

Problème N°1 : simulateur de vol « Fly-ho »

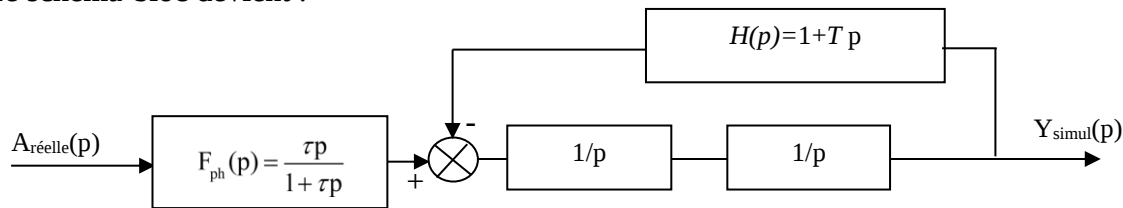
Q1- Les deux intégrateurs permettent de passer d'une accélération à une position (via la vitesse). Sous les conditions de Heaviside, intégrer dans le domaine temporel revient à diviser par p dans le domaine de Laplace,

$$\text{d'où } I(p) = \frac{Y_{\text{simul}}(p)}{\varepsilon(p)} = \frac{1}{p} \times \frac{1}{p} = \frac{1}{p^2}$$

Q2- a) Voir cours.

b) Le terme τp au numérateur permet d'obtenir une pente de +20dB/déc à BF et le 1^{er} ordre permet d'annuler cette pente en ajoutant une pente opposée à partir de la pulsation de cassure $\omega_c = 1/\tau$. La lecture de la pulsation de cassure donne la valeur de la constante de temps : $\omega_c = 1/\tau = 4 \text{ rad.s}^{-1}$ soit $\tau = 0,25 \text{ s}$

Q3- Le schéma-bloc devient :



$$\frac{Y_{\text{simul}}(p)}{A_{\text{réelle}}(p)} = F_{\text{ph}}(p) \cdot \frac{1/p^2}{1 + (1+Tp)/p^2} = \frac{\tau p}{1 + \tau p} \cdot \frac{1}{1 + Tp + p^2} \quad \text{donc } FTBF(p) = \frac{\tau p}{(1 + \tau p)(1 + Tp + p^2)}$$

Q4- Pour un échelon d'accélération de 4 m/s^2 , $A_{\text{réelle}}(p) = \frac{a_0}{p}$. D'où $Y_{\text{simul}}(p) = \frac{a_0 \tau}{(1 + \tau p)(1 + Tp + p^2)}$.

D'après le théorème de la valeur finale : $\lim_{t \rightarrow \infty} y_{\text{simul}}(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p Y_{\text{simul}}(0) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p a_0 \tau}{(1 + \tau p)(1 + Tp + p^2)} = 0$.

Donc le simulateur reviendra bien vers sa position moyenne.

Q5- $Y_{\text{simul}}(p) \approx \frac{0,25p}{(1+p)^2} \cdot A_{\text{réelle}}(p) = \frac{0,25p}{(1+p)^2} \cdot \frac{4}{p} = \frac{1}{(1+p)^2}$ d'où : $y_{\text{simul}}(t) = t \cdot e^{-t} \cdot u(t)$

Q6- y_{max} est obtenue pour $t = 1/a = 1 \text{ s}$, d'où $y_{\text{max}} = 1 \cdot e^{-1} = 0,37 \text{ m}$

$\dot{y}_{\text{max}}$ est obtenue pour $t = 0 \text{ s}$, or $\dot{y} = e^{-at} - ate^{-at}$, donc $\dot{y}_{\text{max}} = e^0 - 0 = 1 \text{ m/s}$

Le déplacement vertical est compatible avec le cahier des charges du simulateur ($0,37 \text{ m} < 0,42 \text{ m}$), mais pas la vitesse maximale ($1 \text{ m/s} > 0,47 \text{ m/s}$).

Q7- a) Les conclusions sont proches de celles du modèle simplifié. Le débattement vertical et la vitesse verticale sont légèrement dépassés ($0,45 \text{ m} > 0,42 \text{ m}$ et $0,6 \text{ m/s} > 0,47 \text{ m/s}$).

b) Par contre, le seuil de perception des accélérations est très largement dépassé ($0,5 \text{ m/s}^2 > 0,01 \cdot g \text{ m/s}^2$). En effet, la phase de retour en position moyenne commence à $t = 2 \text{ s}$.

Q8- a) Le facteur d'amortissement doit être supérieur à 1 : m ou $\xi > 1$.

b) Par identification avec le dénominateur de la forme canonique d'un 2nd ordre : $T = 2 \text{ m}$

Pour diminuer le dépassement de la réponse, il faut augmenter le coefficient d'amortissement m et donc il faut augmenter T .

Q9- a) $y(x) = 10^{-2}(1 + \sin_{0,1}^{2\pi} x) = 10^{-2}(1 + \sin 20\pi x)$ avec y et x en m.

b) Comme $x = V \cdot t$, $y(t) = 10^{-2}(1 + \sin 20\pi V t)$

c) $\dot{y}(t) = 20\pi V \cdot 10^{-2} \cdot \cos(20\pi V t)$

d'où $a_{\text{réelle}} = \ddot{y}(t) = -(2\pi V)^2 \cdot \sin(20\pi V t)$ d'où $a_1 = (2\pi V)^2$ en m/s^2 et $\omega = 20\pi V$ en rad/s .

Q10- $(2\pi V_{\min})^2 = 0,01 \text{ g} = 0,1 \text{ m/s}^2$ d'où $V = \frac{\sqrt{0,1}}{2\pi} = \frac{0,31}{2\pi} = 0,05 \text{ m/s}$ ou encore $V_{\min} = 0,05 \cdot 3,6 = 0,18 \text{ km/h}$.
Les irrégularités de piste sont bien ressenties quelle que soit la vitesse supérieure à 0,2 km/h.

Q11- L'accélération est la dérivée seconde de la position donc on multiplie le numérateur par p^2 en Laplace

$$\frac{A_{\text{simul}}(p)}{A_{\text{réelle}}(p)} = \frac{p^3}{(p+4)(p+1)^2} = 0,25 p^3 \cdot \frac{1}{(1+p)^2} \cdot \frac{1}{1+0,25p} = H_1 * H_2 * H_3$$

Justification la + rapide :

$\omega < 1 \text{ rad/s}$: $H(p) \approx 0,25 p^3$ → pente de +60dB/dec passant par (1rad/s, -12dB) car $20 \cdot \log 0,25 = -12 \text{ dB}$

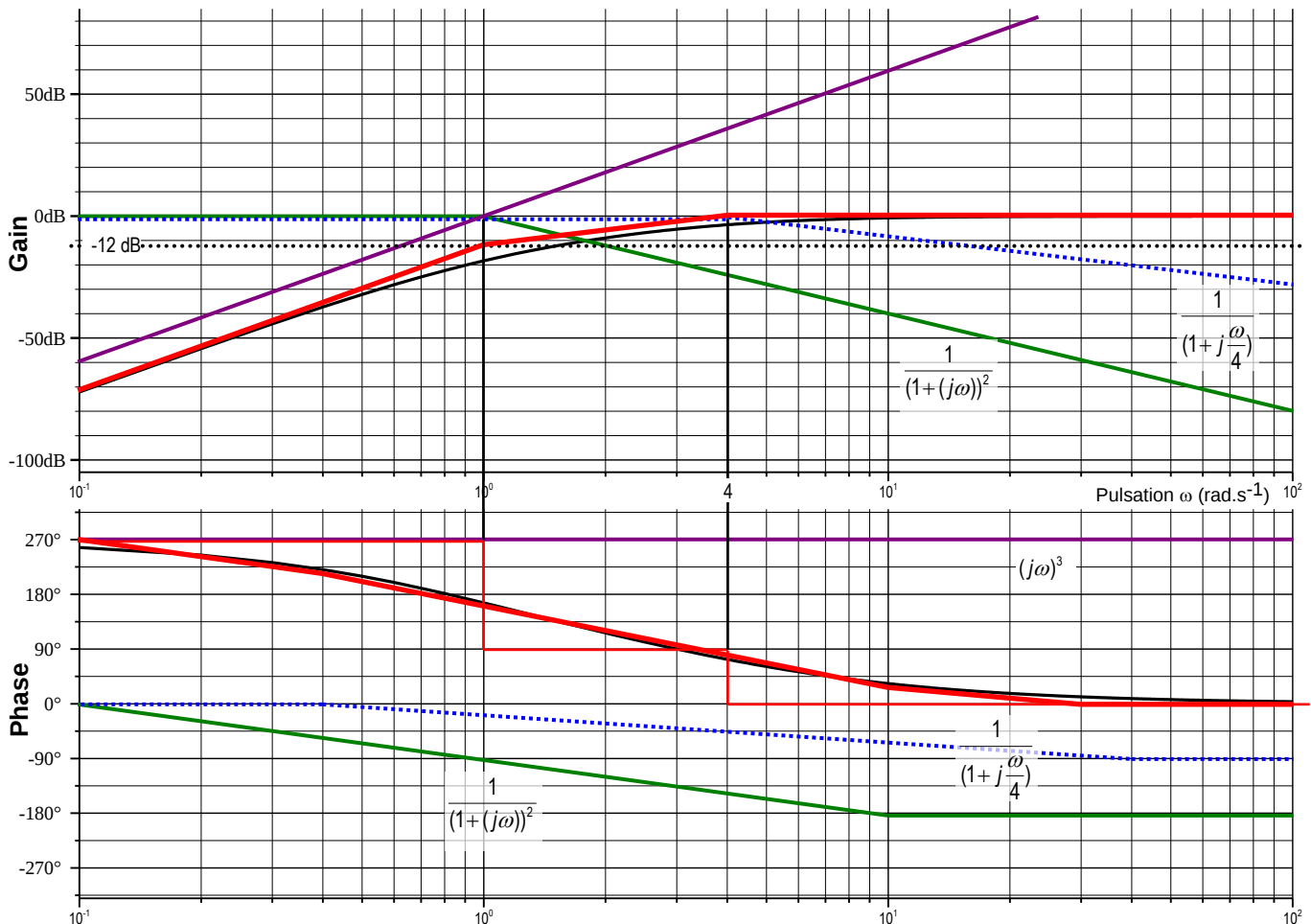
→ phase à +270°

$1 < \omega < 4 \text{ rad/s}$: $H(p) \approx 0,25 p$ → pente de +20dB/dec

→ phase à +90°

$\omega > 4 \text{ rad/s}$: $H(p) \approx 1$ → pente et phase nulles

En couleur, les tracés asymptotiques des 3 fonctions de transfert H_i pouvant être utilisés pour le tracé final (en rouge)



Q12- a) La courbe de gain passe environ à -3 dB en dessous de la droite asymptotique pour $\omega_{-3dB} = 4 \text{ rad/s}$.

Donc $\omega_{3dB} = 20\pi V_{3dB} = 4 \text{ rad/s}$ et $V_{3dB} = \frac{4}{20\pi} = \frac{2}{31,4} \approx 0,06 \text{ m/s}$.

b) On vérifie bien que $V_{3dB} = 0,06 \text{ m/s} > V_{\min}$, donc les accélérations seront effectivement ressenties par le pilote.

Q13- a) Les tracés asymptotiques dans le plan de Bode sont identiques car $\frac{Y_{\text{simul}}(p)}{Y_{\text{réelle}}(p)} = \frac{A_{\text{simul}}/p^2}{A_{\text{réelle}}/p^2} = \frac{A_{\text{simul}}(p)}{A_{\text{réelle}}(p)}$.

b) $A_{\text{simul}} = 10^{G_{\text{dB}}(\omega)/20} A_{\text{réelle}}$ donc $Y_{\text{simul}} = 10^{G_{\text{dB}}(\omega)/20} Y_{\text{réelle}}$

c) Quelle que soit la pulsation, la valeur du gain est toujours négative (inférieure à 0dB) donc $Y_{\text{simul}} < Y_{\text{réelle}} < 10\text{cm} < 42\text{cm}$, déplacement largement compatible avec l'exigence de déplacement.

Q14-

<i>i</i>	0	1	2	3	4
u_i	-2	0	-1	2,5	3
u_i^f	-2	-1	-1	0,5	1,5

Q15-

Deux propositions de fonction :

```
def filtre_mg(u,n):
    uf=np.ones(len(u))
    for i in range(len(u)):
        s=0
        if i<n-1:
            for j in range(i+1):
                s+=u[j]
            uf[i]=(s/(i+1))
        else:
            for j in range(i-n+1,i+1):
                s+=u[j]
            uf[i]=(s/n)
    return uf

def filtre_mg(u,n):
    uf=np.ones(len(u))
    for i in range(len(u)):
        if i<n-1:
            uf[i]=(np.sum(u[:i+1])/(i+1))
        else:
            uf[i]=(np.sum(u[i-n+1:i+1])/n)
    return uf
```

Q16- Si n est trop faible, alors le bruit de mesure est atténué mais non supprimé (cas où $n = 20$). Par contre si n est trop grand, alors c'est toute la courbe qui est lissée, faisant disparaître également les oscillations propres du signal.

Q17- La méthode d'Euler explicite revient à approximer la dérivée $\frac{du_f(t)}{dt}$ par $\frac{u_{i+1}^f - u_i^f}{t_{i+1} - t_i}$. L'équation différentielle devient donc : $\tau * \frac{u_{i+1}^f - u_i^f}{t_{i+1} - t_i} + u_i^f = u_i$ soit $u_{i+1}^f = u_i^f + \frac{(t_{i+1} - t_i)(u_i - u_i^f)}{\tau}$ Initialement on prendre $u_0^f = u_0$

Q18-

```
def filtre_pb(u, temps, f):
    uf=np.ones(len(u))
```

```

uf[0]=u[0]
for i in range(len(u)-1):
    uf[i+1]=uf[i]+f*2*np.pi()*(temps[i+1]-temps[i])*(u[i]-uf[i])
return uf

```

Q19- Plus la fréquence de coupure est faible, plus les hautes fréquences sont atténuées. Il faut donc la choisir judicieusement pour réduire les oscillations indésirables (qui ont une fréquence élevée) et conserver la fréquence propre. Il peut être intéressant d'utiliser le spectre du signal brut après transformation de Fourier pour identifier la fréquence propre.

Q20 : La méthode du filtrage par moyennes glissantes est de complexité $o(n * N)$ alors que la méthode de filtrage par filtre passe bas est de complexité $o(N)$.

Q21- On utilise un filtre du deuxième ordre passe bas avec $\omega_0 = 2\pi.f$, $\xi = 1$ et de gain statique 1 (comme pour l'ordre 1 (on restitue le signal sans l'amplifier ou le diminuer). Le 2^{ième} ordre est plus sélectif et filtre davantage les bruits par rapport au 1^{er} ordre (pente -40 dB/dec).

L'équation différentielle associée à cette fonction de transfert est :

$$\frac{1}{\omega_0^2} \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + \frac{2\xi}{\omega_0} \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = e(t)$$

En appliquant la dérivée 2 fois pour la dérivée seconde on obtient :

$$\frac{1}{\omega_0^2} \frac{s_{i+2} - 2s_{i+1} + s_i}{T_e^2} + \frac{2\xi}{\omega_0} \frac{s_{i+1} - s_i}{T_e} + s_i = e_i \Rightarrow$$

$$s_{i+2} = 2s_{i+1}(1 - \xi \omega_0 T_e) - s_i(\omega_0^2 T_e^2 - 2\xi \omega_0 T_e + 1) + e_i \omega_0^2 T_e^2$$

$$\text{Avec } T_e = (t_{i+1} - t_i) \quad u_{i+1}^f = s_{i+1} (i \geq 0) \quad e_i = u_i^f \quad \xi = 1 \quad s_0 = u_0^f \quad \text{et} \quad s_1 = u_1^f$$

Problème N°2 : Segway

Q1 Les conditions initiales sont toutes nulles. On obtient à partir de la seconde équation différentielle dans Laplace, l'équation suivante :

$$[(DA - B^2)p^2 - DC]\chi(p) = 2\left(\frac{B}{R} + D\right)C_m(p)$$

$$\text{On en déduit } H_1(p) = \frac{2\left(\frac{B+DR}{RDC}\right)}{\left(\frac{DA-B^2}{DC}\right)p^2-1} \text{ puis } F_1(p) = K_m \frac{2\left(\frac{B+DR}{RDC}\right)}{\left(\frac{DA-B^2}{DC}\right)p^2-1}$$

Le schéma bloc se justifie alors en écrivant : $\Psi(p) = \chi(p) - \alpha(p) = F_1(p)U(p) - \alpha(p)$

Le système d'entrée $u(t)$ et de sortie $\psi(t)$ est instable car le dénominateur de la fonction de transfert possède un pôle réel positif. $p_i = \pm \sqrt{\frac{DC}{DA-B^2}}$ avec $\frac{DA-B^2}{DC} = 6.10^{-2} > 0$

Ce résultat était prévisible du fait que le centre d'inertie du système est situé au-dessus de l'axe des roues.

Q2

$$\frac{\Psi(p)}{W(p)} = \frac{\frac{K_m H_1(p)}{1 + pk_v K_m H_1(p)}}{1 + k_p \frac{K_m H_1(p)}{1 + pk_v K_m H_1(p)}} = \frac{K_m H_1(p)}{1 + pk_v K_m H_1(p) + k_p K_m H_1(p)}$$

$$= \frac{K_s}{\frac{p^2}{\omega_1^2} + pk_v K_s + k_p K_s - 1}$$

Un système de degré 2 est stable si les coefficients des puissances de p sont différents de 0 et sont de même signe.

Ceci implique : $k_p > \frac{1}{K_s}$ et $k_v > 0$ pour que le système soit stable.

$$\text{Q3} \quad F_2(p) = \frac{\frac{K_s}{k_p K_s - 1}}{\frac{p^2}{(k_p K_s - 1)\omega_1^2} + \frac{p k_v K_s}{k_p K_s - 1} + 1} \text{ soit : } K_2 = \frac{K_s}{k_p K_s - 1}, \quad \omega_0 = \sqrt{(k_p K_s - 1)}\omega_1, \quad \xi = \frac{1}{2} \frac{k_v K_s \omega_1}{\sqrt{k_p K_s - 1}}$$

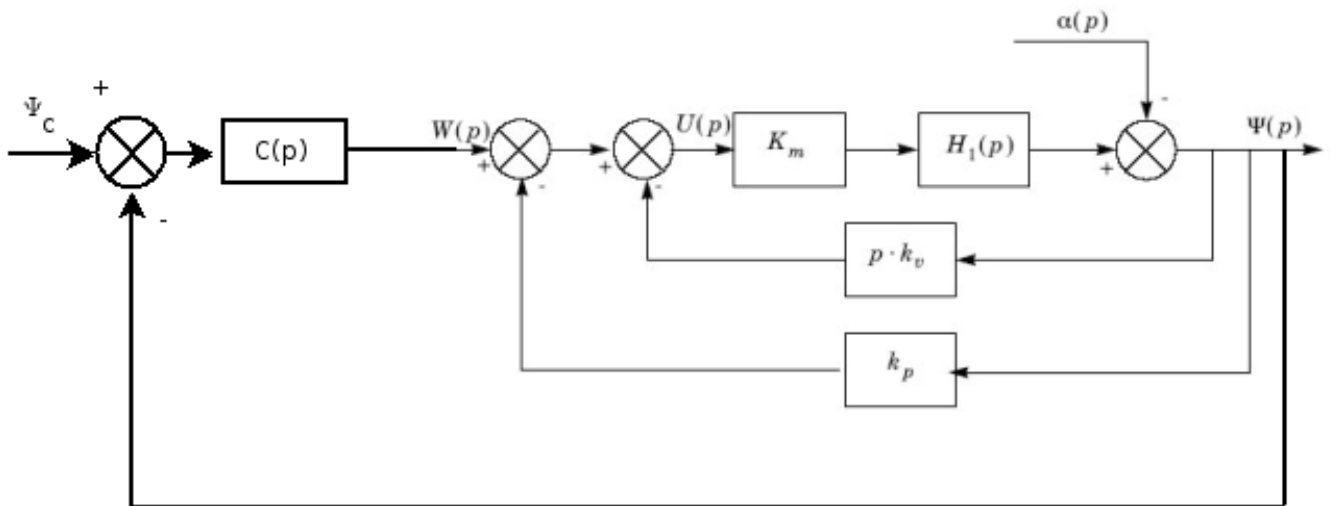
Q4 Pour un système du second ordre, le temps de réponse à 5% est minimal si $\xi = 0,69$.

On en déduit pour $\omega_0 = 1,5 \omega_1$:

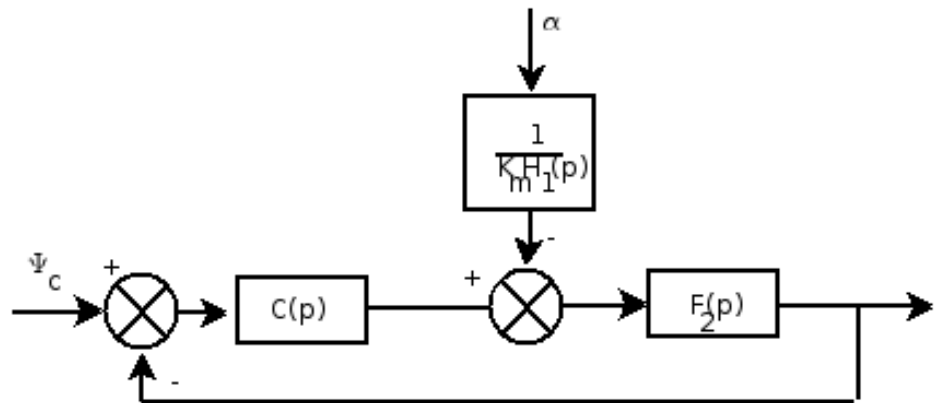
$$k_p = (1,5^2 + 1)/K_s = 13,54 \text{ V/rad}$$

$$k_v = 2\xi \frac{\sqrt{k_p K_s - 1}}{K_s \omega_1} = \sqrt{2} \frac{\sqrt{13,54 \cdot 0,24 - 1}}{0,24 \cdot 4,1} = 2,15 \text{ V.rad}^{-1} \cdot \text{s} \quad K_2 \approx 0.1 \text{ rad/V}$$

Q5



Q6 Le schéma bloc peut se mettre sous la forme suivante :



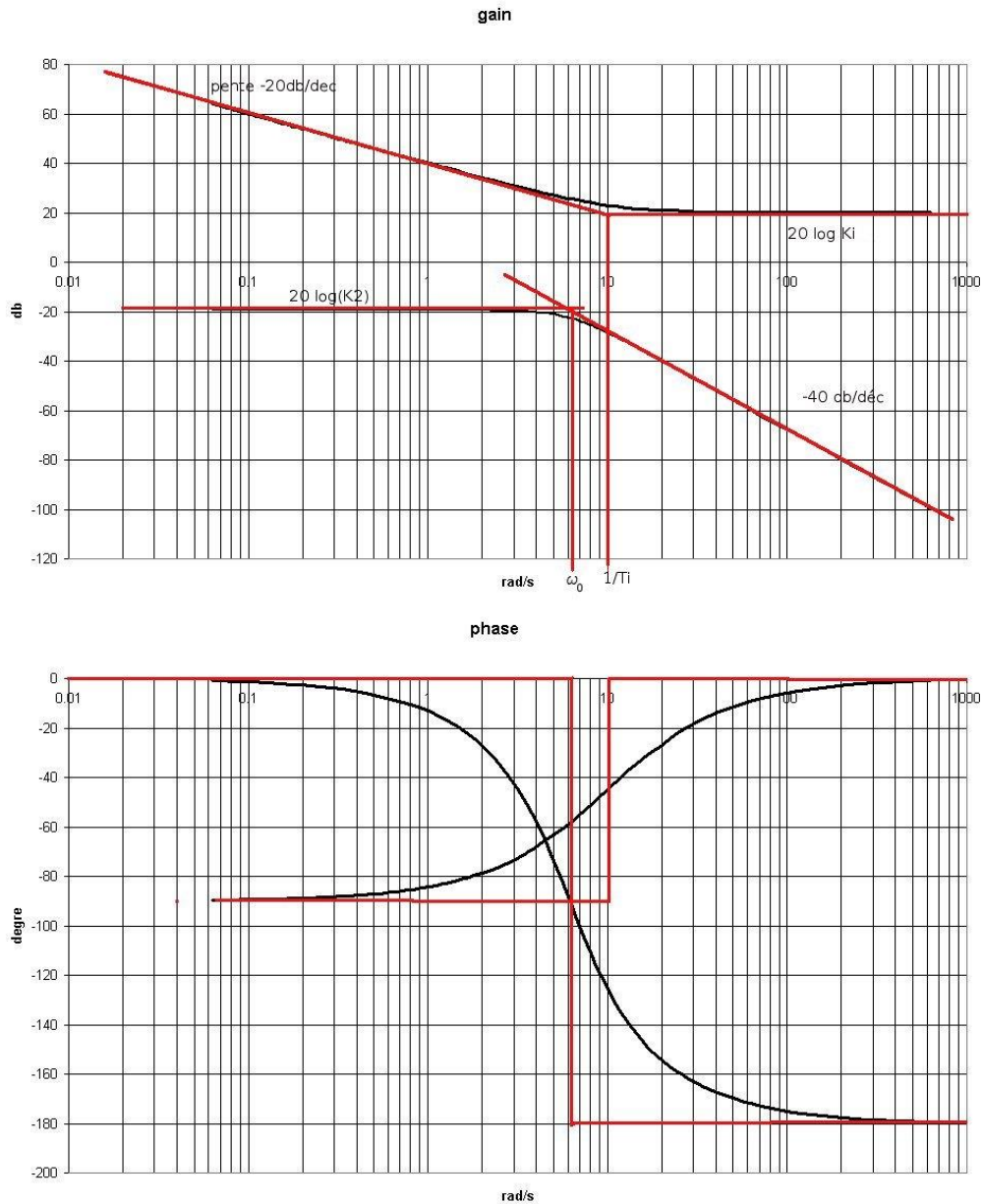
$$\text{On détermine alors : } \Psi(p) = - \frac{F_2(p)}{K_m H_1(p)(1 + F_2(p)K_C)} \alpha(p)$$

L'erreur (écart) en régime permanent s'obtient en appliquant le théorème de la valeur finale :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \Psi(p) = - \frac{K_2 \alpha_0}{K_s(1 + K_2 K_C)} \neq 0. \text{ Le cahier des charges n'est pas satisfait.}$$

Q7 Le correcteur intégral permet d'obtenir $\lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t) = 0$ (reprendre les calculs de la question précédente en remplaçant l'expression de $C(p)$ par sa nouvelle expression.)

Q8 Tracer les diagrammes de Bode asymptotiques et réels . *tracé du correcteur PI pour $K_i = 10, T_i = 0.1s$*



Q9 $M\phi = \frac{\pi}{4} = \pi + \arg(FTBO(j\omega_c)) = \pi - \frac{\pi}{2} + a \tan(T_i \omega_c) + \arg(F_2(j\omega_c))$

soit $\varphi = \arg(F_2(j\omega_c)) = -(\frac{\pi}{4} + a \tan(10)) = -2,25 \text{ rad} = -129^\circ$

On en déduit $\tan(\varphi) = -1,23 = \frac{2\xi\omega_c/\omega_1}{1-\omega_c^2/\omega_1^2}$

Après résolution de l'équation du second degré en ω_c . On détermine : $\omega_c = 10.67 \text{ rad/s}$ soit $Ti = 0.93s$.

Q10 K_i doit vérifier : $|FTBO(j\omega_c)| = 1 = K_i \cdot \frac{\sqrt{1+T_i^2\omega_c^2}}{T_i\omega_c} \cdot \frac{K_2}{\sqrt{(1-\omega_c^2/\omega_1^2)^2 + 4\xi^2\omega_c^2/\omega_1^2}}$

$$K_i = \frac{10}{\sqrt{101}} \frac{\sqrt{(1-(10.67/6.15)^2)^2 + 2(10.67/6.15)^2}}{0.1} \approx 31,7$$

Q11 La convergence de $\psi(t)$ vers 0 lorsque $t \rightarrow \infty$ est réalisée et Le dépassement d'inclinaison est inférieur à 30% (de l'ordre de 15%). Le cahier des charges est donc respecté.