

STATIQUE

La statique est l'étude de l'équilibre des **systèmes matériels non déformables** au **repos**.

Le contenu de ce cours est assez léger. Il complète la version physicienne de la mécanique sur les systèmes de solides. En résumé, on va appliquer le **Principe Fondamental** de la Statique ($\Sigma \text{forces} = 0$ et $\Sigma \text{moments} = 0$).

La difficulté vient :

- Dans un premier temps de la modélisation des actions mécaniques. Le modèle Force (force centrale pour les physiciens, glisseur pour les SIstes) n'est pas suffisant pour décrire correctement les actions mécaniques dans le cas de contact entre solides. La notation torsorielle des actions mécaniques (avec des torseurs non glisseurs) est indispensable pour traiter n'importe quel sujet de mécanique des solides.
- Puis de l'application du **P.F.S.** à un ensemble de solides formant un mécanisme. Il va falloir apprendre à choisir le ou les solides dont l'isolement permettra après application du PFS de trouver les équations menant à la résolution du Pb.

Ce chapitre dont la maîtrise est indispensable permettra en deuxième année de mener à bien les études de dynamique où on combine efforts et mouvements donc les chapitres statique et cinématique de 1^{ère} année.

Extraits du référentiel :

Compétence visée	Savoir-faire associé
Proposer un modèle de connaissance et de comportement	• Associer un modèle à une action mécanique • Déterminer la relation entre le modèle local et le modèle global • Associer à chaque liaison son torseur d'actions mécaniques transmissibles
Procéder à la mise en oeuvre d'une démarche de résolution analytique	• Proposer une méthode permettant la détermination d'une inconnue de liaison ou le calcul complet des inconnues de liaison • Choisir une méthode pour déterminer la valeur des paramètres conduisant à des positions d'équilibre (par exemple arc-boutement)



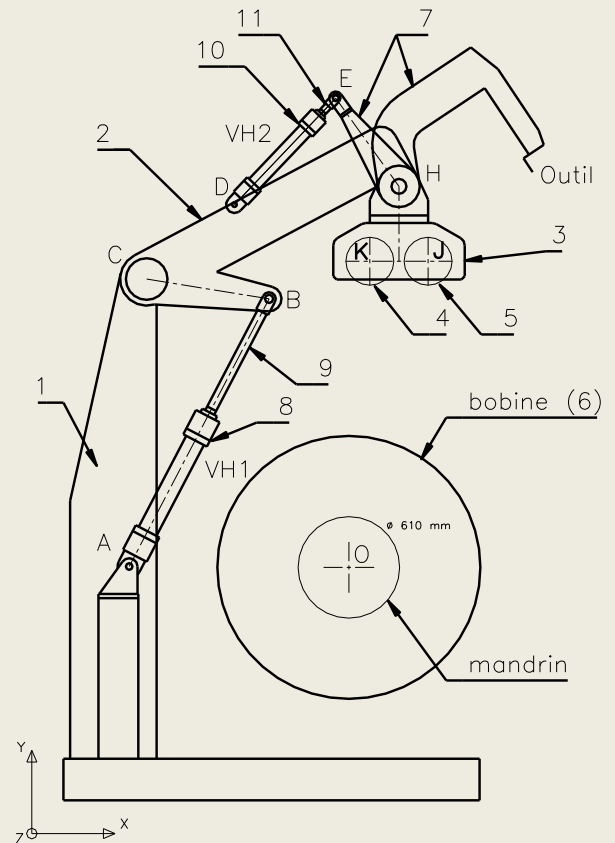
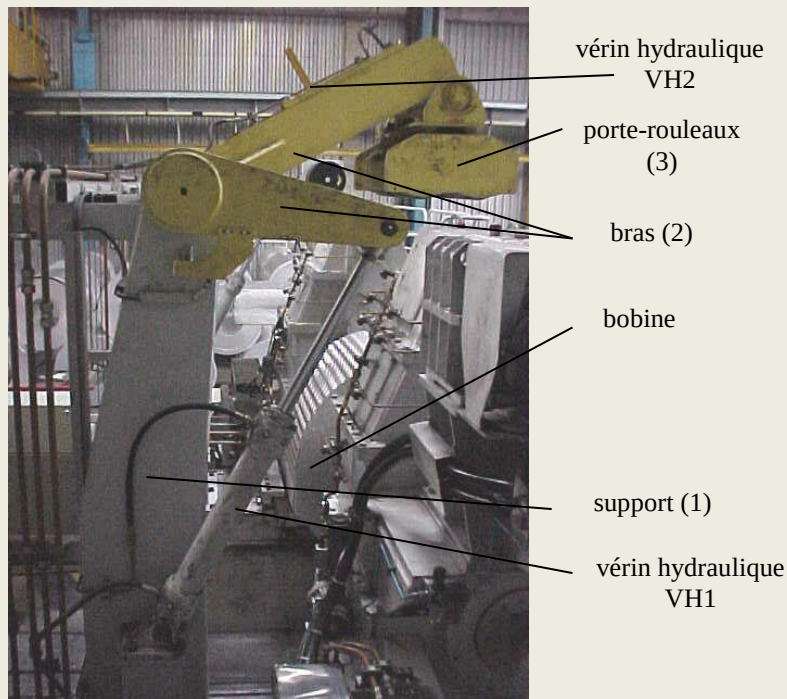
*Sciences Industrielles de l'Ingénieur
1^{ère} année de CPGE
Lycée Claude Fauriel*

Illustration : ligne de fabrication de tôle d'aluminium (extrait Centrale Marseille MP 02)

La société Péchiney-Rhénalu installée à Issoire (Puy de Dôme) est spécialisée dans la fabrication de tôles d'aluminium de différentes épaisseurs à hautes caractéristiques mécaniques. Schématiquement, le processus de fabrication débute par la coulée de lingots d'aluminium et de métaux d'addition qui sont ensuite laminés et conditionnés en bobines. Ces bobines de diamètre maxi 2700 mm, pesant autour de 25 tonnes sont ensuite déroulées et débitées en tôles de différentes dimensions.

On centre notre étude mécanique sur le bras porte rouleau équipant le poste d'entrée de la ligne LG37 comme le montre la photo.

Dans cet ensemble mécanique, on distingue notamment le support (1), le bras (2) animé en rotation par les 2 vérins hydrauliques VH1, le vérin hydraulique VH2, le porte-rouleau (3) ainsi que les deux rouleaux (4) et (5).



La dérouleuse manipule des bobines de tôles d'alliages d'aluminium de forme cylindrique, enroulées sur un mandrin expansible. Afin de faciliter leurs manipulations, la dernière spire des bobines de tôles est soudée. Après chargement de la bobine sur le poste d'entrée et positionnement de l'ensemble mobile, la première opération consiste à venir casser le cordon de soudure qui maintient la dernière couche enroulée.

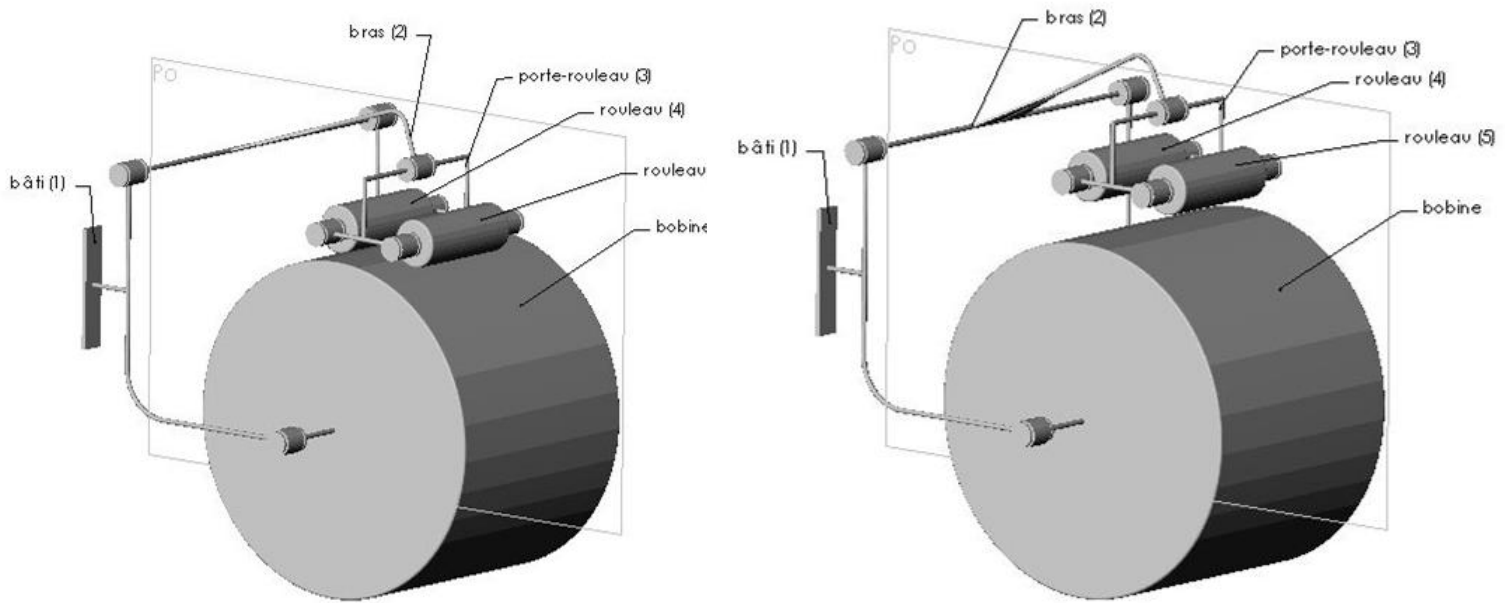
Les deux vérins hydrauliques (VH1) placés de part et d'autre du mécanisme, animent en rotation le bras (2) équipé de la tête (3) permettant le contact entre les rouleaux (4 et 5) et la bobine (6). L'outil, solidaire du coude (7), est actionné par l'unique vérin hydraulique (VH2). L'opérateur commande la rotation lente de la bobine de façon à amener le cordon de soudure en contact avec l'extrémité de l'outil. Ce dernier permet ainsi de casser le cordon de soudure qui maintenait la tôle enroulée.

Durant toute cette phase, les vérins hydrauliques (VH1) maintiennent les rouleaux (4 et 5) en contact avec la bobine. Ils appliquent ainsi un effort presseur sur la bobine évitant le déroulement spontané de la première spire une fois le cordon de soudure cassé.

Extrait du cahier des charges :

exigence	critères	valeurs
Assurer le maintien de la bobine sans « marquage » de la tôle d'aluminium	Pression de contact rouleau/bobine	$P < 1500 \text{ daN/m}$ pression de « matage »

Les figures ci-après montrent schématiquement les deux configurations possibles du mécanisme sans contact ou en contact entre les rouleaux et la bobine. On a volontairement omis de représenter les vérins hydrauliques (VH1 et VH2) car ils n'interviennent pas dans le modèle cinématique.



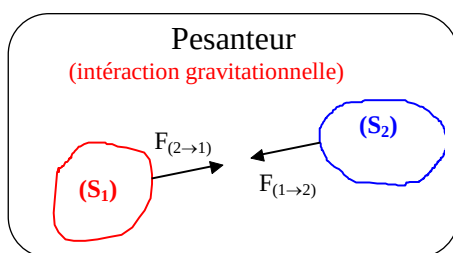
1 - Modélisation des actions mécaniques :

1.1 - Définition :

On appelle action mécanique toute cause susceptible de maintenir un solide au repos ou de créer un mouvement ou de déformer un solide (solide ou ensemble de solides).

On distingue deux types d'actions mécaniques:

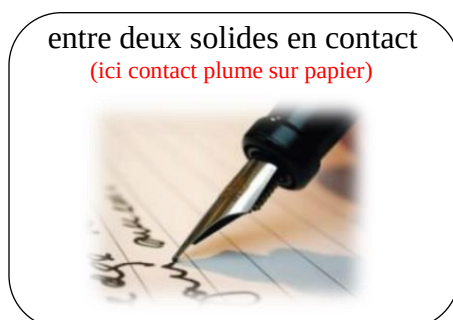
- les actions **volumiques** ou **à distance** qui s'exercent sans contact entre les solides:



ou



- les actions **surfaiques** ou **de contact**:



ou

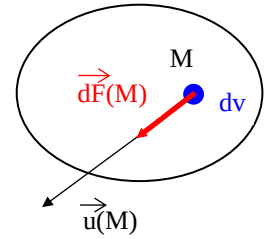


1.2 - Modélisation locale : on s'intéresse à ce qui se passe sur une toute petite partie de volume d'un solide (pour les actions volumiques de pesanteur) ou une toute petite surface de la surface de contact (pour les actions de contact entre solides)

1.2.1- Actions volumiques

$\vec{dF}(M) = f(M).dv.\vec{u}(M)$ sur un volume élémentaire dv Cette petite force est la représentation locale (s'appliquant sur un petit volume dv de centre M) d'une « force globale » que l'on obtiendra par la suite en intégrant sur l'ensemble du volume du solide.

$f(M)$ = répartition volumique d'effort en M en N/m^3 elle peut dépendre du point M
d'où $f(M)$



Pour la pesanteur :

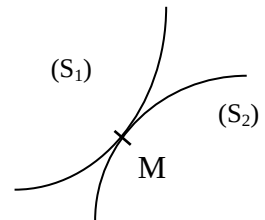
$\vec{u}(M)$ = verticale descendante (le poids fait tomber l'objet)

$f(M) = \rho(M).g$ avec $\rho(M)$ = masse volumique en kg/m^3 (variable si matériau non homogène)

g = accélération de la pesanteur

1.2.2 Actions surfaciques : Cette petite force est la représentation locale

(s'appliquant sur une petite surface ds de centre M) d'une « force globale » que l'on obtiendra par la suite en intégrant sur l'ensemble de la surface de contact entre deux solides.



Soient deux solides S_1 et S_2 en contact sur une surface ds . On isole S_1 . L'action est dirigée vers l'intérieur du solide isolé.

Action locale en M de S_2 sur S_1 : $\vec{dF}(M) = \vec{dF}_n(M) + \vec{dF}_t(M)$ elle se décompose en une action normale (portée par $\vec{n}(M)$) et une action tangentielle (dans le plan tangent au contact en M)

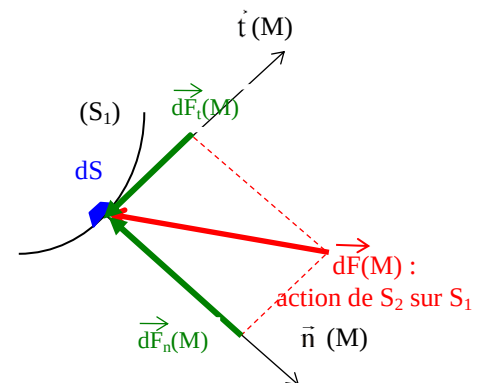
$$\vec{dF}(M) = -p(M) ds \vec{n}(M) + q(M) ds \vec{t}(M)$$

$p(M)$ = pression de contact en M peut dépendre du point M

$\vec{n}(M)$ = vecteur unitaire normal au plan tangent commun en M , orienté vers l'extérieur du solide isolé (sens communément utilisé)

$q(M)$ = répartition surfacique tangentielle d'effort en M (proportionnelle à la pression normale dans le cas du modèle de frottement de Coulomb lorsqu'il y a glissement)

$\vec{t}(M)$ = vecteur unitaire d'une direction du plan tangent commun en M .



- S'il n'y a pas de frottement en M (ou s'il est négligeable ou si fluide sur solide), $q(M) = 0$
- Sinon, les lois de Coulomb définissent $q(M)$ et la direction et le sens de $\vec{t}(M)$:

1er cas : la vitesse de glissement en M entre S_1 et S_2 n'est pas nulle : on est dans le cas de la cinématique. On se mettra toujours à la limite du glissement

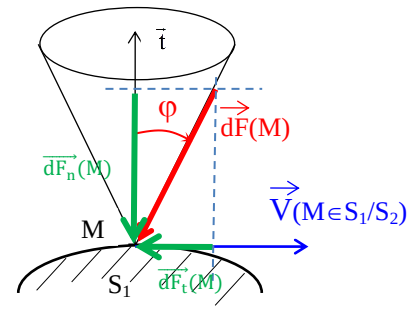
$$\vec{V}(M \in S_1/S_2) \neq \vec{0}$$

- $q(M) = f.p(M)$ avec f = coefficient de frottement en M entre S_1 et S_2
- $\vec{t}(M)$ est opposée à la vitesse de glissement de S_1/S_2 (S_1 étant le solide isolé)

le cône de frottement est le cône de demi-angle au sommet φ sur lequel se situe l'action élémentaire lorsque la vitesse de glissement change de direction.

Dans le cas du glissement l'action $\vec{dF}(M)$ s'incline de son angle maximum φ .
Le coefficient de frottement noté souvent f s'obtient par le rapport :

$$f = \tan\left(\frac{q(M)}{p(M)}\right)$$



2ème cas: la vitesse de glissement en M entre S_1 et S_2 est nulle

$$\vec{V}(M \in S1/S2) = \vec{0}$$

$q(M) \leq f.p(M)$ et $\vec{t}(M)$ de direction indéterminée

L'effort est alors à l'intérieur du cône de frottement, incliné de $\alpha \leq \varphi$ par rapport à la normale $\vec{t}$.

L'effort n'est jamais à l'extérieur du cône de frottement!

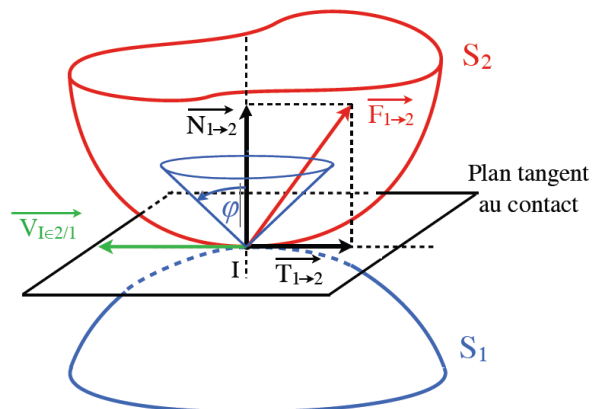
Finalement comme on ne sait pas grand-chose dans ce 2^{ème} cas (qui est pourtant celui qui nous intéresse, la statique) on se placera quasiment tout le temps à la limite des 2 cas.

Cas du **contact ponctuel** : $\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = \vec{N}_{1 \rightarrow 2} + \vec{T}_{1 \rightarrow 2}$

- Si $\vec{V}(I \in 2/1) = \vec{0}$; $\|\vec{T}_{1 \rightarrow 2}\| \leq f \|\vec{N}_{1 \rightarrow 2}\|$ et $\vec{T}_{1 \rightarrow 2}$ de direction inconnue ($\in$ plan tangent)
- Si $\vec{V}(I \in 2/1) \neq \vec{0}$; $\|\vec{T}_{1 \rightarrow 2}\| = f \|\vec{N}_{1 \rightarrow 2}\|$ et $\vec{T}_{1 \rightarrow 2}$ opposé à $\vec{V}(I \in 2/1)$

A Retenir, ce sera souvent le cas rencontré $\Rightarrow$ Liaison ponctuelle entre 2 solides.

- $\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$: est la force qu'exerce en I le solide 1 sur le solide 2
- $\vec{N}_{1 \rightarrow 2}$ et $\vec{T}_{1 \rightarrow 2}$ la décomposition de cette force $\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$ en une composante normale et une composante tangentielle.
- f est le coefficient de frottement



Remarque : Le coef. de frott. dépend de nombreux critères :

- nature des matériaux en contact (critère prépondérant)
- état de surface
- température
- pression de contact
- vitesse de glissement

Valeurs moyennes :

acier/acier : 0,15
acier/bronze : 0,10
acier/Ferodo : 0,3
pneu/route : 0,6

Dans la plupart des sujets, on considère que ce coeff de frottement ne dépend que du couple de matériaux en contact (**pas de dépendance avec la valeur de la vitesse de glissement et surtout avec la valeur de l'aire de la surface de contact. On prendra une valeur moyenne constante en tout point de la surface.**

Pour bien comprendre les lois de Coulomb lancer l'animation « Coulomb 1 ». C'est l'expérience qui permet d'obtenir l'angle de frottement. Il vaut l'angle d'inclinaison du plateau support lorsque le parallélépipède commence à glisser. Voir également l'animation « Coulomb 2 ».

1.3 - Modélisation globale : Il s'agit de modéliser l'action mécanique sur l'ensemble du volume du solide pour une action volumique et sur l'ensemble de la surface de contact entre les deux solides pour une action de contact.

Soit S le solide isolé: $\vec{F}(\text{Ext} \rightarrow S) = \int_{M \in S} d\vec{F}(M)$ On perd de l'information en globalisant les efforts.

Premier principe de la statique: **Toute action mécanique est entièrement caractérisée, d'un point de vue mécanique, par un torseur.**

Le torseur d'action mécanique permet de rendre compte de « l'effet » d'une force ailleurs qu'en son point d'application. Le moment représente l'aptitude d'une force à faire tourner un solide autour d'un axe donné.

$$T(\text{Ext} \rightarrow S) = \left\{ \begin{array}{c} \vec{F}(\text{Ext} \rightarrow S) \\ \vec{M}_A(\text{Ext} \rightarrow S) \end{array} \right\} \text{ avec } \vec{M}_B(\text{Ext} \rightarrow S) = \vec{M}_A(\text{Ext} \rightarrow S) + \vec{F}(\text{Ext} \rightarrow S) \wedge \overrightarrow{AB} \text{ on retrouve Babar !}$$

La résultante du torseur d'action mécanique global est la force exercée (en Newton) et le moment du torseur, le moment (en Newton*mètre) de cette action mécanique

Illustration : pourquoi les poignées de portes sont-elles placées à l'opposé des gonds ?

$$\left\{ \begin{array}{c} \vec{F}(\text{Ext} \rightarrow \text{porte}) = \vec{F}_A \\ \vec{M}_A(\text{Ext} \rightarrow \text{porte}) = \vec{0} \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{c} \vec{F}(\text{Ext} \rightarrow \text{porte}) = \vec{F}_A \\ \vec{M}_B(\text{Ext} \rightarrow \text{porte}) = \vec{F}_A \wedge \overrightarrow{AB} \neq \vec{0} \end{array} \right\}_B$$

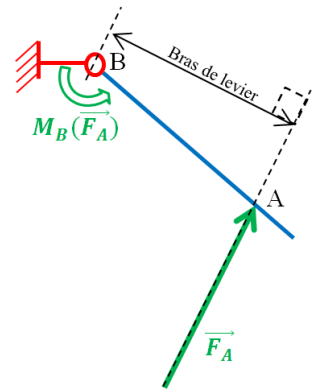
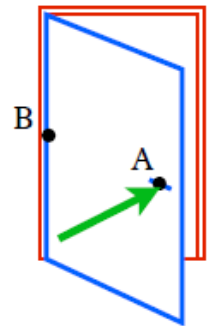
La force en A produit un moment en B dont le module est le produit de la force par le bras de levier (distance d du point B à la droite support de la force **qui est l'axe central du torseur glisseur**).

$$\|\vec{M}_B(\text{Ext} \rightarrow \text{porte})\| = \|\vec{F}_A \wedge \overrightarrow{AB}\| = \|\vec{F}_A\| \cdot d = \text{Force} * \text{bras de levier}$$

Moralité : pour fermer une porte, on exerce une force Perpendiculairement à la porte le plus loin possible (à l'opposé) Des gonds. La force sera ainsi minimale.

Remarques :

- L'action exercée est un glisseur en A (son moment est nul). En physique, on parle de force centrale. Si on exprime le torseur en un autre point de son axe central (la droite $(A, \vec{F}_A)$) la forme du torseur ne change pas. Son moment reste nul. La conséquence mécanique est donc la même (cela ne crée pas de mouvement de rotation). D'où le terme de glisseur. La force peut « glisser » le long de son support $(A, \vec{F}_A)$.
- Sur la figure ci-contre, on représente le moment créé en B par un vecteur tournant. Ce moment est un vecteur perpendiculaire à la figure à cause du produit vectoriel. Cette représentation plane illustre bien la conséquence en termes de rotation de l'effet de la force en A.



Cas particuliers : à connaître

- Actions mécaniques représentables par un **couple** : action du stator sur le rotor d'un moteur électrique. Les forces de laplace (voir cours de physique) qui s'exercent sur le cadre métallique que forme le rotor se compensent (résultante nulle). Elles s'exercent à une certaine distance de l'axe de rotation du moteur donc produisent un moment. C'est la couple moteur.

$$T(\text{Ext} \rightarrow S) = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \vec{M}_A(\text{Ext} \rightarrow S) \end{array} \right\}_A$$

 représentation des actions/ ça tourne...

- Actions mécaniques représentables par un **glisseur** : c'est une « force centrale en physique »

$$\mathbf{T}_{(\text{Ext} \rightarrow \text{S})} = \underset{\text{A}}{\left\{ \begin{array}{c} \vec{\mathbf{F}}(\text{Ext} \rightarrow \text{S}) \\ \vec{\mathbf{0}} \end{array} \right\}}$$



pour tout point $M \in$ droite d'action (support de la force $(A, \vec{\mathbf{F}})$), $\vec{\mathbf{M}}_M = \vec{\mathbf{0}}$. Voir remarques précédentes. La force peut être glissée le long de son support, la conséquence mécanique est la même donc le modèle d'action mécanique aussi.

 Afin de montrer la nécessité du modèle torseur pour les actions mécaniques, traiter les questions de l'exercice « frein de TGV » (fin du cours). Corrigé à retrouver à la suite de l'énoncé.

1.3.1 - Actions à distance: pesanteur (évitiez de parler du poids. Lorsqu'on va isoler plusieurs solides, il faudra tenir compte de l'action de la pesanteur sur chacun des solides isolés)

$$\int_{M \in S} -\rho(M) g \vec{z} dv = \vec{\mathbf{P}} = -m g \vec{z} \text{ avec } \vec{z} = \text{verticale ascendante}$$

$$\mathbf{T}_{(\text{pes} \rightarrow \text{S})} = \underset{\text{G}}{\left\{ \begin{array}{c} \vec{\mathbf{P}} \\ \vec{\mathbf{0}} \end{array} \right\}} \text{ avec G(barycentre) tel que } \int \overrightarrow{\text{GM}} dm = \vec{\mathbf{0}} \Rightarrow m \overrightarrow{\text{OG}} = \int_{M \in S} \overrightarrow{\text{OM}} dm$$

Pour ce torseur des actions de pesanteur sur le solide S, on peut vous demander de déterminer la masse du solide et/ou la position du centre de gravité G (le torseur est un glisseur en ce point). On peut utiliser les 2 théorèmes présentés ci-dessous.

Premier théorème de Guldin:

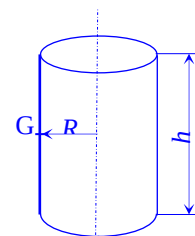
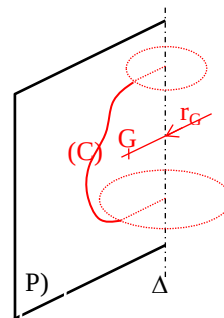
L'aire de la surface engendrée par une courbe plane C tournant autour d'un axe Δ de son plan P, ne la traversant pas, est égale au produit de la longueur de la courbe par le périmètre du cercle décrit par son centre de gravité.

$$S = 2 \pi r_G L$$

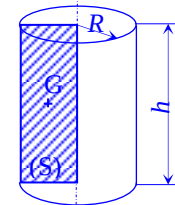
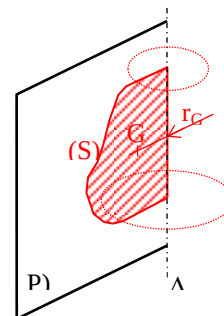
Deuxième théorème de Guldin:

Le volume engendré par une surface S plane tournant autour d'un axe Δ de son plan, ne la traversant pas, est égal au produit de l'aire de la surface par le périmètre du cercle décrit par son centre de gravité.

$$V = 2 \pi r_G S$$



$$S = 2 \pi R h$$



$$V = 2 \pi \cdot R/2 \cdot Rh$$

Ces 2 théorèmes permettent de trouver des surfaces, des volumes ou la position de centres de gravité. Leur utilisation est de plus en plus rare dans les sujets.

 Traiter l'exercice 1 des exercices de statique.

1.3.2 - Action hydrostatique d'un fluide sur un solide : l'exemple ci-dessous avec pression normale variable n'est pas très fréquent dans les sujets. Il faut néanmoins savoir le faire. Le deuxième cas avec pression normale constante est par contre très fréquent. On revient au modèle simple : force = pression * surface

- Pression variable : pression en un point M d'un fluide : $p(M) = p_0 + \rho g z$
avec p_0 = pression à la surface libre du fluide
 ρ = masse volumique du fluide
 g = accélération de la pesanteur
 z = profondeur au point M depuis la surface libre du fluide

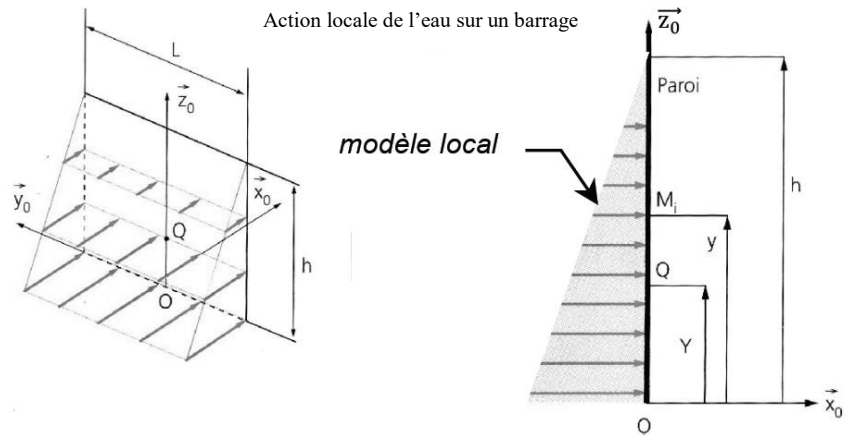


Attention : il faut bien regarder le paramétrage (« origine des z »). Voir exercices 3 des exercices de statique.

On a alors

$$\mathbf{T}(\text{fluide} \rightarrow \text{S}) = \left\{ \begin{array}{l} \int_S -p(\mathbf{M}) \vec{n}(\mathbf{M}) dS \\ \int_O \vec{OM} \wedge -p(\mathbf{M}) \vec{n}(\mathbf{M}) dS \end{array} \right\}$$

$\vec{n}(\mathbf{M})$ = normale en M dirigée vers l'extérieur du solide isolé



Le torseur ci-dessus peut être retrouvé

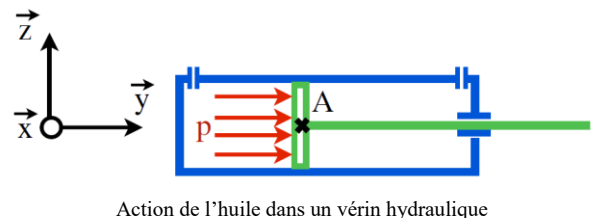
facilement. Il suffit pour la résultante de revenir

à force = pression * surface. On l'écrit en local puis on intègre sur la surface de contact.

On remarquera qu'il n'y a pas de composante tangentielle puisqu'on parle d'action hydrostatique. Pas de mouvement du fluide donc pas de frottement. Pour le moment, toujours pareil, on calcule l'effet en un point (ici O) de la petite force en M et on intègre sur la surface de contact fluide/solide.

- Pression constante : $p(M) = p_0$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{F}(\text{huile} \rightarrow \text{piston}) = p \cdot S \vec{y} \\ \vec{M}_A(\text{huile} \rightarrow \text{piston}) = \vec{0} \end{array} \right\}$$



Action de l'huile dans un vérin hydraulique

C'est le modèle hyper classique : on sort directement la résultante force = pression * surface pour la résultante. Le point où le torseur est un glisseur est le CDG de la surface de contact (« le milieu du piston » : le point A ici par symétrie).

 Traiter les exercices 2,3, 4 et 5 des exercices de statique.

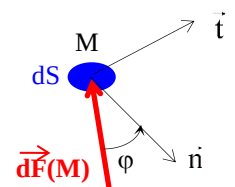
1.3.3 - Actions de contact entre solides : c'est la modélisation utilisée dans l'exercice de fin de cours sur le frein de TGV.

La répartition des efforts est très complexe (imperfections des surfaces de contact) $\Rightarrow$ lois empiriques pour fournir des ordres de grandeur : le modèle le plus simple est de choisir une pression uniforme entre les pièces c'est-à-dire $p(M) = p_0 = \text{Cte}$.

D'où l'action élémentaire en M (à la limite du glissement):

$$d\vec{F}(\mathbf{M}) = -p_0 \cdot dS \cdot \vec{n}(\mathbf{M}) + f \cdot p_0 \cdot dS \cdot \vec{t}(\mathbf{M})$$

On obtient le torseur d'action mécanique en intégrant sur la surface de contact:



$$\mathbf{T}_{(S_2 \rightarrow S_1)} = \left\{ \begin{array}{l} \int_S -p(\mathbf{M}) \vec{n}(\mathbf{M}) dS + \int_S q(\mathbf{M}) \vec{t}(\mathbf{M}) dS \\ \int_S \vec{OM} \wedge (-p(\mathbf{M}) \vec{n}(\mathbf{M}) dS + q(\mathbf{M}) \vec{t}(\mathbf{M}) dS) \end{array} \right\}_O = \left\{ \begin{array}{l} \int_S -p_0 \vec{n}(\mathbf{M}) dS + \int_S f p_0 \vec{t}(\mathbf{M}) dS \\ \int_S \vec{OM} \wedge (-p_0 \vec{n}(\mathbf{M}) dS + f p_0 \vec{t}(\mathbf{M}) dS) \end{array} \right\}_O$$

Il faut être capable de redonner ce torseur dans sa formulation générale. Rien de difficile.

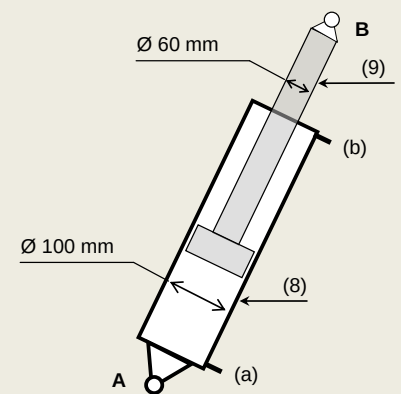
- La résultante est le modèle force globale. Donc on intègre (M se « balade ») sur la surface de contact la petite force $d\vec{F}$ qui se décompose en deux petites forces (normale et tangentielle) avec le plus souvent une pression de contact constante en se plaçant à la limite de glissement avec les lois de Coulomb.
- Le moment se calcule toujours par intégration sur la surface de contact du petit moment $(\vec{OM} \wedge d\vec{F})$ produit par la petite force $d\vec{F}$ au point de réduction du torseur (O ici).
- Exemple « consistant » : le frein de TGV en fin de cours.

Illustration : ligne de fabrication de tôle d'aluminium

Durant la phase de préparation de la bobine (cassure du cordon de soudure) les vérins VH1 maintiennent l'ensemble (2+3) de manière à appliquer un effort presseur sur la tôle, évitant son déroulement spontané. Dans cette configuration, ce sont les chambres (b) des vérins qui sont alimentées (voir figure ci-contre). La pression d'alimentation des chambres (b) est estimée à $60 \cdot 10^5 \text{ Pa}$. Les chambres (a) sont à l'échappement (on suppose alors une pression nulle).

On se propose de déterminer l'intensité des actions de contact entre les rouleaux et la bobine.

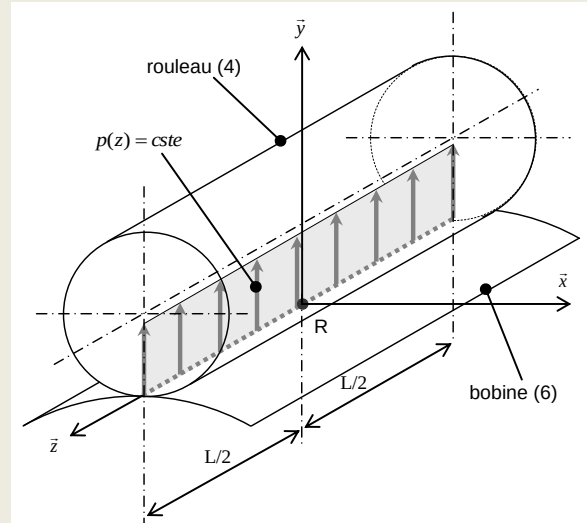
L'intensité des actions mécaniques extérieures mises en jeu sur le système permet de négliger les actions mécaniques de pesanteur.



On modélise les actions de contact entre les rouleaux et la bobine à partir de la géométrie du contact (en supposant une répartition de pression linéique constante (p en N/m) comme le montre la figure ci-contre).

Q1 : Déterminer l'expression littérale du torseur de l'action mécanique de la bobine (6) sur un rouleau en R, en fonction de p et L .

la pression de contact p est supposée cste
la surface de contact est le segment L : suivant $(R, \vec{z})$ de longueur L
la normale au contact orientée vers l'extérieur du solide isolé est $\vec{n}(\mathbf{M}) = -\vec{y}$
le frottement est négligé (les rouleaux sont montés libres sur axes de rotation : pas de moteur)



$$\text{donc } \{T_{6 \rightarrow 4}\}_R = \left\{ \begin{array}{l} \int_L -p \vec{n}(\mathbf{M}) dl \\ \int_L \vec{RM} \wedge (-p \vec{n}(\mathbf{M}) dl) \end{array} \right\} \text{ avec } \int_L -p \vec{n}(\mathbf{M}) dl = p \int_{-L/2}^{L/2} dz \vec{y} = p \cdot L \vec{y}$$

$$\text{et } \int_L \vec{RM} \wedge (-p \vec{n}(\mathbf{M}) dl) = p \int_{-L/2}^{L/2} z \cdot \vec{z} \wedge \vec{y} \cdot dz = -p \int_{-L/2}^{L/2} z \cdot dz \cdot \vec{x} = -p \left[\frac{z^2}{2} \right]_{-L/2}^{L/2} \vec{x} = \vec{0}$$

$$\text{d'où : } \{T_{6 \rightarrow 4}\}_R = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{6/4} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_R = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ +p \cdot L & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{R(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

1.3.4 - Actions de contact dans les liaisons sans frottement : A bien comprendre. C'est une des différences notables entre les deux visions de la mécanique, celle des physiciens et celle des Sistes.

Nous allons chercher à caractériser la forme du torseur des actions mécaniques de contact (ou torseur des inter-efforts ou torseur des efforts transmissibles) entre les solides S1 et S2 pour les liaisons normalisées. De façon générale, ce torseur s'écrit:

$$\mathcal{T}_{(S_1 \rightarrow S_2)} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}(S_1 \rightarrow S_2) \\ \vec{M}_O(S_1 \rightarrow S_2) \end{array} \right\}_O = \left\{ \begin{array}{c} X\vec{x} + Y\vec{y} + Z\vec{z} \\ L\vec{x} + M\vec{y} + N\vec{z} \end{array} \right\}_O = \left\{ \begin{array}{cc} X & L \\ Y & M \\ Z & N \end{array} \right\}_R$$

X, Y, Z sont les composantes de la résultante du torseur. Elles correspondent aux forces suivant les axes respectivement $\vec{x}$, $\vec{y}$ et $\vec{z}$ de la base d'expression du torseur.

L, M, N sont les composantes du moment du torseur. Elles correspondent aux moments suivant les axes respectivement $\vec{x}$, $\vec{y}$ et $\vec{z}$ de la base d'expression du torseur.

A chaque contact entre solides va correspondre un torseur d'action mécanique qui aura au maximum 6 composantes non nulles (si les 6 degrés de liberté entre les 2 solides concernés sont supprimés).

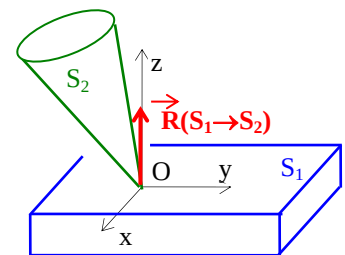
L'étude statique d'un mécanisme peut alors être vue comme un problème mathématique de résolution d'un système d'équations dont les inconnues sont les composantes (ci-dessus) des torseurs d'actions mécaniques. La résolution du système permettant de connaître les efforts assurant l'équilibre de chacun des solides du mécanisme.

Faisons d'abord un bilan pour chacune des liaisons normalisées (supposées parfaites) des composantes du torseur d'action mécanique à déterminer. On se limite à la liaison ponctuelle ou sphère/plan et à la pivot glissant pour comprendre le principe.

1.3.4.1 - Contact ponctuel :

Pas de frottement $\Rightarrow \vec{R}(S_1 \rightarrow S_2)$ porté par la normale en O (point de contact entre S1 et S2) au plan tangent commun aux 2 solides soit $\vec{z}$

et $\vec{M}_O(S_1 \rightarrow S_2) = \vec{0}$ d'où la forme du torseur $\mathcal{T}_{(S_1 \rightarrow S_2)} = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ Z & 0 \end{array} \right\}_R$



Le torseur d'inter-efforts garde cette forme en tout point de l'axe $\vec{z}$.

C'est un glisseur dont l'axe central est $(O, \vec{z})$

1.3.4.2 - Liaison pivot glissant:

Pas de frottement $\Rightarrow d\vec{F}(M) = -p(M).dS. \vec{n} \perp (O, \vec{x})$

$$\vec{R}(S_1 \rightarrow S_2) = \int_{M \in S_2} -p(M). \vec{n}. dS \perp (O, \vec{x}) \Rightarrow \vec{R}(S_1 \rightarrow S_2) = Y\vec{y} + Z\vec{z}$$

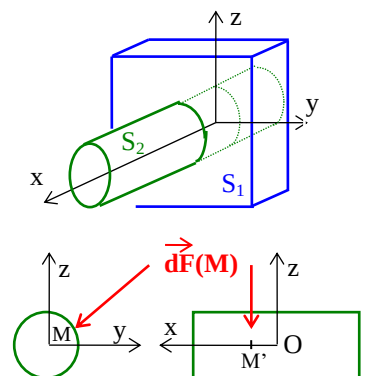
$$d\vec{M} = \vec{OM} \wedge d\vec{F} = (\vec{OM}' + \vec{M'M}) \wedge d\vec{F} = \vec{OM}' \wedge d\vec{F} \perp (O, \vec{x})$$

$$\text{donc } \vec{M}(S_1 \rightarrow S_2) = M\vec{y} + N\vec{z}$$

(remarque : M' est le projeté de M suivant l'axe $(O, \vec{x})$)

d'où le torseur des inter-efforts de la liaison pivot glissant: $\mathcal{T}_{(S_1 \rightarrow S_2)} = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ Y & M \\ Z & N \end{array} \right\}_R$

La forme est identique en tout point de l'axe $(O, \vec{x})$.



Conclusion : les degrés de liberté de la liaison apparaissent sous forme de composantes nulles dans le torseur statique (pas de transmission possible d'efforts si mouvement entre les 2 solides):

- rotation autour de $x \Rightarrow$ pas de moment sur x
- translation selon $x \Rightarrow$ pas de résultante sur x



A comprendre et à retenir

→ Tableau récapitulatif des formes des torseurs statiques des liaisons : Il faut être capable de retrouver très rapidement les résultats présentés dans ce tableau. La méconnaissance de la forme du torseur d'action mécanique associé à une liaison normalisée empêchera toute résolution correcte d'un problème de statique !!!

Liaison	Torseur	Forme particulière conservée	Liaison	Torseur	Forme particulière conservée
ponctuelle de normale $(O, \vec{z})$	${}_O \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ Z & 0 \end{Bmatrix}_R$	points de $(O, \vec{z})$	pivot glissant d'axe $(O, \vec{x})$	${}_O \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}_R$	points de $(O, \vec{x})$
linéique rectiligne d'axe $(O, \vec{x})$ de normale $(O, \vec{z})$	${}_O \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M \\ Z & 0 \end{Bmatrix}_R$	points du plan $(O, \vec{x}, \vec{z})$	glissière hélicoïdale d'axe $(O, \vec{x})$	${}_O \begin{Bmatrix} X & L \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}_R$	points de $(O, \vec{x})$ $L = -pX / 2\pi$
linéique annulaire d'axe $(O, \vec{x})$	${}_O \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y & 0 \\ Z & 0 \end{Bmatrix}_R$	au point O	glissière d'axe $(O, \vec{x})$	${}_O \begin{Bmatrix} 0 & L \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}_R$	en tout point de l'espace
rotule de centre O	${}_O \begin{Bmatrix} X & 0 \\ Y & 0 \\ Z & 0 \end{Bmatrix}_R$	au point O	pivot d'axe $(O, \vec{x})$	${}_O \begin{Bmatrix} X & 0 \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}_R$	points de $(O, \vec{x})$
appui plan de normale $(O, \vec{z})$	${}_O \begin{Bmatrix} 0 & L \\ 0 & M \\ Z & 0 \end{Bmatrix}_R$	en tout point de l'espace	encastrement	${}_O \begin{Bmatrix} X & L \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}_R$	en tout point de l'espace

Vous trouverez en complément de ce tableau un tableau de synthèse donnant les formes des torseurs cinématiques et d'actions mécaniques pour l'ensemble des liaisons normalisées (Tableau torseurs des liaisons normalisées). On rappelle que les composantes du torseur cinématiques sont des vitesses de rotation (suivant $\vec{x}, \vec{y}$ et $\vec{z}$) pour la résultante et des vitesses linéaires (suivant $\vec{x}, \vec{y}$ et $\vec{z}$) pour le moment. Vous devez être capable de retrouver l'ensemble des résultats présentés en très peu de temps...

 **Traiter l'exercice 6 (Q1) des exercices de statique ainsi que les exercices supplémentaires torseurs liaisons et PFD (Questions avant PFS)**

2 - Isolement d'un système matériel:

Système matériel E = ensemble de solides et fluides qu'on veut étudier (pas nécessairement figé dans une position).

2.1 - Système isolé: tout ou partie d'un système matériel que l'on rend distinct de son environnement → *quantité de fluide, partie de pièce, une pièce ou un ensemble de pièces...*

L'espace est donc séparé en 2 parties: le système isolé E et son environnement $\bar{E}$.

2.2 - Efforts intérieurs et extérieurs:

- efforts extérieurs appliqués à un système E = actions mécaniques exercées par $\bar{E}$ sur E modélisée par un torseur. **Ceux sont ces efforts qui vont intervenir dans le principe fondamental de la statique (dynamique au repos).**
- efforts intérieurs: actions exercées mutuellement par les différentes parties du système isolé. **Ces efforts seront pris en compte en 2^{ème} année dans l'application du théorème de l'énergie cinétique.**

3 - Principe fondamental de la statique:

3.1 - Équilibre d'un système matériel E par rapport à un repère R: on dit qu'un système E est en équilibre par rapport à un repère R si, à un instant donné, tous ses éléments sont immobiles par rapport à R.

$$\mathbf{E} \text{ en équilibre / } \mathbf{R} \Leftrightarrow \forall \mathbf{M} \in \mathbf{E}, \vec{V}(\mathbf{M} \in \mathbf{E} / \mathbf{R}) = \vec{0}$$

3.2 - Énoncé du principe fondamental de la statique:

Si un système matériel E est en équilibre par rapport à un repère galiléen, alors le torseur des actions extérieures qui lui est appliqué est égal au torseur nul.

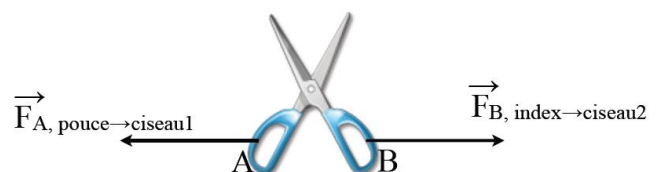
$$\mathbf{T}(\bar{\mathbf{E}} \rightarrow \mathbf{E}) = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \vec{0} \end{array} \right\}$$

Attention à bien écrire les torseurs au même point de réduction!



ce n'est pas une condition suffisante!

$\mathbf{T}(\text{Ext} \rightarrow \text{ciseaux}) = \{0\}$ mais les ciseaux ne sont pas en équilibre !



Repères galiléens approchés (cf cours de physique):

- repère de Copernic (centre = soleil, directions = 3 étoiles) $\Rightarrow$ étude des fusées
 - repère défini par le centre d'inertie de la terre et les directions de 3 étoiles
- $\Rightarrow$ mouvement des corps restant au voisinage de la terre ou expériences terrestres de longue durée
- repère lié à la terre $\Rightarrow$ études abordées en S.I.

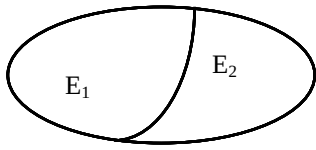
3.3 - Théorèmes généraux de la statique:

- Théorème de la Résultante Statique : $\mathbf{E} \text{ en équilibre / } \mathbf{R}_g \Rightarrow \vec{\mathbf{R}}(\bar{\mathbf{E}} \rightarrow \mathbf{E}) = \vec{0}$

- Théorème du Moment Statique : $\mathbf{E} \text{ en équilibre / } \mathbf{R}_g \Rightarrow \vec{\mathbf{M}}_0(\bar{\mathbf{E}} \rightarrow \mathbf{E}) = \vec{0} \quad (\forall \text{ le point } O)$

Conséquence: en projetant ces 2 équations vectorielles sur un repère orthonormé, on trouve 6 équations scalaires; la résolution d'un problème de statique revient donc à écrire et résoudre un système de 6 équations scalaires.

3.4 - Théorème des actions réciproques (ou mutuelles): Soit $E = E_1 \cup E_2$



$$T(\bar{E} \rightarrow E) = T(\bar{E} \rightarrow E_1) + T(\bar{E} \rightarrow E_2) = \{0\} \quad (1)$$

$$T(\bar{E}_1 \rightarrow E_1) = T(E_2 \rightarrow E_1) + T(\bar{E} \rightarrow E_1) = \{0\} \quad (2)$$

$$T(\bar{E}_2 \rightarrow E_2) = T(E_1 \rightarrow E_2) + T(\bar{E} \rightarrow E_2) = \{0\} \quad (3)$$

$$(1) - (2) - (3) \quad T(E_2 \rightarrow E_1) + T(E_1 \rightarrow E_2) = \{0\}$$

Si un système matériel E_1 exerce une action mécanique sur un autre système E_2 , alors E_2 exerce sur E_1 une action opposée.

Traiter l'exercice 6 des exercices de statique ainsi que les exercices supplémentaires torseurs liaisons et PFD.

3.5 - Équilibre d'un solide (ou ensemble de solides) soumis à 2 actions modélisables par des glisseurs:

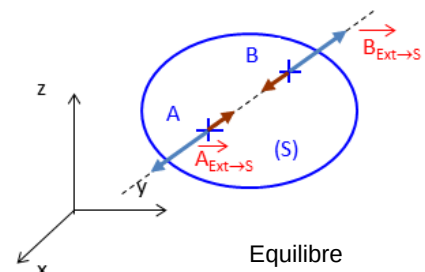
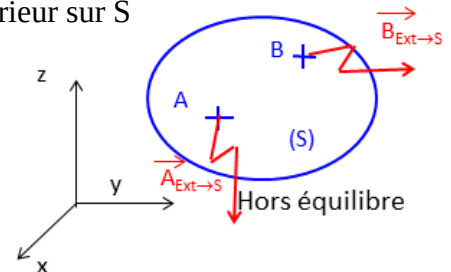
La traduction graphique du PFS dans ce cas particulier permet de gagner beaucoup de temps dans la rédaction par rapport à une version analytique. Quand celle-ci n'est pas imposée, il est fortement conseillé d'utiliser le résultat ci-dessous.

Notation: $\vec{A}_{Ext \rightarrow S}$ = effort modélisable par un glisseur exercé en A par l'extérieur sur S

$$T_A(Ext \rightarrow S) = \left\{ \begin{array}{c} \vec{A}_{Ext \rightarrow S} \\ \vec{0} \end{array} \right\} \quad \text{et} \quad T_B(Ext \rightarrow S) = \left\{ \begin{array}{c} \vec{B}_{Ext \rightarrow S} \\ \vec{0} \end{array} \right\}$$

$$S \text{ en équilibre} \Rightarrow \begin{cases} \vec{A}_{Ext \rightarrow S} + \vec{B}_{Ext \rightarrow S} = \vec{0} & (1) \\ \overrightarrow{AB} \wedge \vec{B}_{Ext \rightarrow S} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \text{ et } \vec{B}_{Ext \rightarrow S} \text{ colinéaires donc } \vec{B}_{Ext \rightarrow S} \text{ passe par A} \end{cases}$$

de (1) $\vec{A}_{Ext \rightarrow S}$ opposé à $\vec{B}_{Ext \rightarrow S}$ donc $\vec{A}_{Ext \rightarrow S}$ passe par B.
les normes et les sens des forces restent inconnus.



Théorème : si un solide (ou un ensemble de solides) est en équilibre sous l'action de 2 efforts modélisables par des glisseurs, ceux-ci sont colinéaires (résultat du TMS) et de somme nulle (résultat du TRS).

Exemple: solide sur un plan incliné

On suppose l'action de 2 sur 1 modélisable par un glisseur.

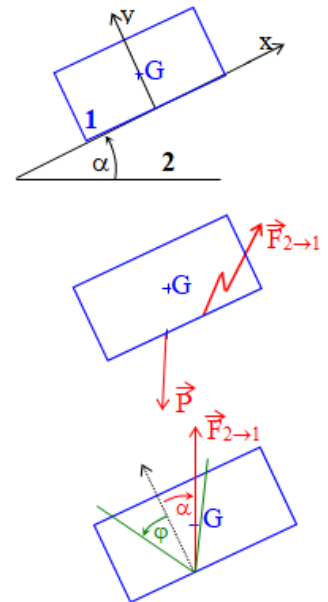
Déterminons le coefficient de frottement minimal pour que 1 reste en équilibre.

a – on isole le solide 1 et on fait le bilan des actions extérieures:

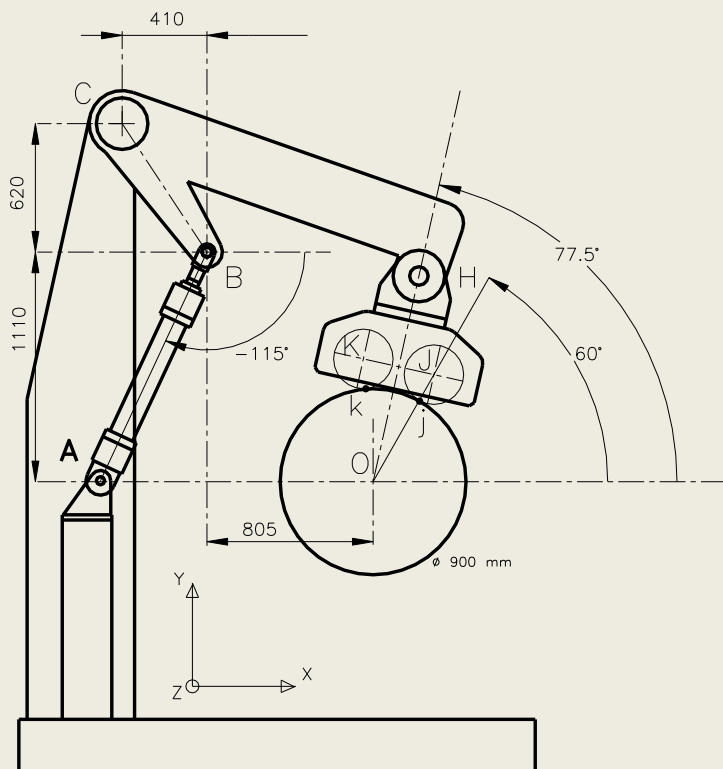
b – 1 est en équilibre sous l'action de deux glisseurs: ils sont donc

directement opposés $\Rightarrow \vec{F}_{2 \rightarrow 1}$ est vertical et passe par G

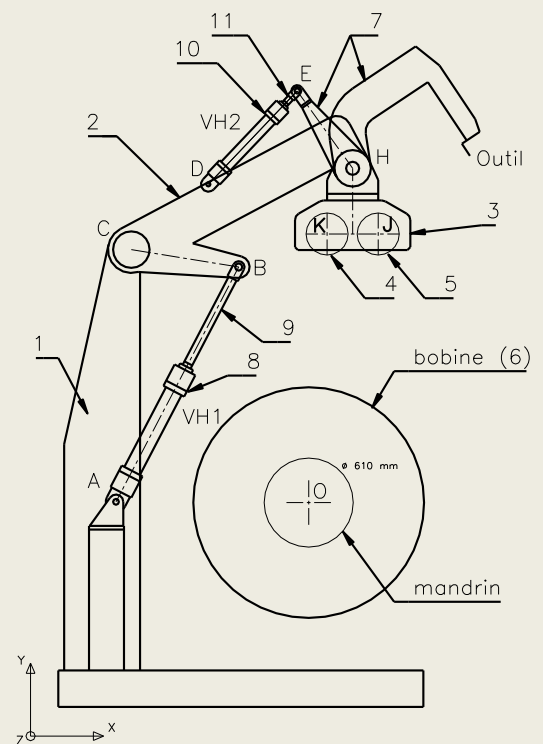
c - $\vec{F}_{2 \rightarrow 1}$ est à l'intérieur du cône de frottement
 $\Rightarrow 1$ reste en équilibre si $\alpha < \varphi$

**Illustration** : ligne de fabrication de tôle d'aluminium

ETUDE DE LA POSITION BASSE (CONFIGURATION AVEC CONTACT)



Position basse avec contact rouleaux (4) et (5) avec (6)



Position haute sans contact rouleaux (4) et (5) avec (6)

On suppose que les liaisons en A et B sont des liaisons rotules parfaites.

Q2 : Justifier que le support de $\vec{B}_{9 \rightarrow 2}$ (résultante des actions mécaniques des deux vérins VH1 sur 2) est porté par la droite (AB).

On isole l'ensemble 8+9+fluide contenu dans le vérin. Il est soumis à l'action de la pesanteur que l'on néglige et aux actions en A et B.

$$\{T_{1 \rightarrow 8}\}_A = \begin{Bmatrix} \vec{R}(1 \rightarrow 8) \\ \vec{M}_A(1 \rightarrow 8) \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} X_{18} & 0 \\ Y_{18} & 0 \\ Z_{18} & 0 \end{Bmatrix} \text{ et } \{T_{2 \rightarrow 9}\}_B = \begin{Bmatrix} \vec{R}(2 \rightarrow 9) \\ \vec{M}_B(2 \rightarrow 9) \end{Bmatrix}_B = \begin{Bmatrix} X_{29} & 0 \\ Y_{29} & 0 \\ Z_{29} & 0 \end{Bmatrix} \quad \text{ce sont des glisseurs}$$

Le TMS nous dit que ces glisseurs ont même support, la droite passant par leur point d'application : (AB)

3.6 - Équilibre d'un solide (ou ensemble de solides) soumis à 3 actions modélisables par des glisseurs:

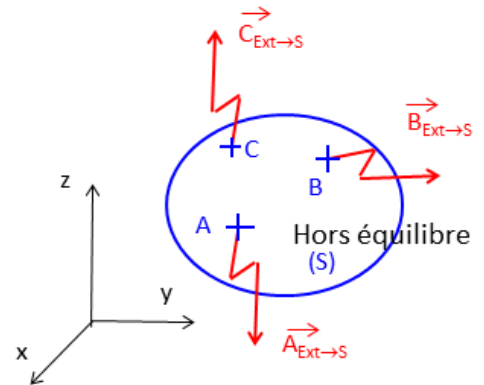
La traduction graphique du PFS dans ce cas particulier n'est plus au programme dans les filières MP et PSI. Néanmoins, le résultat donné par le PFS permet de résoudre par construction graphique la majorité des problèmes de statique plane pour lesquels les actions mécaniques sont toutes modélisables par des glisseurs. C'est d'ailleurs comme cela qu'on évaluait avant le développement de méthodes numériques informatiques les efforts dans les structures des bâtiments, ponts et autres systèmes mécaniques. Pour les sujets de concours, la résolution analytique sera systématiquement privilégiée.

$$T_A(\text{Ext} \rightarrow S) = \begin{Bmatrix} \vec{A}_{\text{Ext} \rightarrow S} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_A \quad T_B(\text{Ext} \rightarrow S) = \begin{Bmatrix} \vec{B}_{\text{Ext} \rightarrow S} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_B$$

$$T_C(\text{Ext} \rightarrow S) = \begin{Bmatrix} \vec{C}_{\text{Ext} \rightarrow S} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_C$$

$$S \text{ en équilibre} \Rightarrow \begin{cases} \vec{A}_{\text{Ext} \rightarrow S} + \vec{B}_{\text{Ext} \rightarrow S} + \vec{C}_{\text{Ext} \rightarrow S} = \vec{0} & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{X} = \vec{AB} \wedge \vec{B}_{\text{Ext} \rightarrow S} \perp \vec{AB} \text{ et } \perp \vec{B}_{\text{Ext} \rightarrow S} & \text{donc } \perp \text{ au plan } P_1 \text{ contenant } A, B \text{ et } \vec{B}_{\text{Ext} \rightarrow S} \\ \vec{Y} = \vec{AC} \wedge \vec{C}_{\text{Ext} \rightarrow S} \perp \vec{AC} \text{ et } \perp \vec{C}_{\text{Ext} \rightarrow S} & \text{donc } \perp \text{ au plan } P_2 \text{ contenant } A, C \text{ et } \vec{C}_{\text{Ext} \rightarrow S} \end{cases} \quad (2)$$



de (2), $\vec{X}$ et $\vec{Y}$ sont colinéaires donc les plans P_1 et P_2 ont une normale commune et un point commun A $\Rightarrow$ ils sont confondus donc $\vec{B}_{\text{Ext} \rightarrow S}$ et $\vec{C}_{\text{Ext} \rightarrow S}$ appartiennent au même plan $P_1 = P_2 = P$

de (1), $\vec{A}_{\text{Ext} \rightarrow S} \in P \Rightarrow$ les 3 glisseurs $\vec{A}_{\text{Ext} \rightarrow S}$, $\vec{B}_{\text{Ext} \rightarrow S}$ et $\vec{C}_{\text{Ext} \rightarrow S}$ sont coplanaires.

- soit I l'intersection de $\vec{A}_{\text{Ext} \rightarrow S}$ et de $\vec{B}_{\text{Ext} \rightarrow S}$ si elle existe
 $\Rightarrow \vec{M}_I(\vec{A}_{\text{Ext} \rightarrow S}) = \vec{0}$ et $\vec{M}_I(\vec{B}_{\text{Ext} \rightarrow S}) = \vec{0}$

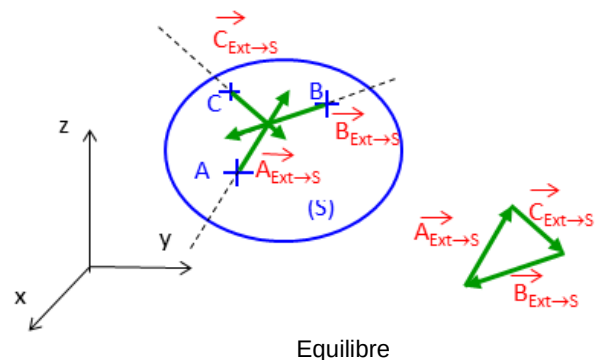
Exprimons le théorème du moment statique en I:

$$\vec{M}_I(\vec{A}_{\text{Ext} \rightarrow S}) + \vec{M}_I(\vec{B}_{\text{Ext} \rightarrow S}) + \vec{M}_I(\vec{C}_{\text{Ext} \rightarrow S}) = \vec{0}$$

d'où $\vec{M}_I(\vec{C}_{\text{Ext} \rightarrow S}) = \vec{0}$ donc $\vec{C}_{\text{Ext} \rightarrow S}$ passe par I $\Rightarrow$ Les 3 glisseurs sont alors concourants en I.

- si I n'existe pas, alors $\vec{A}_{\text{Ext} \rightarrow S} \parallel \vec{B}_{\text{Ext} \rightarrow S}$

d'après le théorème de la résultante, la somme des 3 glisseurs est nulle donc $\vec{C}_{\text{Ext} \rightarrow S} \parallel \vec{A}_{\text{Ext} \rightarrow S}$



Théorème: Si un solide, soumis à trois actions modélisables par des glisseurs, est en équilibre, alors ces trois glisseurs sont:

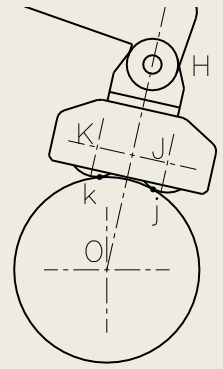
- coplanaires
- concourants ou parallèles (résultat du TMS)
- de somme vectorielle nulle (résultat du TRS)

Illustration : ligne de fabrication de tôle d'aluminium

ETUDE DE LA POSITION BASSE (CONFIGURATION AVEC CONTACT)

On appelle respectivement k et j les points de contact entre la bobine et les rouleaux (4 et 5) de centre K et J . On considèrera une rotule comme modèle de liaison pour la liaison en H .

Q3 : Justifier par un raisonnement simple que les actions de contact en k et j ont même intensité. On pourra isoler le sous-système $ss = \{ \text{tête (3)} + \text{rouleaux (4 et 5)} \}$ afin d'étayer le raisonnement.



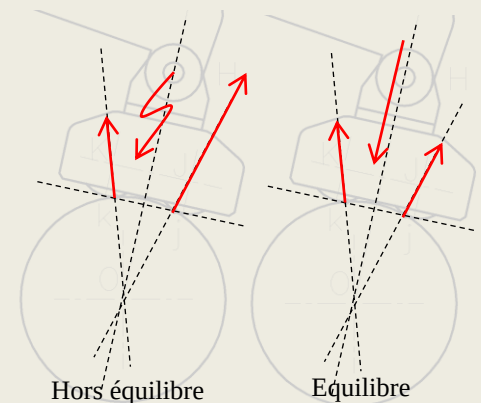
On isole le sous-système $ss = \{ \text{tête (3)} + \text{rouleaux (4 et 5)} \}$. Soumis à l'action :

$\vec{k}_{6 \rightarrow 4}$: glisseur de direction (Ok) car frottement négligé (question 2)

$\vec{j}_{6 \rightarrow 5}$: glisseur de direction (Oj) car frottement négligé (question 2)

$\vec{H}_{2 \rightarrow 3}$: glisseur (liaison rotule) de direction inconnue

TMS en $O \Rightarrow \vec{H}_{2 \rightarrow 3}$ de direction (OH) et TRS en projection sur la perpendiculaire à (OH) $\Rightarrow$ module des actions en k et j de même valeur



4 - Applications aux problèmes plans :

De nombreux mécanismes présentent des symétries par rapport à un plan de leur géométrie et des actions mécaniques extérieures qui s'appliquent. Dans ce cas on adoptera l'hypothèse Problème plan (en général, cette hypothèse est donnée dans l'énoncé). Elle permet de limiter l'étude aux forces ou résultantes des torseurs dans le plan et aux moments des forces ou couples perpendiculaires au plan.

Ce faisant, on réduit donc le nombre d'inconnues des torseurs d'actions mécaniques aux liaisons, mais également le nombre d'équations que fournit le PFS pour chaque isolement choisi. La résolution se fera beaucoup plus rapidement !!!

Les torseurs des actions mécaniques ont alors la forme simplifiée suivante si on suppose que le plan d'étude est le plan $(\vec{x}, \vec{y})$:

$$T_{(S_1 \rightarrow S_2)} = \begin{Bmatrix} X & - \\ Y & - \\ - & N \end{Bmatrix}_O$$

Les valeurs représentées par $___$ ne sont pas nécessairement nulles mais on n'en tient pas compte dans le problème étudié.

Les torseurs statiques des liaisons planes ont alors les formes suivantes:

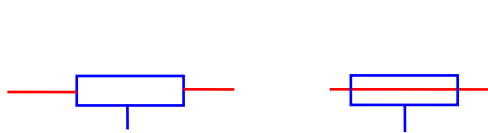
- Articulation = liaison pivot ou pivot glissant d'axe $(A, \vec{z})$: $T_{(S_1 \rightarrow S_2)} = \begin{Bmatrix} X & - \\ Y & - \\ - & 0 \end{Bmatrix}_A$



L'action de S_1 sur S_2 est donc modélisable par un **glisseur** passant par A .

Sans cette hypothèse Pb plan, le torseur n'est pas un glisseur (ou force centrale) mais un torseur avec des composantes de moment. On passe de 4 ou 5 inconnues de liaisons à 2 !

- Liaison glissière ou pivot glissant d'axe $\in \text{plan}(x,y)$, d'axe $(A, \bar{x})$ par exemple:



$$T(S_1 \rightarrow S_2) = \begin{Bmatrix} 0 \\ Y \\ - \\ N \end{Bmatrix}_R$$

L'action de S_1 sur S_2 n'est donc pas modélisable par un **glisseur**.

Cette hypothèse **Pb plan** permet de réduire le nombre d'inconnues de liaisons. On passe de 4 ou 5 à 2 !

Illustration : ligne de fabrication de tôle d'aluminium

ETUDE DE LA POSITION BASSE (CONFIGURATION AVEC CONTACT)

On se propose de déterminer l'intensité des actions de contact entre les rouleaux et la bobine.

La figure correspondant à la position basse donnée précédemment précise, entre autres, les orientations des différents supports des glisseurs d'actions mécaniques, ainsi que les positions relatives des différents points (distances exprimées en millimètres).

Q4 : En utilisant les notations adoptées pour l'écriture des torseurs d'action mécanique, déterminer complètement les torseurs d'actions mécaniques extérieures au système (2,3,4,5). Faire les applications numériques. On utilisera comme unités le déca-Newton (daN) et le déca-Newton.mètre (daN.m).

On étudie l'équilibre du système (2,3,4,5) :

En prenant les hypothèses suivantes :

- problème plan
- liaisons parfaites
- pesanteur négligée

les actions mécaniques sont toutes modélisables par des glisseurs ce qui permet l'interprétation graphique ci-dessous.

Le bilan des AME s'établit avec les notations conventionnelles et $\|\vec{k}_{6/S2}\| = \|\vec{j}_{6/S2}\| = R$:

• action des 2 tiges 9 des vérins: $\{T_{9/S2}\}_B = \begin{Bmatrix} \vec{B}_{9/S2} \\ \vec{0} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_B & 0 \\ Y_B & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{R_1(\bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_1)} = \begin{Bmatrix} B \cos(-115^\circ) & 0 \\ B \sin(-115^\circ) & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{R_1(\bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_1)}$

avec:

$$B = 2 \times p \times S = 2 \times p \times \pi \left(\frac{\phi_p^2}{4} - \frac{\phi_t^2}{4} \right) = 2 \times 60.10^5 \times \pi \left(\frac{0,1^2}{4} - \frac{0,06^2}{4} \right)$$

$$= 60320 \text{ N} = 6032 \text{ daN}$$

- action de la bobine en j:

$$\{T_{6/S2}\}_j = \begin{Bmatrix} \vec{j}_{6/S2} \\ \vec{0} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_j & 0 \\ Y_j & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{R_1(\bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_1)} = \begin{Bmatrix} R \cos(60^\circ) & 0 \\ R \sin(60^\circ) & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{R_1(\bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_1)}$$

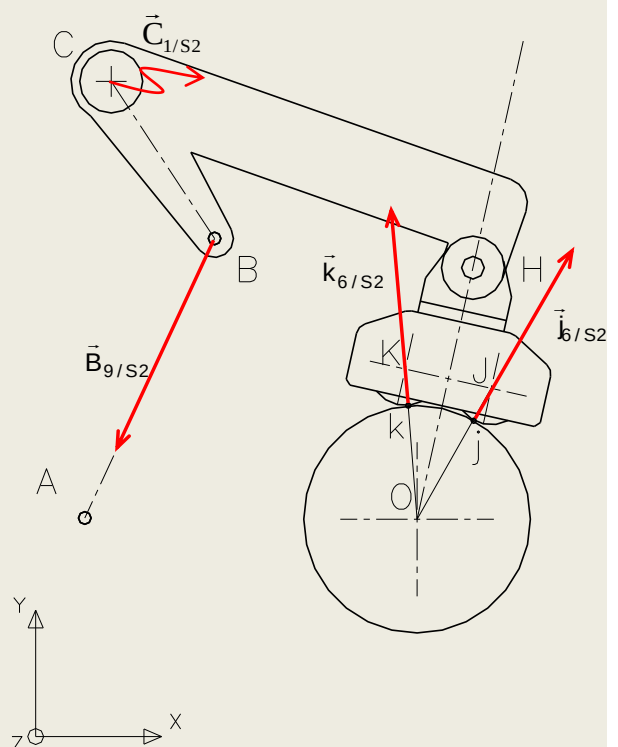
- action de la bobine en k:

$$\{T_{6/S2}\}_k = \begin{Bmatrix} \vec{k}_{6/S2} \\ \vec{0} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_k & 0 \\ Y_k & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{R_1(\bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_1)} = \begin{Bmatrix} R \cos(95^\circ) & 0 \\ R \sin(95^\circ) & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{R_1(\bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_1)}$$

car la normale en k est orientée à $(77,5^\circ + (77,5^\circ - 60^\circ)) = 95^\circ$.

- action du bâti 1 (articulation en C):

$$\{T_{1/S2}\}_C = \begin{Bmatrix} \vec{C}_{1/S2} \\ \vec{0} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_C & 0 \\ Y_C & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{R_1(\bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_1)}$$



La résolution la plus simple consiste à écrire le PFS au point O, seuls $\{T_{9/S2}\}$ et $\{T_{1/S2}\}$ sont à transporter en O puisque les autres correspondent à des glisseurs passant par O, soit à calculer :

$$\vec{M}_{O(9/S2)} = \vec{OB} \wedge \vec{B}_{9/S2} = \begin{vmatrix} -0,805 & B \cdot \cos(-115) & -0,805 \\ +1,11 & B \cdot \sin(-115) & -2550 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -0,805 & -2550 & 0 \\ +1,11 & -5467 & 0 \\ 0 & 0 & 7,23 \cdot 10^3 \end{vmatrix} m \cdot daN$$

$$\vec{M}_{O(1/S2)} = \vec{OC} \wedge \vec{C}_{1/S2} = \begin{vmatrix} -1,215 & X_C & 0 \\ +1,730 & Y_C & 0 \\ 0 & 0 & -1,215 \cdot Y_C - 1,730 \cdot X_C \end{vmatrix}$$

Soit à résoudre le système:
$$\begin{cases} R \cdot \cos(60) + R \cdot \cos(95) - 2550 + X_C = 0 \\ R \cdot \sin(60) + R \cdot \sin(95) - 5467 + Y_C = 0 \\ 7,23 \cdot 10^3 - 1,215 \cdot Y_C - 1,73 \cdot X_C = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} R = 1285 daN \\ X_C = 2020 daN \\ Y_C = 3075 daN \end{cases}$$

Récapitulatif:

$$\{T_{6/S2}\}_j = \begin{Bmatrix} \vec{j}_{6/S2} \\ \vec{0} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 642,5 & 0 \\ 1113 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{R_1(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)}$$

$$\{T_{6/S2}\}_k = \begin{Bmatrix} \vec{k}_{6/S2} \\ \vec{0} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -112 & 0 \\ 1280 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{R_1(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)}$$

$$\{T_{9/S2}\}_B = \begin{Bmatrix} \vec{B}_{9/S2} \\ \vec{0} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -2550 & 0 \\ -5467 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{R_1(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)}$$

$$\{T_{1/S2}\}_C = \begin{Bmatrix} \vec{C}_{1/S2} \\ \vec{0} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 2020 & 0 \\ 3075 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{R_1(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)}$$

Q5 : Estimer alors la pression de contact linéique p entre la bobine et chacun des rouleaux dans le cas où $L=1m$. Faire l'application numérique. Le cahier des charges est-il respecté ?

Cela revient à écrire: $R = p \times L$, soit ici: $p = 1285 daN / m$. Le CDCF est validé

Remarque concernant la résolution de ce problème :

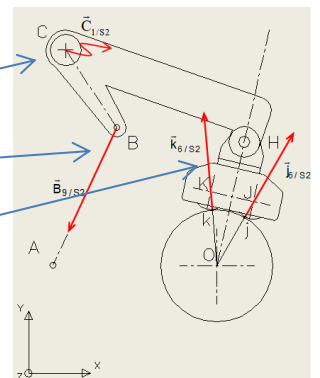
Même si la résolution graphique n'est plus au programme (la maîtrise des méthodes n'est pas exigible aux concours) je vous conseille pour les problèmes plans dans lesquels les actions mécaniques sont toutes modélisables par des glisseurs (c'est le cas ici) de représenter les forces intervenant dans le BAME. Cela permet de ne rien oublier et faciliter la résolution (inconnues à déterminer, choix du point d'écriture du TMS).

Le BAME fait intervenir 4 forces puisque Pb plan et liaisons soit pivots soit ponctuelles sans frottement.

- $\vec{C}_{1/S2}$ inconnue $\Rightarrow$ 2 composantes de force (résultante) à déterminer
- $\vec{B}_{9/S2}$ de direction connue $\Rightarrow$ 1 composante de force (résultante) à déterminer
- $\vec{k}_{6/S2}$ et $\vec{j}_{6/S2}$ de même norme, de direction et de sens connus $\Rightarrow$ 1 composante de force (résultante) à déterminer

On a donc un Pb à 3 inconnues et le PFS nous donne 3 équations (TRS projeté sur $\vec{x}$ et $\vec{y}$ et TMS projeté sur $\vec{z}$). La résolution est possible !!!

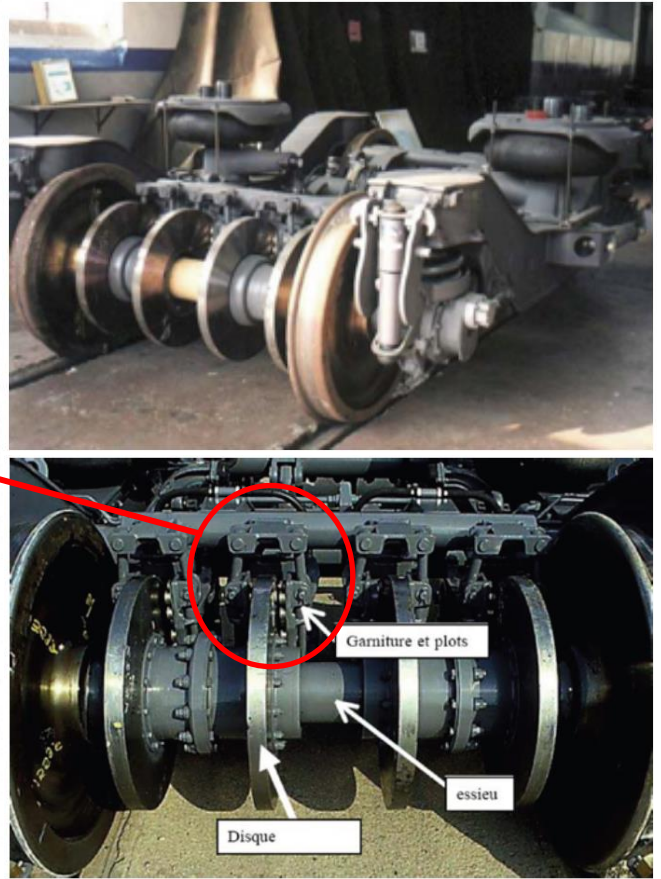
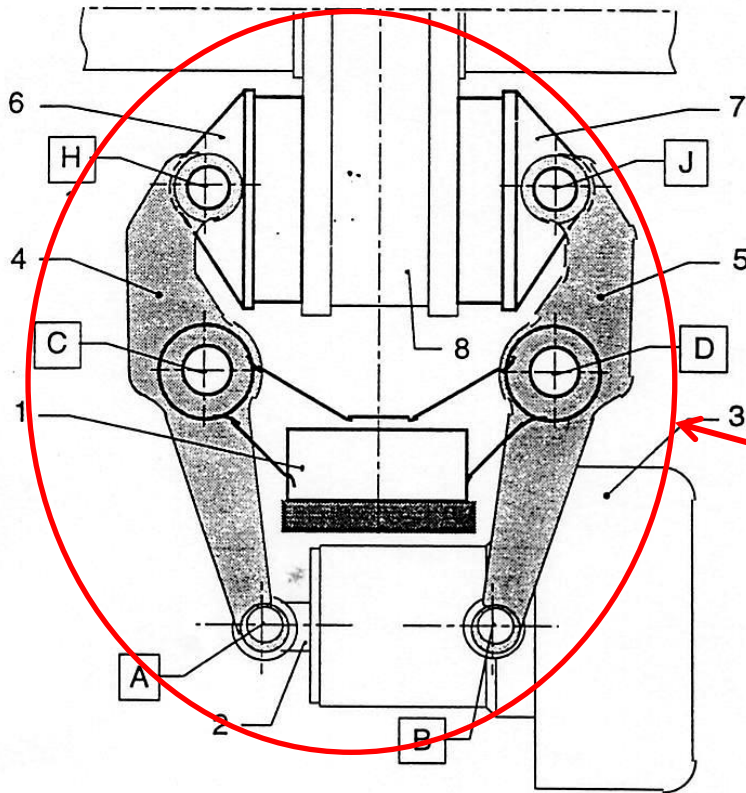
Si la modélisation des actions mécaniques n'est pas bien faite, on risque d'avoir plus d'inconnues que d'équations. La résolution devient impossible.



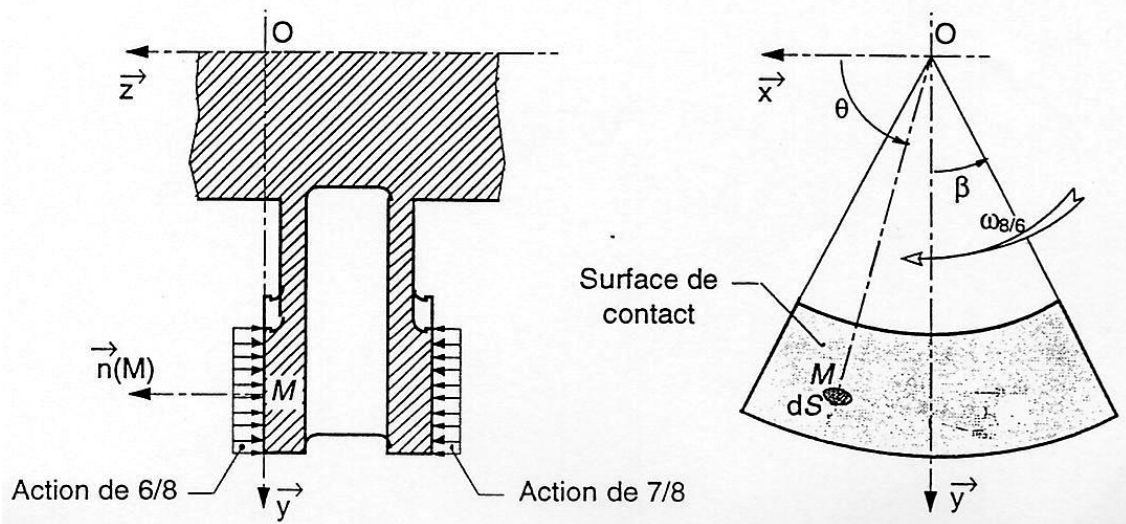
Moralité : il faut bien modéliser (réduire le nb d'inconnues d'AM) avant de résoudre !!!!

Pour finir : Il n'y a pas de méthode systématique en statique. Un bilan sera proposé à la fin des exercices et problèmes. De nombreuses considérations interviennent pour choisir le moyen le plus rapide pour résoudre...

Frein à disque de TGV



Ce frein est composé d'un vérin hydraulique flottant (2,3) agissant sur deux leviers mobiles (4) et (5) en rotation par rapport au châssis (1) et assurant l'effort presseur des plaquettes (6) et (7) sur le disque (8).
La répartition de pression sur le disque est uniforme : $p(M) = p_0$ (avec p_0 constante)



Les plaquettes de frein sont des sections circulaires d'angle 2β , de rayon intérieur R_1 et de rayon extérieur R_2 :

$$\frac{\pi}{2} - \beta \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} + \beta \quad \text{et} \quad R_1 \leq r \leq R_2$$

Le coefficient de frottement entre les plaquettes de frein et le disque est noté f .
En faisant l'hypothèse que le système est à la limite du glissement :

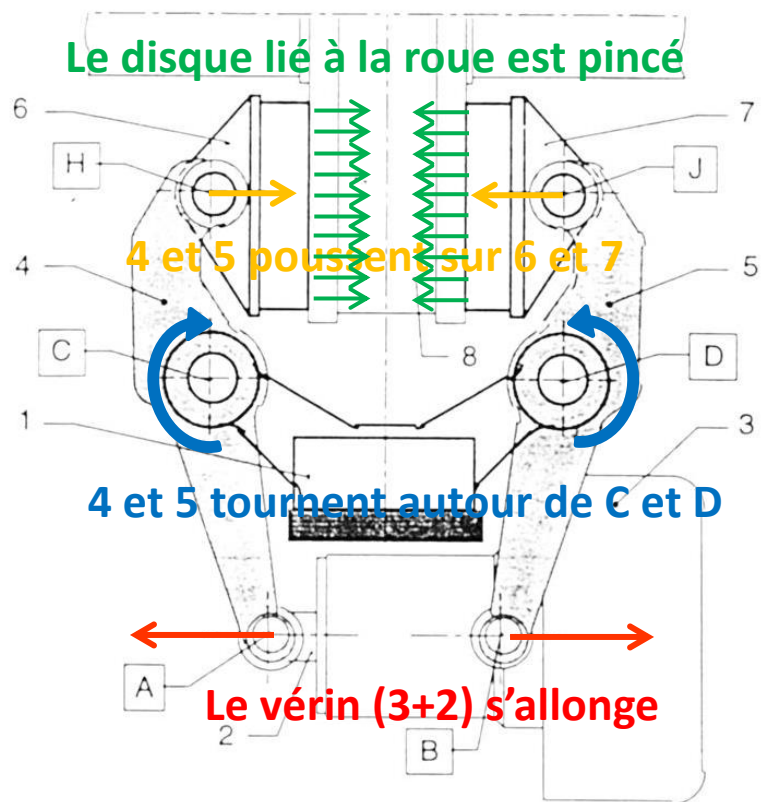
1. Déterminer le torseur des actions mécaniques de (6) sur (8) au point O.
2. Déterminer (s'il existe) le point A (appelé point d'application de l'effort) tel que les actions mécaniques de (6) sur (8) soient modélisables par un glisseur.

Corrigé frein de TGV

Principe de fonctionnement détaillé :

- Ce frein est composé d'un vérin hydraulique flottant (2,3)
- agissant sur deux leviers mobiles (4) et (5) en rotation par rapport au châssis (1)
- et assurant l'effort presseur des plaquettes (6) et (7)
- sur le disque (8).

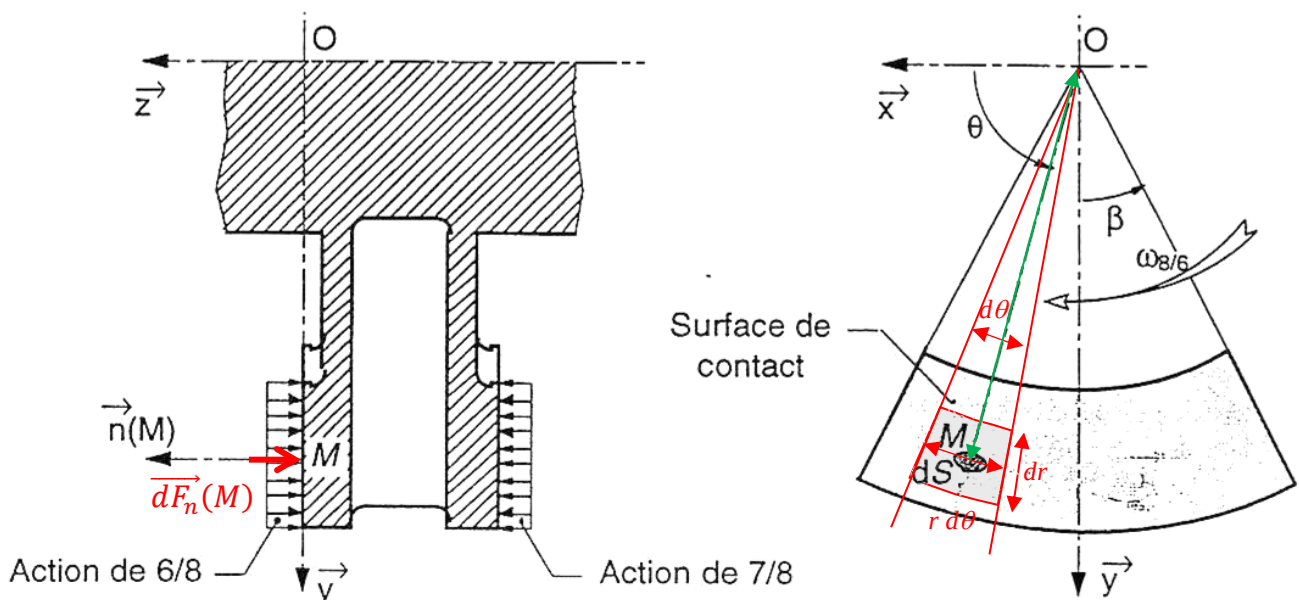
La répartition de pression sur le disque est uniforme : $p(M) = p_0$ (p_0 cste)



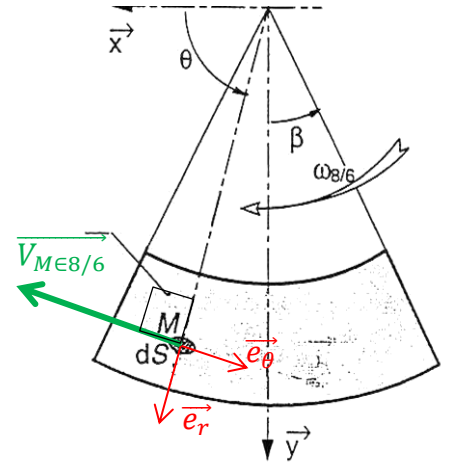
1. Déterminer le torseur des actions mécaniques de (6) sur (8) au point O.

On part du modèle local : « petite force » $\vec{dF}(M)$ qu'on décompose en une force normale et une tangentielle $\vec{dF}(M) = \vec{dF}_n(M) + \vec{dF}_t(M)$ avec

- $\vec{dF}_n(M) = -p(M)\vec{n}(M)dS$
 - $p(M)$ est la pression de contact supposée constante p_0
 - $\vec{n}(M) = \vec{z}$ la normale en M au plan tangent au contact (ici $(\vec{x}, \vec{y})$)
 - dS la surface élémentaire de centre M. Petit secteur angulaire d'aire approximée par $dS = r dr d\theta$ avec r variant de R_1 à R_2 et θ de $\frac{\pi}{2} - \beta$ à $\frac{\pi}{2} + \beta$ pour décrire l'ensemble de la surface de contact disque / plaquette (surface grisée).



- $\overrightarrow{dF_t}(M) = q(M)\vec{t}(M)dS$
 - $q(M)$ est la répartition surfacique tangentielle d'effort : on se place toujours à la limite de glissement donc d'après Coulomb
 $\Rightarrow q(M) = f.p(M) = f.p_0$
 - $\vec{t}(M)$ est le vecteur unitaire portant la petite force de frottement : on se place à la rupture d'équilibre. Dans ce cas le disque tourne autour de l'axe $(O, \vec{z})$ ($\omega_{8/6}$ indiqué sur la figure). La vitesse de glissement est perpendiculaire au rayon. La force de frottement de 6 sur 8 s'oppose à la vitesse de glissement en M de 8/6. D'où $\vec{t}(M) = \vec{e}_\theta$ (base polaire $(\vec{e}_\theta; \vec{e}_r)$). Voir figure ci-contre.



Une fois que tout est paramétré, on peut calculer le modèle global.

On commence par la résultante du torseur d'action mécanique globale :

$$\overrightarrow{R_{6 \rightarrow 8}} = \iint \overrightarrow{dF}(M) = \iint \overrightarrow{dF_n}(M) + \overrightarrow{dF_t}(M) = \iint -p_0 \cdot r \cdot dr \cdot d\theta \cdot \vec{z} + f \cdot p_0 \cdot r \cdot dr \cdot d\theta \cdot \vec{e}_\theta$$

- intégrale double car on intègre sur une surface (2 variables d'intégration)
- Attention $\vec{e}_\theta$ dépend de la variable θ : il faut projeter dans le repère de référence pour « faire apparaître » cette dépendance.

$$\overrightarrow{R_{6 \rightarrow 8}} \cdot \vec{x} = f \cdot p_0 \int_{R_1}^{R_2} r dr \cdot \int_{\frac{\pi}{2}-\beta}^{\frac{\pi}{2}+\beta} \vec{e}_\theta \cdot \vec{x} d\theta = -f \cdot p_0 \frac{R_2^2 - R_1^2}{2} \int_{\frac{\pi}{2}-\beta}^{\frac{\pi}{2}+\beta} \sin\theta d\theta$$

$$\begin{array}{cc} x & e_r \\ y & e_\theta \\ z & e_z \end{array}$$

D'où la composante suivant $\vec{x}$: $\overrightarrow{R_{6 \rightarrow 8}} \cdot \vec{x} = -f \cdot p_0 (R_2^2 - R_1^2) \sin\beta$ (homogène puisque force = pression*surface)

$$\text{Celle suivant } \vec{y} : \overrightarrow{R_{6 \rightarrow 8}} \cdot \vec{y} = f \cdot p_0 \int_{R_1}^{R_2} r dr \cdot \int_{\frac{\pi}{2}-\beta}^{\frac{\pi}{2}+\beta} \vec{e}_\theta \cdot \vec{y} d\theta = f \cdot p_0 \frac{R_2^2 - R_1^2}{2} \int_{\frac{\pi}{2}-\beta}^{\frac{\pi}{2}+\beta} \cos\theta d\theta = 0$$

$$\text{Et celle suivant } \vec{z} : \overrightarrow{R_{6 \rightarrow 8}} \cdot \vec{z} = -p_0 \int_{R_1}^{R_2} r dr \cdot \int_{\frac{\pi}{2}-\beta}^{\frac{\pi}{2}+\beta} d\theta = -p_0 (R_2^2 - R_1^2) \cdot \beta$$

On calcule ensuite le moment en O du torseur d'action mécanique globale :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M_{(O,6 \rightarrow 8)}} &= \iint \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{dF}(M) = \iint \overrightarrow{OM} \wedge (\overrightarrow{dF_n}(M) + \overrightarrow{dF_t}(M)) \\ &= \iint r \vec{e}_r \wedge (-p_0 \cdot r \cdot dr \cdot d\theta \cdot \vec{z} + f \cdot p_0 \cdot r \cdot dr \cdot d\theta \cdot \vec{e}_\theta) = p_0 \iint r^2 dr d\theta \vec{e}_\theta + f \cdot p_0 \cdot \iint r^2 dr d\theta \cdot \vec{z} \end{aligned}$$

$$\text{D'où la composante suivant } \vec{x} : \overrightarrow{M_{(O,6 \rightarrow 8)}} \cdot \vec{x} = p_0 \int_{R_1}^{R_2} r^2 dr \cdot \int_{\frac{\pi}{2}-\beta}^{\frac{\pi}{2}+\beta} \vec{e}_\theta \cdot \vec{x} d\theta = -p_0 \frac{2}{3} (R_2^3 - R_1^3) \sin\beta$$

(homogène puisque moment en Nm = force*pression*longueur)

$$\text{Celle suivant } \vec{y} : \overrightarrow{M_{(O,6 \rightarrow 8)}} \cdot \vec{y} = p_0 \int_{R_1}^{R_2} r^2 dr \cdot \int_{\frac{\pi}{2}-\beta}^{\frac{\pi}{2}+\beta} \vec{e}_\theta \cdot \vec{y} d\theta = 0$$

$$\text{Et celle suivant } \vec{z} : \overrightarrow{M_{(O,6 \rightarrow 8)}} \cdot \vec{z} = f \cdot p_0 \int_{R_1}^{R_2} r^2 dr \cdot \int_{\frac{\pi}{2}-\beta}^{\frac{\pi}{2}+\beta} d\theta = f \cdot p_0 \frac{2}{3} (R_2^3 - R_1^3) \beta$$

D'où le torseur de l'action mécanique globale :

$$T_{(O,6 \rightarrow 8)} = \left\{ \overrightarrow{R_{6 \rightarrow 8}} \quad \overrightarrow{M_{(O,6 \rightarrow 8)}} \right\}_O = \begin{pmatrix} -f \cdot p_0 (R_2^2 - R_1^2) \sin\beta & -p_0 \frac{2}{3} (R_2^3 - R_1^3) \sin\beta \\ 0 & 0 \\ -p_0 (R_2^2 - R_1^2) \cdot \beta & f \cdot p_0 \frac{2}{3} (R_2^3 - R_1^3) \beta \end{pmatrix}_{O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}}$$

Un peu d'interprétation des résultats avant de poursuivre : La composante de résultante suivant $\vec{y}$ est nulle. Il suffit de considérer le point symétrique de M (noté M') par rapport à l'axe $(O, \vec{y})$. Sa composante de résultante suivant $\vec{y}$ est opposée. En sommant, elles s'annulent. Idem pour les composantes de moment autour de l'axe $(O, \vec{y})$.

2. Déterminer (s'il existe) le point A (appelé point d'application de l'effort) tel que les actions mécaniques de (6) sur (8) soient modélisables par un glisseur.

On cherche un point de l'espace A tel que le moment du torseur de l'action mécanique globale en A (coordonnées recherchées (x_A, y_A, z_A)) soit nul :

On résout : $\overrightarrow{M_{(A,6 \rightarrow 8)}} = \overrightarrow{M_{(O,6 \rightarrow 8)}} + \overrightarrow{AO} \wedge \overrightarrow{R_{6 \rightarrow 8}} = \vec{0}$. la résolution (à faire) amène à une incohérence...

Une autre solution : on calcule l'automoment du torseur (indépendant du point de réduction (voir cours Outils de la mécanique)). Si c'est un glisseur, son automoment est nul.

$$2. \overrightarrow{M_{(O,6 \rightarrow 8)}} \cdot \overrightarrow{R_{6 \rightarrow 8}} = 2. \begin{vmatrix} -p_0 \frac{2}{3} (R_2^3 - R_1^3) \sin \beta & 0 \\ 0 & -p_0 (R_2^2 - R_1^2) \sin \beta \\ f \cdot p_0 \frac{2}{3} (R_2^3 - R_1^3) \beta & -p_0 (R_2^2 - R_1^2) \cdot \beta \end{vmatrix} \\ = f \cdot p_0^2 \frac{4}{3} (R_2^3 - R_1^3) (R_2^2 - R_1^2) \sin^2 \beta - f \cdot p_0^2 \frac{4}{3} (R_2^3 - R_1^3) (R_2^2 - R_1^2) \beta^2$$

Cet automoment est nul si $\sin^2 \beta - \beta^2 = 0$. La seule solution est $\beta = 0$!!! La plaquette de frein n'existe pas...

Moralité : le modèle Force centrale (torseur glisseur) ne permet pas de modéliser tout type d'action mécanique globale. Cet exemple courant de frein montre la nécessité d'utiliser un modèle plus complet. Le torseur. On verra cependant que dans beaucoup d'exercice, la notation torsorielle n'est pas indispensable.

Résultat important en relation avec l'exercice : ce système de frein permet de pincer le disque de frein lié aux roues du TGV. Les actions mécaniques de 6→8 et 7→8 génèrent un moment résistant autour de l'axe de rotation du disque $(O, \vec{z})$ qui va ralentir la vitesse de rotation du disque, donc des roues donc ralentir le train.

Ce moment appelé couple de freinage s'exprime ici par :

$$C_{\text{couple de freinage}} = 2. \overrightarrow{M_{(O,6 \rightarrow 8)}} \cdot \vec{z} = f \cdot p_0 \frac{4}{3} (R_2^3 - R_1^3) \beta \quad (\text{il ya 2 plaquettes qui enserrant le disque})$$

En exprimant la pression normale p_0 en fonction de $\overrightarrow{R_{6 \rightarrow 8}} \cdot \vec{z}$ (p_0 est générée par le système vérin hydraulique (2+3) et les leviers 4+5) :

$$|C_{\text{couple de freinage}}| = \frac{4}{3} \frac{(R_2^3 - R_1^3)}{(R_2^2 - R_1^2)} \cdot f \cdot |\overrightarrow{R_{6 \rightarrow 8}} \cdot \vec{z}|$$

Formule « classique » pour tous les systèmes embrayage/frein : le couple de freinage est proportionnel à l'effort presseur $(\overrightarrow{R_{6 \rightarrow 8}} \cdot \vec{z})$, au coeff de frottement (ou de friction) et dépend des dimensions radiales de la surface de contact.