

Exercice 1 : centre de gravité (à savoir faire mais rarement demandé aux concours)

Q1- On étudie les symétries pour commencer : par symétrie $G \in (O, \vec{y})$

Il reste donc à calculer la composante suivant $\vec{y}$ de $\overrightarrow{OG}$. On revient à la définition du centre de gravité.

Deux possibilités pour le calcul :

- soit la formule du barycentre si on arrive à décomposer le solide étudié en une association de solides à la géométrie classique : $[(\sum m_i) \overrightarrow{OG}].\vec{y} = [\sum m_i \overrightarrow{OG_i}].\vec{y}$
 - $(\sum m_i)$ est la masse du solide étudié
 - G_i sont les centres de gravités des solides formant le solide étudié
 - c'est la solution ici en décomposant la plaque trouée en un **demi-disque (Solide 1)** et un **rectangle (Solide 2)** de masse négative pour faire un trou.
- Soit la formule la plus générale lorsque la géométrie n'est pas classique : $[m \overrightarrow{OG}].\vec{y} = [\int \overrightarrow{OM} dm].\vec{y}$
 - $m = \int dm$ est la masse du solide étudié
 - C'est la même formule que le barycentre mais en « sommant de manière infinie »
 - C'est nécessaire pour le centre de gravité du demi-disque ici.

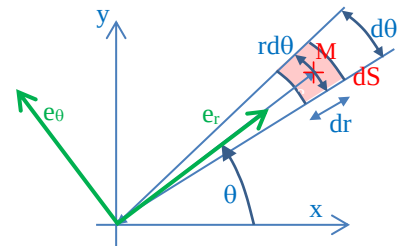
Formule barycentrique : $(m_1 - m_2) \overrightarrow{OG}.\vec{y} = m_1 \overrightarrow{OG_1}.\vec{y} - m_2 \overrightarrow{OG_2}.\vec{y} \quad (i)$

- Détermination de $y_{G1} = \overrightarrow{OG_1}.\vec{y}$ (par symétrie $G_1 \in (O, \vec{y})$) :

Par la méthode intégrale :

On définit :

- ρ la masse surfacique (en kg/m²) supposée constante car matériau homogène
- $r = \|\overrightarrow{OM}\|$ qui varie de 0 à R
- $\theta = (\vec{x}, \vec{e}_r)$ l'angle paramétrant la position de M (coordonnées polaires) variant de 0 à π
- $dS = r.dr.d\theta$ la surface élémentaire



$$[m_1 \overrightarrow{OG_1}].\vec{y} = m_1 y_{G1} = [\int \overrightarrow{OM} dm].\vec{y} = \rho \iint r \cdot \vec{e}_r.\vec{y} \cdot r \cdot dr \cdot d\theta$$

$$m_1 y_{G1} = \rho \int_0^R \int_0^\pi r \cdot \sin \theta \cdot r \cdot dr \cdot d\theta = \rho \cdot \frac{2 \cdot R^3}{3} \quad \text{or} \quad m_1 = \int dm = \int_0^R \int_0^\pi \rho \cdot r \cdot dr \cdot d\theta = \rho \cdot \frac{\pi \cdot R^2}{2}$$

soit $y_{G1} = \frac{4 \cdot R}{3 \cdot \pi}$ (paraît logique : un peu en dessous du milieu, du côté où il y a le plus de matière...)

- Détermination de $y_{G2} = \overrightarrow{OG_2}.\vec{y}$: $y_{G2} = \frac{h}{2}$ et $m_2 = \rho \cdot R \cdot h$

L'équation (i) donne : $\rho \left(\frac{R^2 \pi}{2} - R \cdot h \right) \cdot y_G = \rho \frac{R^2 \pi}{2} \cdot \frac{4R}{3\pi} - \rho \cdot R \cdot h \cdot \frac{h}{2}$

$$\text{d'où} \quad y_G = \frac{\frac{4R^2}{3} - h^2}{R\pi - 2h}$$

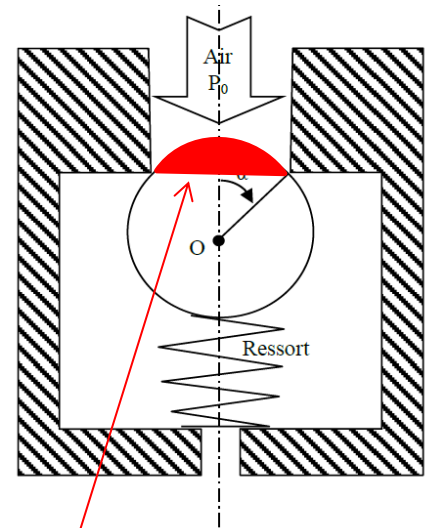
Remarque : autre solution en appliquant le 2^{ème} théorème de Guldin par rotation autour de l'axe (O, x) ; le volume engendré étant une sphère moins un noyau cylindrique.

Exercice 2 : clapet à bille

C'est un système de clapet utilisé dans bon nombre de systèmes de pompe. Le ressort qui pousse la bille vers le haut, empêche l'air de circuler vers le bas (petit orifice en bas). La bille (sphérique) obture la canalisation (grand orifice cylindrique en haut).

Si on augmente la pression P_0 de l'air qui pousse vers le bas la bille, la force de pression de l'air sur la bille va permettre de comprimer le ressort et de libérer l'accès. La bille ne sera plus en contact avec la canalisation haute.

La raideur du ressort va permettre de définir la valeur de pression à partir de laquelle l'air peut circuler.



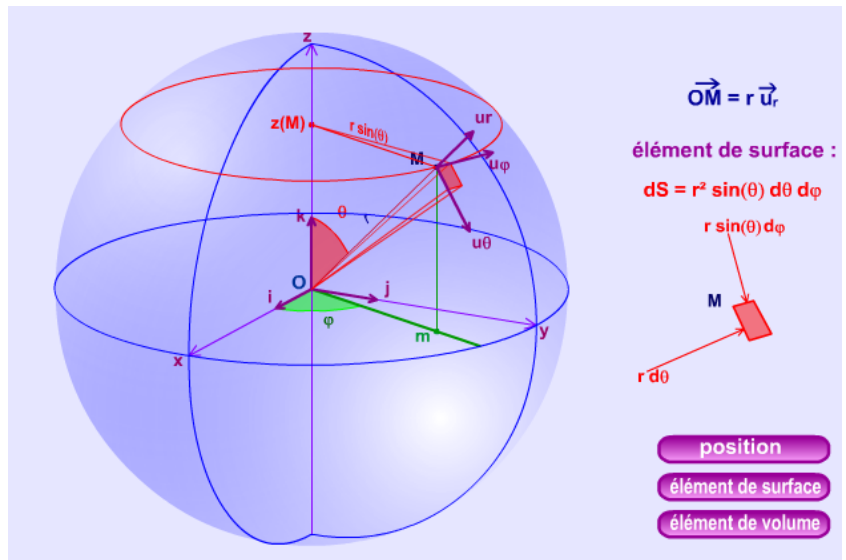
On reprend le cours :

$$\mathbf{T}(\text{air} \rightarrow \text{bille}) = \left\{ \begin{array}{l} \int_S -\mathbf{p}(\mathbf{M}) \mathbf{\bar{n}}(\mathbf{M}) dS \\ \int_o \mathbf{OM} \wedge \mathbf{p}(\mathbf{M}) \mathbf{\bar{n}}(\mathbf{M}) dS \end{array} \right\}$$

La surface de contact air/bille est la **calotte sphérique de demi angle au sommet α** .

On installe le paramétrage forcé en coordonnées sphériques :

- Le petit élément de surface est un petit morceau de la sphère.
Pour « générer » la calotte sphérique :
 - $r = \text{cste} = R$
 - $\varphi \in [0; 2\pi]$
 - $\theta \in [0; \alpha]$
 - $dS = R^2 \cdot \sin\theta \cdot d\theta \cdot d\varphi$
- Pression constante : p_0
- $\vec{n}(\mathbf{M}) = -\vec{u}_r$
- $\vec{u}_r = \sin\theta \cdot \cos\varphi \vec{x} + \sin\theta \cdot \sin\varphi \vec{y} + \cos\theta \vec{z}$



On commence par la résultante :

$$\overrightarrow{R_{\text{air} \rightarrow \text{bille}}} = \iint \overrightarrow{dF}(\mathbf{M}) = \iint \overrightarrow{dF_n}(\mathbf{M}) = \iint p_0 \cdot R^2 \cdot \sin\theta \cdot d\varphi \cdot d\theta \cdot \vec{u}_r$$

On ne peut pas faire le calcul de l'intégrale puisque $\vec{u}_r$ est dépendant des deux variables φ et θ . Il faut projeter sur la base « fixe » ($\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$) pour traduire cette dépendance.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{R_{\text{air} \rightarrow \text{bille}}} \cdot \vec{x} &= p_0 \cdot R^2 \iint \sin\theta \cdot d\varphi \cdot d\theta \cdot \vec{u}_r \cdot \vec{x} = p_0 \cdot R^2 \iint \sin^2\theta \cdot \cos\varphi \cdot d\varphi \cdot d\theta \\ &= p_0 \cdot R^2 \int_0^\alpha \sin^2\theta \cdot d\theta \cdot \int_0^{2\pi} \cos\varphi \cdot d\varphi = 0 \end{aligned}$$

Interprétation : l'air ne produit pas de déplacement en translation suivant $\vec{x}$ du fait de la symétrie du pB.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{R_{\text{air} \rightarrow \text{bille}}} \cdot \vec{y} &= p_0 \cdot R^2 \iint \sin\theta \cdot d\varphi \cdot d\theta \cdot \vec{u}_r \cdot \vec{y} = p_0 \cdot R^2 \iint \sin^2\theta \cdot \sin\varphi \cdot d\varphi \cdot d\theta \\ &= p_0 \cdot R^2 \int_0^\alpha \sin^2\theta \cdot d\theta \cdot \int_0^{2\pi} \sin\varphi \cdot d\varphi = 0 \end{aligned}$$

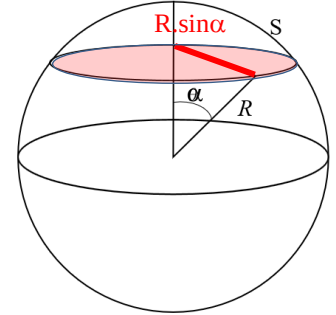
Interprétation : l'air ne produit pas de déplacement en translation suivant $\vec{y}$ du fait de la symétrie du pB.

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{R_{air \rightarrow bille}} \cdot \vec{z} &= p_0 \cdot R^2 \iint \sin\theta \cdot d\varphi \cdot d\theta \cdot \vec{u}_r \cdot \vec{z} = p_0 \cdot R^2 \iint \sin\theta \cdot \cos\theta \cdot d\varphi \cdot d\theta \\
 &= p_0 \cdot R^2 \int_0^\alpha \sin\theta \cdot \cos\theta \cdot d\theta \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi = p_0 \cdot R^2 \cdot 2\pi \cdot \int_0^\alpha \frac{\sin 2\theta}{2} d\theta \\
 &= p_0 \cdot R^2 \cdot \pi \cdot \left[\frac{-\cos 2\theta}{2} \right]_0^\alpha = p_0 \cdot R^2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{2} \cdot (1 - \cos 2\alpha) = p_0 \cdot R^2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{2} \cdot (1 - 1 - 2\sin^2 \alpha) = p_0 \cdot \pi \cdot R^2 \sin^2 \alpha
 \end{aligned}$$

Interprétation : l'air produit un déplacement en translation suivant $\vec{z}$ vers le bas.

Donc $\overrightarrow{R_{air \rightarrow bille}} \cdot \vec{z} \neq 0$.

On retrouve force = pression * surface où la surface est ici la surface dite projetée ou frontale : $\pi \cdot R^2 \sin^2 \alpha$. C'est un disque de rayon $R \cdot \sin \alpha$.



Pour le moment du torseur:

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{M_{(O, air \rightarrow bille)}} &= \iint \overrightarrow{OM} \wedge d\vec{F}(M) \\
 &= \iint \overrightarrow{OM} \wedge d\vec{F}_n(M) = \iint R \vec{u}_r \wedge p_0 \cdot R^2 \cdot \sin\theta \cdot d\varphi \cdot d\theta \cdot \vec{u}_r = \vec{0}
 \end{aligned}$$

Les vecteurs dont on fait le produit vectoriel sont colinéaires.

Interprétation : l'air ne produit aucun déplacement en rotation autour de O du fait de la symétrie sphérique.

Exercice 3 : barrage poids

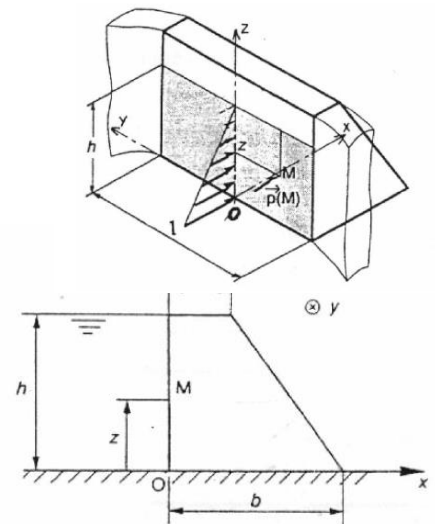
Exercice sur le passage modèle local au modèle global avec pression normale variable.

- Q1 : M : point de la surface de contact eau/barrage
 z : altitude de ce point mesurée à partir du pied du barrage
 h : hauteur d'eau mesurée à partir du pied du barrage
 ρ_e : masse volumique de l'eau
 p_{atm} : pression atmosphérique qui est celle à la surface libre du fluide

Par rapport au cours (chapitre 1.3.2.), l'altitude est mesurée par rapport au pied du barrage et non par rapport à la surface libre du fluide. Ce qui explique le modèle de pression : $p(M) = \rho_e \cdot g \cdot (h - z) + p_{atm}$.

A $z = 0$, l'écart de pression avec la pression atmosphérique vaut $\rho_e \cdot g \cdot h$ (modèle « piscine » : la pression augmente de 1 bar tous les 10 m de profondeur).

A $z = h$, l'écart de pression avec la pression atmosphérique vaut 0.



Q2 : Attention. On est sur le modèle local (action mécanique élémentaire aussi). Le torseur est un glisseur. Celui de la petite force (uniquement normale puisque c'est une action hydrostatique) en M.

$$\left\{ \begin{array}{l} d\vec{F}_{(M)} = -p(M) \vec{n}(M) dS \\ d\vec{M}_{(M, d\vec{F}_{(M)})} = \vec{0} \end{array} \right\} \text{ avec } d\vec{F}_{(M)} = -p(M) \vec{n}(M) dS = (\rho_e \cdot g \cdot (h - z) + p_{atm}) dy \cdot dz \vec{x}$$

Et $y \in [-l/2 ; l/2]$, $z \in [0 ; h]$ pour décrire la surface de contact eau/barrage

Q3 : On applique Babar :
$$\left\{ \begin{array}{l} d\vec{F}_{(M)} = -p(M) \vec{n}(M) dS = (\rho_e \cdot g \cdot (h - z) + p_{atm}) \cdot dy \cdot dz \vec{x} \\ \int_O d\vec{M}_{(O, d\vec{F}_{(M)})} = \vec{OM} \wedge d\vec{F}_{(M)} = (y\vec{y} + z\vec{z}) \wedge (\rho_e \cdot g \cdot (h - z) + p_{atm}) \cdot dy \cdot dz \vec{x} \end{array} \right\}$$

$\overrightarrow{dF(M)}$ est la petite force de pression (ou force élémentaire) en un point M de la surface de contact eau/barrage et $\overrightarrow{dM}_{(O, dF(M))}$ est le petit moment (ou moment élémentaire) créé par cette force au point O (point de réduction du torseur).

Q4 : On intègre pour avoir le bilan (sous forme de torseur) de l'ensemble de toutes les petites forces qui s'appliquent sur la surface de contact eau/barrage.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{R_{\text{eau} \rightarrow \text{barrage}}} &= \rho_e \cdot g \cdot \int_{M \in S} (h - z) \cdot dy \cdot dz \vec{x} + p_{atm} \int_{M \in S} dy \cdot dz \\ &= \rho_e \cdot g \cdot \int_{-l/2}^{l/2} dy \int_0^h (h - z) \cdot dz \vec{x} + p_{atm} \int_{-l/2}^{l/2} dy \int_0^h dz \\ &= \rho_e \cdot g \cdot l \cdot \frac{h^2}{2} \vec{x} + p_{atm} \cdot l \cdot h \vec{x} \end{aligned}$$

homogénéité : $\text{kg/m}^3 \cdot \text{m/s}^2 \cdot \text{m} \cdot \text{m}^2 = \text{kg/s}^2 = \text{N}$ c'est une force OK

Q5 : $\|\overrightarrow{R_{\text{eau} \rightarrow \text{barrage}}}\| = 298 \cdot 10^9 + 213180 \text{ N} \approx 298 \cdot 10^9 \text{ N}$. CDC OK

On remarque que la force globale de pression sur le barrage due à la pression atmosphérique est négligeable. En général, on ne la prend pas en compte puisque cette force de pression se retrouve également « de l'autre côté du barrage ». Elles se compensent. Ne reste alors que la force de pression due à l'eau.

Q6 : Le centre de poussée est le point s'il existe où le torseur global de l'action mécanique peut s'écrire sous la forme d'un glisseur (moment nul en P). Dans l'exercice du cours sur le frein de TGV, on montre que ce point n'existe pas.

On commence par calculer le moment global au point O :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M}_{(O, \text{eau} \rightarrow \text{barrage})} &= \rho_e \cdot g \cdot \int_{M \in S} (y\vec{y} + z\vec{z}) \wedge (h - z) \cdot dy \cdot dz \vec{x} \\ &= \rho_e \cdot g \cdot \int_{M \in S} (y(-h + z) \cdot dy \cdot dz \cdot \vec{z} + z(h - z) \cdot dy \cdot dz \cdot \vec{y}) = \rho_e \cdot g \cdot \frac{h^3}{6} \cdot l \vec{y} \end{aligned}$$

homogénéité : $\text{kg/m}^3 \cdot \text{m/s}^2 \cdot \text{m}^3 \cdot \text{m} = \text{m} \cdot \text{kg/s}^2 = \text{N} \cdot \text{m}$ c'est un moment OK

On applique Babar en cherchant P (dans le plan de contact donc de coordonnées y_p et z_p tel que

$$\overrightarrow{M}_{(P, \text{eau} \rightarrow \text{barrage})} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{M}_{(P, \text{eau} \rightarrow \text{barrage})} = \overrightarrow{M}_{(O, \text{eau} \rightarrow \text{barrage})} + \vec{PO} \wedge \overrightarrow{R_{\text{eau} \rightarrow \text{barrage}}} = \vec{0} \quad \text{d'où} \quad \vec{OP} \wedge \overrightarrow{R_{\text{eau} \rightarrow \text{barrage}}} = \overrightarrow{M}_{(O, \text{eau} \rightarrow \text{barrage})}$$

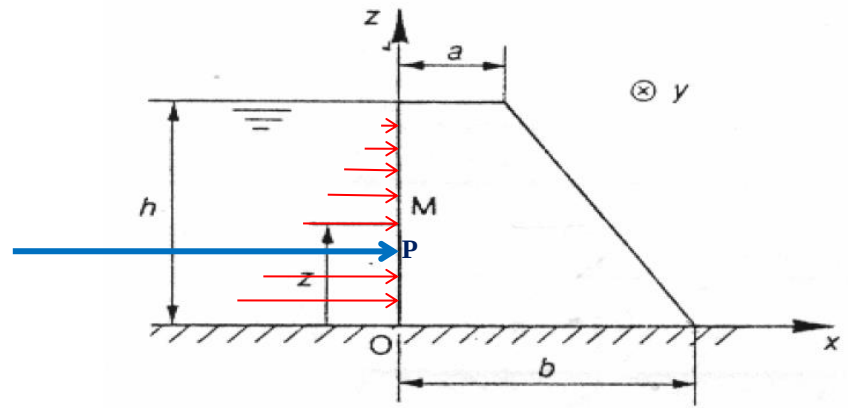
Ce qui donne
$$\begin{vmatrix} 0 & \rho_e \cdot g \cdot l \cdot \frac{h^2}{2} \\ y_p & 0 \\ z_p & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \rho_e \cdot g \cdot \frac{h^3}{6} \cdot l \\ \rho_e \cdot g \cdot \frac{h^2}{2} & 0 \end{vmatrix} \quad \text{d'où} : z_p \cdot \rho_e \cdot g \cdot l \cdot \frac{h^2}{2} = \rho_e \cdot g \cdot \frac{h^3}{6} \cdot l \Rightarrow z_p = \frac{h}{3} \text{ et } y_p = 0$$

Ce qui donne :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{\text{eau} \rightarrow \text{barrage}} = \rho_e \cdot g \cdot l \cdot \frac{h^2}{2} \vec{x} \\ \vec{M}_{(P, \text{eau} \rightarrow \text{barrage})} = \vec{0} \end{array} \right.$$

Il s'agit bien d'un glisseur en P (moment nul) dont la résultante (qui est un invariant du torseur) est celle calculée en Q4.

Q7 : Sur le schéma, **En rouge**, le modèle local, les forces de pression élémentaires
En Bleu, le modèle global, la force totale de pression de l'eau sur le barrage.



Q8 : On utilise la figure ci-dessus. Barrage vu dans la direction y

La masse volumique est constante (béton homogène) donc le poids est le volume* masse volumique avec le volume V qui est celui d'un cylindre (longueur l) à section trapézoïdale (surface : $(ah + (1/2)(b-a)h)$)

$$\text{Poids} = \rho_B \cdot g \cdot V = \rho_B \cdot g \cdot l \cdot (ah + (1/2)(b-a)h) = 562 \cdot 10^9 \text{ N} \quad (\text{attention } \rho_B = 2560 \text{ kg/m}^3)$$

Q9 : On modélise les actions de pesanteur sur le barrage sous la forme d'un glisseur au centre de gravité

cherché G :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{\text{pes} \rightarrow \text{barrage}} = -\rho_B \cdot g \cdot l \cdot h \cdot \frac{b+a}{2} \vec{z} \\ \vec{M}_{(G, \text{pes} \rightarrow \text{barrage})} = \vec{0} \end{array} \right. \quad \text{La résultante est le poids précédemment calculé.}$$

Position de G : par symétrie $G(x_G, 0, z_G)$

G est dans le plan de symétrie du barrage (xOz)

méthode barycentrique (puisque la section (figure ci-dessus) est l'association d'un rectangle (longueur h, largeur a) et d'un triangle rectangle (hauteur h, base (b-a)) :

décomposition du trapèze : solide1 : rectangle et solide2 : triangle.

$$\text{Formule du barycentre : } (m_1 + m_2) \vec{OG} = m_1 \vec{OG}_1 + m_2 \vec{OG}_2$$

En notant σ la masse surfacique (masse d'une tranche de 1m) du barrage

Avec : $G_1(7.5, 0, 142.5)$ et $m_1 = 15 \cdot 285 \cdot \sigma$ et $G_2(75, 0, 95)$ et $m_2 = 180 \cdot 285 \cdot \sigma \cdot 0.5$

D'où G (65.3, 0, 101.8)

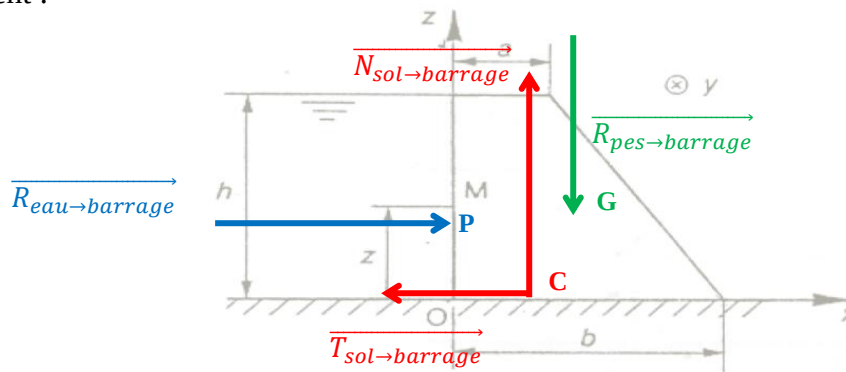
résultat Ok puisque le centre de gravité est du côté où il y a le plus de matière

Q10 : Même si le cours ne présente le théorème de la résultante statique (TRS) qu'au chapitre 3, la deuxième loi de Newton ($\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a} = \vec{0}$) est connue. On fait un bilan des forces extérieures qui s'appliquent sur le barrage qui est au repos (accélération $\vec{a}$ nulle).

S'exercent sur le barrage :

- l'action de l'eau : $\overrightarrow{R_{\text{eau} \rightarrow \text{barrage}}}$
- l'action de la pesanteur : $\overrightarrow{R_{\text{pes} \rightarrow \text{barrage}}}$
- l'action du sol avec frottement : $\overrightarrow{R_{\text{sol} \rightarrow \text{barrage}}} = \overrightarrow{N_{\text{sol} \rightarrow \text{barrage}}} + \overrightarrow{T_{\text{sol} \rightarrow \text{barrage}}}$
- on modélise par un glisseur dont ne connaît pas le point d'application (noté C, centre de poussée qui est un point de l'axe central (cours OdM)). Cette force se décompose en une force normale (suivant z) et une force tangentielle, qui appartient au plan tangent (xOy) et qui s'oppose à la vitesse de glissement donc suivant x. Si le barrage glisse il translate suivant x^+ .

Graphiquement :



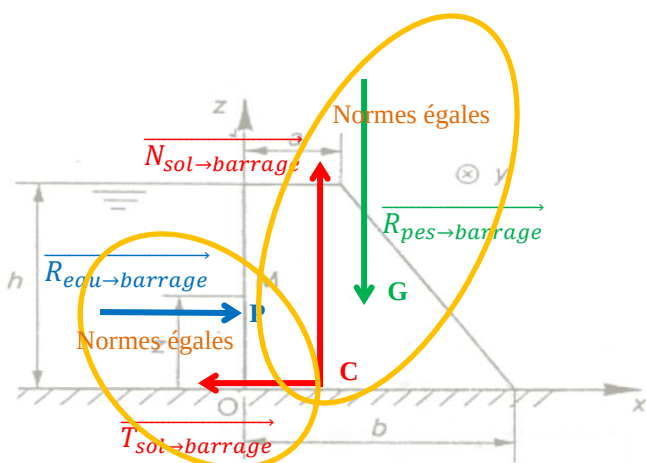
On applique ($\sum \vec{F} = \vec{0}$) en procédant par direction ce qui revient à projeter suivant $\vec{x}$ puis suivant $\vec{z}$:

$$\overrightarrow{T_{\text{sol} \rightarrow \text{barrage}}} = -\overrightarrow{R_{\text{eau} \rightarrow \text{barrage}}} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{N_{\text{sol} \rightarrow \text{barrage}}} = -\overrightarrow{R_{\text{pes} \rightarrow \text{barrage}}}$$

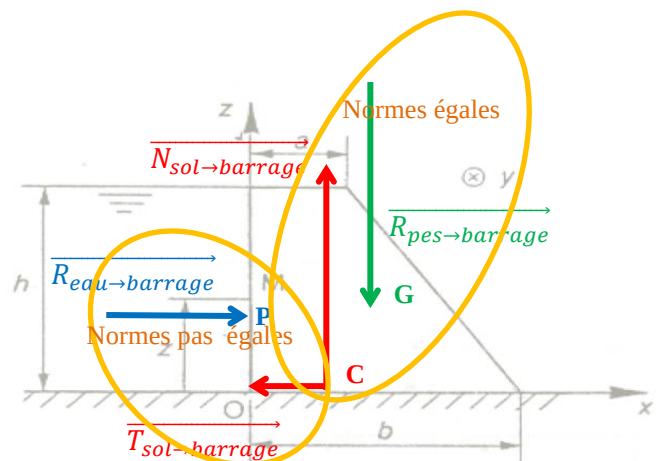
Si le barrage glisse $\|\overrightarrow{T_{\text{sol} \rightarrow \text{barrage}}}\| = \|\overrightarrow{N_{\text{sol} \rightarrow \text{barrage}}}\| \cdot f$ (loi de Coulomb lorsqu'on est à la limite du glissement)

Pour que le barrage ne glisse pas il faut un coeff de frottement mini de $\frac{\|\overrightarrow{T_{\text{sol} \rightarrow \text{barrage}}}\|}{\|\overrightarrow{N_{\text{sol} \rightarrow \text{barrage}}}\|} = 0.53$

Graphiquement en respectant à peu près les ordres de grandeur des forces, lorsqu'on est à l'équilibre limite (début de glissement du barrage)



A l'équilibre limite



Déséquilibre si coeff de frottement trop faible :

$$\overrightarrow{T_{\text{sol} \rightarrow \text{barrage}}} < \overrightarrow{N_{\text{sol} \rightarrow \text{barrage}}} \cdot f$$

Q11 : On peut implanter le barrage sur des sols de type : GW, GP, SW, Roche et cailloux.