MPSI

Programme de colle - semaine 26 du 05/05/2025 au 11/05/2025

1 Séries numériques

Seuls les démonstrations marquées d'un (*) sont à savoir. Se concentrer sur la pratique et demander des énoncés précis des théorèmes.
Donner à tout le monde un "exo-minute" consistant à appliquer un critère du cours ($\leqslant$, $\sim$, $o(\cdot)$, $O(\cdot)$, convergence absolue ou série alternée).
En gras, les résultats les plus importants.

- Suite des sommes partielles d'une suite numérique (à valeurs complexes). Convergence d'une série. Somme d'une série convergente. Relation de Chasles. Reste d'ordre n.
  La nature de la série ne dépend pas du rang initial et n'est pas modifiée quand on change un nombre fini de termes.
- Condition nécessaire de convergence : le terme général tend vers 0 (*).
  La condition n'est pas suffisante (connaître au moins 2 contre-exemples).
- Somme téléscopique, équivalence entre la convergence de (u_n) et de $\sum_n (u_{n+1} - u_n)$.
- Série géométrique $\sum_n q^n$ ($q \in \mathbb{C}$). Convergence ssi $|q| < 1$ et valeur de la somme si convergence (*).
- Série exponentielle : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z$ (convergence de la série pour tout $z \in \mathbb{C}$) (démonstration à savoir dans le cas où $z \in \mathbb{R}^+$ en utilisant l'inégalité de Taylor-Lagrange).
- Suites à termes positifs : la série converge ssi la suite des sommes partielles est majorée.
  Comparaison de deux séries à termes positifs : si $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$ et si $\sum_n v_n$ converge, alors $\sum_n u_n$ aussi.
- Convergence absolue. **Elle entraîne la convergence** : si $\sum_n |u_n|$ converge, alors $\sum_n u_n$ converge et $\left|\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n\right| \leqslant \sum_{n=n_0}^{+\infty} |u_n|$.
- **Utilisation des équivalents :** si $u_n \sim v_n \geqslant 0$, alors $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ sont de même nature (*).
- **Utilisation des $o(\cdot)$, $O(\cdot)$:** si $u_n = O(v_n)$, $v_n \geqslant 0$ et $\sum_n v_n$ converge, alors $\sum_n u_n$ CVA.
- Comparaison série-intégrale : pas de propriété au programme, juste la méthode à connaître : pour f continue monotone, comparer $f(k)$, $\int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $f(k+1)$, et sommer (entre des bornes finies) pour en déduire un encadrement des sommes partielles.
- **Série de Riemann** $\sum_n \frac{1}{n^\alpha}$: converge ssi $\alpha > 1$.
  (*) : ne pas aller jusqu'au bout de la démonstration mais pour $\alpha > 0$, être capable d'écrire un encadrement des sommes partielles entre des intégrales puis, dans le cas où $\alpha = 1$, en déduire un équivalent de S_n.
- **Série alternée** : si (v_n) est décroissante et tend vers 0, alors $\sum_n (-1)^n v_n$ converge (*). Signe de la somme et majoration de la valeur absolue de la somme par celle du premier terme (pas d'exercice fait sur ces deux derniers points).
  L'étude de séries semi-convergentes est limitée aux exemples fournis par le théorème des séries alternées.

2 Exercices

Ne pas passer trop de temps dessus.

1. **CCINP exo 7**

a) Soit (u_n) et (v_n) deux suites de nombres réels positifs.
On suppose que (u_n) et (v_n) sont non nulles à partir d'un certain rang.
Montrer que :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \Rightarrow \sum u_n \text{ et } \sum v_n \text{ sont de même nature.}$$

b) Étudier la convergence de la série

$$\sum_{n\geqslant 2} \frac{((-1)^n + i)\ln n \sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{n+3}-1}$$

2. **CCINP exo 46**
On considère la série : $\sum\limits_{n\geqslant 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$.

a) Prouver que, au voisinage de $+\infty$, $\pi\sqrt{n^2+n+1} = n\pi + \frac{\pi}{2} + \alpha\frac{\pi}{n} + \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$, où α est un réel que l'on déterminera.

b) En déduire que $\sum\limits_{n\geqslant 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$ converge.

c) $\sum\limits_{n\geqslant 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$ converge-t-elle absolument ?

3. **CCINP exo 5**
Exercice long, on n'en donnera qu'une partie. Plusieurs possibilités :
— Admettre le résultat du a)ii) puis donner le b).
— Demander seulement le a). Pour le a)ii), après avoir trouvé l'encadrement entre sommes partielles et intégrales pour α quelconque, n'étudier la nature de la série que pour $\alpha = 1$.
On pourra admettre que f est décroissante sur $[2, +\infty[$.

a) On considère la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n(\ln n)^\alpha}$, où $n \geqslant 2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

i) Cas $\alpha \leqslant 0$
En utilisant une minoration très simple de u_n, démontrer que la série diverge.

ii) Cas $\alpha > 0$
Étudier la nature de la série.
Indication : on pourra utiliser la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{x(\ln x)^\alpha}$.

b) Déterminer la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} \dfrac{\left(e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)e^{\frac{1}{n}}}{(\ln(n^2+n))^2}$