*)
  Effet d'un changement de base sur les coordonnées d'un vecteur ($X = PY$), sur la matrice d'une application linéaire ($Q^{-1}MP$) (*), d'un endomorphisme ($P^{-1}MP$).
- Matrices équivalentes. C'est une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ (*).
  Toute matrice de rang r est équivalente à J_r. Deux matrices sont équivalentes si et seulement si elles ont le même rang (aucun exercice fait sur les matrices équivalentes).
  Invariance du rang par transposition (*)
- Matrices semblables. C'est une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si deux matrices sont semblables, alors elles ont la même trace (*). Trace d'un endomorphisme. Cas des projections, symétries : matrice dans une base adaptée à la somme directe.
  Exemples de questions visant à montrer qu'une matrice donnée est semblable à une matrice (plus simple) donnée. Dans l'idéal, la démarche est à connaître entièrement, mais ne pas hésiter à donner des indications rapidement en cas de "blocage".
- Opération sur les lignes/colonnes d'une matrice, interprétation en terme de produit matriciel. Application à la recherche du rang.
  Caractérisation de l'inversibilité d'une matrice carrée en terme de rang, noyau, famille libre/génératrice formée par les lignes/colonnes.

2 Forme linéaire, hyperplan, sous-espace affine

Peu d'exercices faits. L'essentiel est de comprendre les 3 caractérisations d'un hyperplan (noyau d'une forme linéaire non nulle, supplémentaire d'une droite, dimension)

- Forme linéaire dans un espace vectoriel. Formes coordonnées dans une base.
- Hyperplan (vectoriel) : c'est le noyau d'une forme linéaire non nulle.
  Si H est un hyperplan de E et si $u_0 \in E \setminus H$, alors $E = H \oplus \mathbb{K}u_0$ (*).
  Inversement, si H est un SEV de E et D une droite vectorielle vérifient $E = H \oplus D$, alors H est un hyperplan de E.
  Caractérisation des hyperplans en dimension finie.
- Sous-espace affine d'un espace vectoriel. En pratique, on n'utilise cette notion que pour les plans ou droites affines dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, ainsi que dans le cadre de la propriété suivante :
  Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $a \in F$. Si l'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = a$ est non vide, alors c'est un sous-espace affine de E, de direction $\operatorname{Ker} f$.

3 Exercices faits

1. Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

   a) Montrer que M est semblable à $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, et donner une matrice de passage P telle que $A = P^{-1}MP$.

   b) En déduire une méthode pour calculer M^n.
   On ne fera pas explicitement le calcul.

2. Exercice long, éventuellement ne donner que le a) ou que le reste.
   Peut être donné avec une matrice plus simple (2×2).
   Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme canoniquement associé à M.

   a) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, déterminer le rang de $M - \lambda I_3$. *On pourra faire plusieurs cas, suivant la valeur de λ.*

   b) Déterminer trois réels distincts λ_i ($i \in [\![1, 3]\!]$) tels que l'équation $MX = \lambda_i X$ admette des solutions $X \in \mathcal{M}_{31}(\mathbb{R})$ non nulles, et pour chacune des valeurs de λ, déterminer une base de l'ensemble des solutions.

   c) Déterminer une base $\mathcal{B}$ de $\mathcal{M}_{31}(\mathbb{R})$ telle que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$ soit diagonale.

   d) Déterminer une matrice P inversible, telle que $P^{-1}MP$ soit diagonale.

3. A et B étant des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ données, on étudie l'équation

$$(E) \,:\, X + (\operatorname{tr} X)A = B \qquad \text{d'inconnue } X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

   Soit $\varphi: \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ X & \longmapsto & X + (\operatorname{tr} X)A \end{array}$

   Les parties a) et b) sont indépendantes.

   a) Cas où $\operatorname{tr} A = 0$.
      En procédant par analyse-synthèse, montrer que (E) a une unique solution et donner son expression.

   b) Cas où $\operatorname{tr} A \neq 0$.
      Soit H l'ensemble des matrices nulles : $H = \{X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \,/\, \operatorname{tr}(X) = 0\}$.

      i) Montrer rapidement que $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = H \oplus \mathbb{K}A$.

      ii) Soit $\mathcal{B}$ une base adaptée à cette somme directe. Déterminer $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\varphi)$.

      iii) En déduire que φ est bijective si et seulement si $\operatorname{tr} A \neq -1$.

      iv) Exprimer $\operatorname{tr} \varphi$ en fonction de A.