

Problème 1 : Vérification de performances d'un hélicoptère

$$Q1 : \overrightarrow{dR_{air \rightarrow pale}} = f_x(r) \cdot dS \cdot \overrightarrow{x_r} + f_z(r) \cdot dS \cdot \vec{z} = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot (C_z(\alpha) \vec{z} + C_x(\alpha) \overrightarrow{x_r}) \cdot r^2 \cdot \omega^2 \cdot l \cdot dr$$

- Les composantes du modèle local sont dans le bon sens ! la portance crée une petite force verticale ascendante (elle va permettre le décollage de l'hélico) et la traînée une petite force qui s'oppose à la vitesse tangentielle de la pale par rapport à l'air (vitesse orthoradiale puisque la pale tourne autour de l'axe (O, \vec{z})).
- Homogénéité : $C_z(\alpha)$ et $C_x(\alpha)$ sont des coefficients sans dimension. $\rho \cdot r^2 \cdot \omega^2 \cdot l \cdot dr$ a comme unités des $\text{kg/m}^3 \cdot \text{m}^4 \cdot \text{rad}^2/\text{s}^2 = \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ ce qui est bien homogène à une force ($\Sigma F = \text{m.a}$)

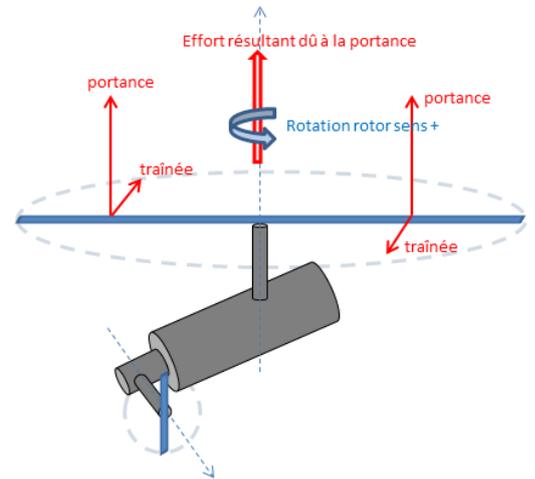
Q2 : on intègre sur la surface de contact air/pale pour avoir le modèle global :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{R_{air \rightarrow pale}} &= \int \overrightarrow{dR_{air \rightarrow pale}} = \int_{r=0}^R \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot (C_z(\alpha) \vec{z} + C_x(\alpha) \overrightarrow{x_r}) \cdot r^2 \cdot \omega^2 \cdot l \cdot dr \\ &= \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot (C_z(\alpha) \vec{z} + C_x(\alpha) \overrightarrow{x_r}) \omega^2 \cdot l \cdot \int_{r=0}^R r^2 dr \\ &= \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot (C_z(\alpha) \vec{z} + C_x(\alpha) \overrightarrow{x_r}) \omega^2 \cdot l \cdot \frac{R^3}{3} = A \cdot (C_z(\alpha) \vec{z} + C_x(\alpha) \overrightarrow{x_r}) \end{aligned}$$

D'où : $A = \frac{1}{6} \cdot \rho \cdot \omega^2 \cdot l \cdot R^3$ (homogénéité identique à Q1)

Q3 : Comme les pales possèdent le même angle d'incidence, les normes des composantes de portance et de traînée sont identiques sur chacune.

Les composantes de portance s'ajoutent (voir figure ci-contre)
Par contre, par la symétrie axiale, les traînées s'annulent (la vitesse pale/air au centre de poussée (non demandé ici) est orthoradiale et de sens opposée par symétrie)



On a alors :

$$\overrightarrow{R_{air \rightarrow rp}} = \overrightarrow{R_{air \rightarrow pale1}} + \overrightarrow{R_{air \rightarrow pale2}} = 2 \cdot A \cdot C_z(\alpha) \vec{z}$$

Q4 : à la limite du décollage, on considère le Pb quasi statique (accélération négligeable). L'appareil est en équilibre dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

Il est soumis aux actions de la pesanteur et de l'air. On peut alors écrire par application du théorème de la résultante statique ($\Sigma \overrightarrow{F_{ext \rightarrow hélico}} = \vec{0}$):

$$\overrightarrow{R_{air \rightarrow hélico}} + \overrightarrow{R_{pes \rightarrow hélico}} = \vec{0} \Rightarrow 2 \cdot A \cdot C_z(\alpha) = M_{totale} \cdot g$$

On en déduit :

$$M_{transportable} = \frac{2 \cdot A \cdot C_z(\alpha)}{g} - M_{vide}$$

Q5 : avec le coefficient de sécurité :

$$M_{transportable \text{ réelle}} = \frac{1}{s} \left(\frac{2 \cdot A \cdot C_z(\alpha)}{g} - M_{vide} \right)$$

Q6 : Changement de point (Babar) en cinématique :

$$\overrightarrow{V_{P \in pale / cabine}} = \overrightarrow{V_{O \in pale / cabine}} + \overrightarrow{PO} \wedge \overrightarrow{\Omega_{pale / cabine}} = -r \cdot \dot{\theta} \cdot \overrightarrow{x_r}$$

Q7 : composition du mouvement : $\overrightarrow{V_{P \in air / pale}} = \overrightarrow{V_{P \in air / sol}} + \overrightarrow{V_{P \in sol / cabine}} + \overrightarrow{V_{P \in cabine / pale}}$

Or $\overrightarrow{V_{P \in air / sol}} = \vec{0}$ car pas de vent et $\overrightarrow{V_{P \in sol / cabine}} = \vec{0}$ car limite décollage.

$$\text{D'où } \overrightarrow{V_{P \in \text{air}/\text{pale}}} = -\overrightarrow{V_{P \in \text{pale}/\text{cabine}}} = r \cdot \dot{\theta} \cdot \overrightarrow{x_r}$$

Q8 : On veut : $\|\overrightarrow{V_{P \in \text{air}/\text{pale}}}\| < 0,6 \cdot c$. Le cas le plus défavorable est pour P situé en bout de pale : $r = R$
 D'où $r \cdot \omega < 0,6 \cdot c \Rightarrow \omega_{\max} = \frac{0,6 \cdot c}{R}$

Q9 : Graphiquement : $C_z(\alpha)_{\max} = 1.65$

Q10 : $M_{\text{transportable réelle}} = \frac{1}{s} \left(\frac{\rho \cdot (0,6 \cdot c)^2 \cdot l \cdot R \cdot C_z(\alpha)_{\max}}{3 \cdot g} - M_{\text{vide}} \right) = 407.5 \text{ kg} > 400 \text{ kg}$
 le cahier des charges est vérifié.

Q11 : on calcule l'effet (le moment) produit en O d'une petite force en P :

$$\begin{aligned} d\overrightarrow{M_{O, \text{air} \rightarrow \text{pale}}} &= \overrightarrow{OP} \wedge d\overrightarrow{R_{\text{air} \rightarrow \text{pale}}} = \overrightarrow{OP} \wedge \left(\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot (C_z(\alpha)\vec{z} + C_x(\alpha)\overrightarrow{x_r}) \cdot r^2 \cdot \omega^2 \cdot l \cdot dr \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot (-C_x(\alpha)\vec{z} + C_z(\alpha)\overrightarrow{x_r}) \cdot r^3 \cdot \omega^2 \cdot l \cdot dr \end{aligned}$$

· **Homogénéité : $C_z(\alpha)$ et $C_x(\alpha)$ sont des coefficients sans dimension. $\rho \cdot r^3 \cdot \omega^2 \cdot l \cdot dr$ a comme unités des $\text{kg}/\text{m}^3 \cdot \text{m}^5 \cdot \text{rad}^2/\text{s}^2 = \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$ ce qui est bien homogène à une force * distance. C'est un moment en Nm**

Q12 : on intègre pour avoir le modèle global :

$$\overrightarrow{M_{O, \text{air} \rightarrow \text{pale}}} = \int d\overrightarrow{M_{O, \text{air} \rightarrow \text{pale}}} = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot (-C_x(\alpha)\vec{z} + C_z(\alpha)\overrightarrow{x_r}) \cdot \frac{R^4}{4} \cdot \omega^2 \cdot l = \frac{3 \cdot R}{4} A \cdot (C_z(\alpha)\overrightarrow{x_r} - C_x(\alpha)\vec{z})$$

Q13 : raisonnement analogue à Q3 :

$$\overrightarrow{M_{O, \text{air} \rightarrow \text{rp}}} = \overrightarrow{M_{O, \text{air} \rightarrow \text{pale}1}} + \overrightarrow{M_{O, \text{air} \rightarrow \text{pale}2}} = -\frac{3 \cdot R}{2} A \cdot C_x(\alpha)\vec{z}$$

L'hélico tourne sans rotor de queue à cause du couple dû à la trainée (résistance de l'air)

Q14 : Ce résultat indique que l'action de l'air sur le rotor principal va appliquer à la cabine une rotation autour de l'axe (O, \vec{z}) , c'est-à-dire l'axe du rotor principal. Cet effet est bien évidemment fort gênant !

Q15 : Les calculs sont identiques aux questions Q2 et Q3. Inutile de recommencer. Ceux sont uniquement les directions des forces qui changent puisque le plan d'évolution des pales du rotor de queue est le plan (\vec{x}, \vec{z}) et non plus le plan (\vec{x}, \vec{y}) , plan d'évolution des pales du rotor principal. On ne change que les indices des grandeurs intervenantes.

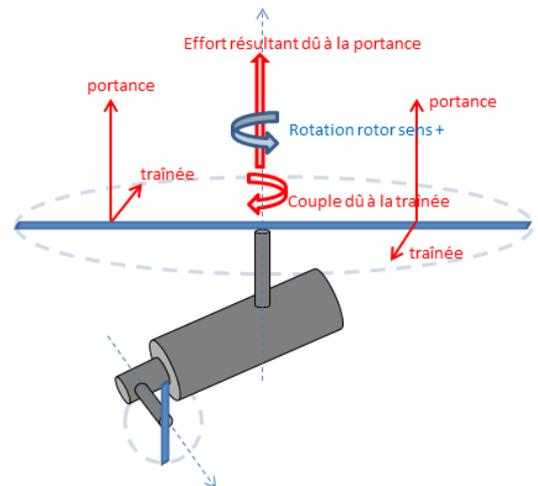
$$\|\overrightarrow{R_{\text{air} \rightarrow \text{rac}}}\| = \frac{1}{3} \cdot \rho \cdot \omega_{ac}^2 \cdot l_{ac} \cdot R_{ac}^3 \cdot C_z(\alpha_{ac})$$

Q16 : La résultante précédente est colinéaire à \vec{y} , donc le **bras de levier** permettant de connaître son effet en O est la longueur de queue, d_{ac} , plus courte distance entre O et le support de $\overrightarrow{R_{\text{air} \rightarrow \text{rac}}}$. On écrit donc :

$$\|\overrightarrow{M_{(O, \overrightarrow{R_{\text{air} \rightarrow \text{rac}}})}}\| = \|\overrightarrow{R_{\text{air} \rightarrow \text{rac}}}\| \cdot d_{ac} \quad (\text{voir figure ci-dessous})$$

Q17 : Pour que le rotor anti-couple puisse compenser le couple indésirable créé par l'air sur le rotor principal, il faut qu'il y ait équilibre de l'hélicoptère sous l'action de ces deux moments. Cela entraîne :

$$-\frac{3 \cdot R}{2} A \cdot C_x(\alpha) = \frac{1}{3} \cdot \rho \cdot \omega_{ac}^2 \cdot l_{ac} \cdot R_{ac}^3 \cdot C_z(\alpha_{ac}) \cdot d_{ac}$$



d'où

$$d_{ac} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{\lambda^2} \cdot \frac{l}{l_{ac}} \cdot \frac{R^4}{R_{ac}^3} \cdot \frac{C_x(\alpha)}{C_z(\alpha_{ac})}$$

Q18 : $d_{ac} = 5.76$ m. Cette valeur est conforme au choix fait par le constructeur car, en prenant une longueur de queue de 6m, celui-ci s'assure que le cas limite décrit n'est pas atteint.

L'hélico tourne sans rotor de queue à cause du couple dû à la traînée (résistance de l'air)

