



Laboratoire de

Sciences Industrielles pour l'Ingénieur

Activité de Travaux Pratiques en

première année MPSI de CPGE

Cinématique et Géométrie

Corrigés

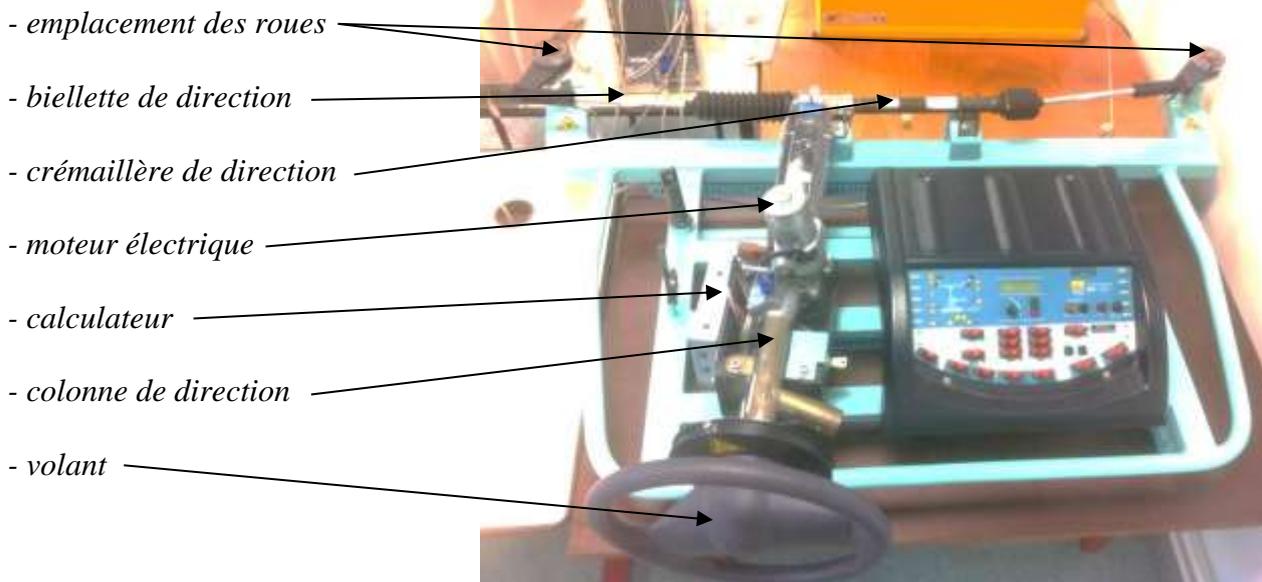
TP1	Direction DAE	page	2
TP2	Robot Maxpid	page	7
TP3	Barrière Sympact	page	10
TP4	Tansmission SW	page	14
TP5	Transformation SW	page	16

Cyril CHERON

DIRECTION À ASSISTANCE ÉLECTRIQUE

Q1 : Il est plus facile de tourner le volant quand on met l'assistance en marche mais seulement pour une vitesse du véhicule inférieure à 70 km/h.

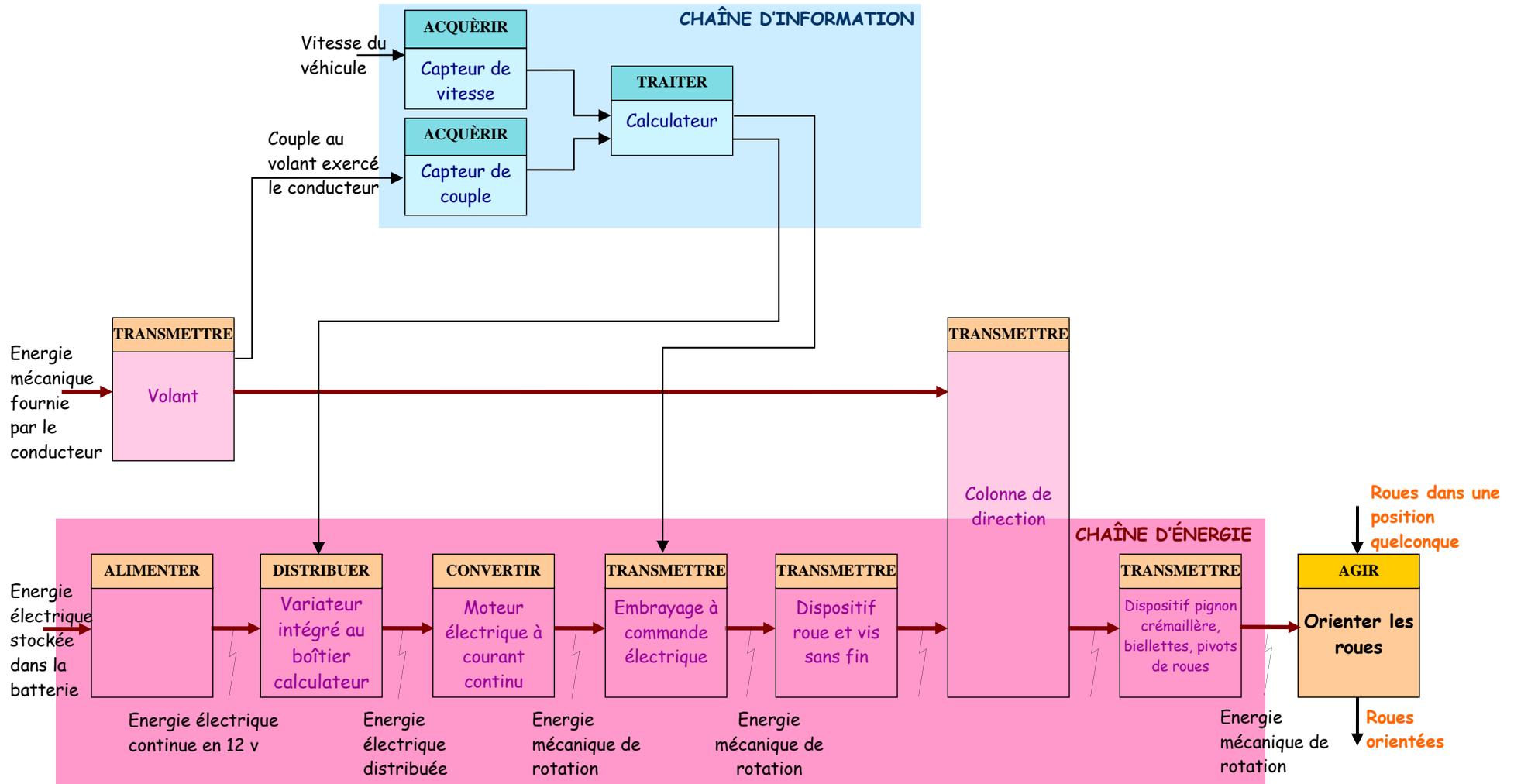
Q2 : Repérage des différents éléments constituant le système :



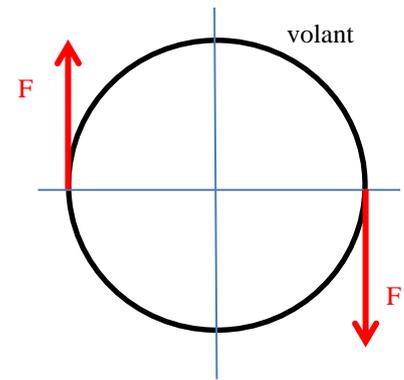
Q3 : Liste des capteurs :

N°	Grandeur mesurée et son unité	Sur le système réel
1	Angle de rotation du volant (°)	Non
2	Couple sur la colonne (Nm)	Non
3	Couple au volant (Nm)	Oui
4	Vitesse du véhicule (m/s)	Oui
5	Couple sur la pivot de roue (Nm)	Non
6	Angle de rotation de la pivot de roue (°)	Non

Q4 : Chaîne d'énergie et chaîne d'information de la direction assistée électrique variable.



Q5 : nature : c'est un couple en Nm pas un angle . Un couple est une action mécanique générant ou s'opposant à un mouvement de rotation exprimé en Nm. Il peut être réalisé par deux forces de même intensité, parallèles et de sens opposées qui s'appliquent à une certaine distance de l'axe de rotation du solide concerné (le rayon du volant ici).



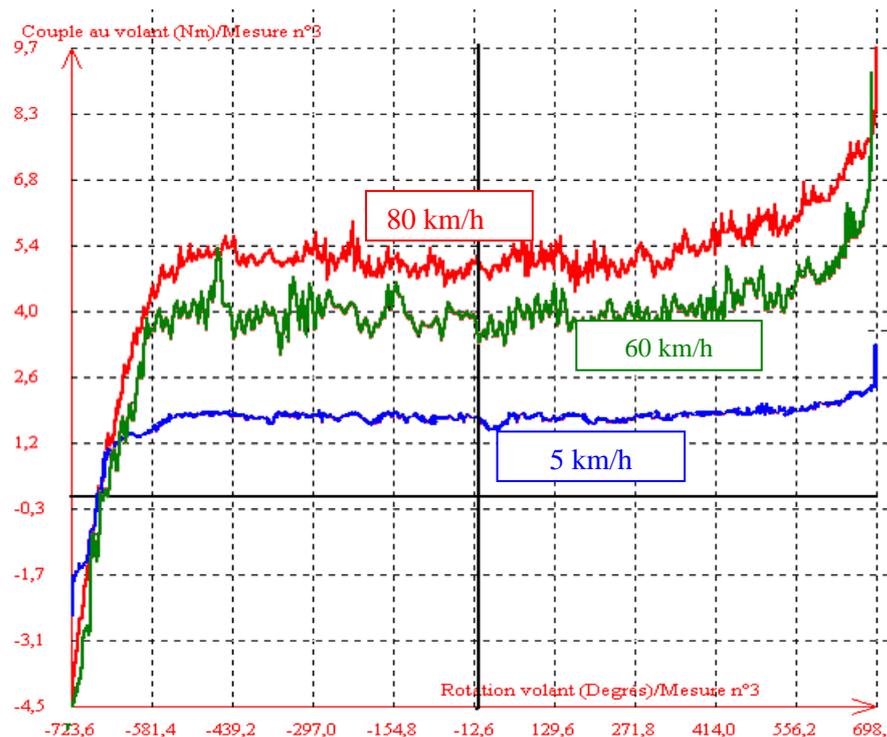
Les mains réalisent deux forces (glisseurs) opposées (parallèles et de même module) à une même distance de l'axe de rotation du volant qui est son rayon. Cela donne un couple.

Q6 : la fonction technique est transmettre les efforts à la crémaillère. L'opération réalisée entre les couples ne peut être qu'une somme (c'est le membre de gauche du PFD...)

$$C_{col} = C_{mot} + C_{vol}$$

Q7 : L'assistance s'arrête au-delà de 70 km/h environ : le couple au volant est alors d'environ 8 Nm .

Le couple au volant croît avec la vitesse donc l'assistance est variable en fonction de la vitesse (maximale en manœuvre de parking).

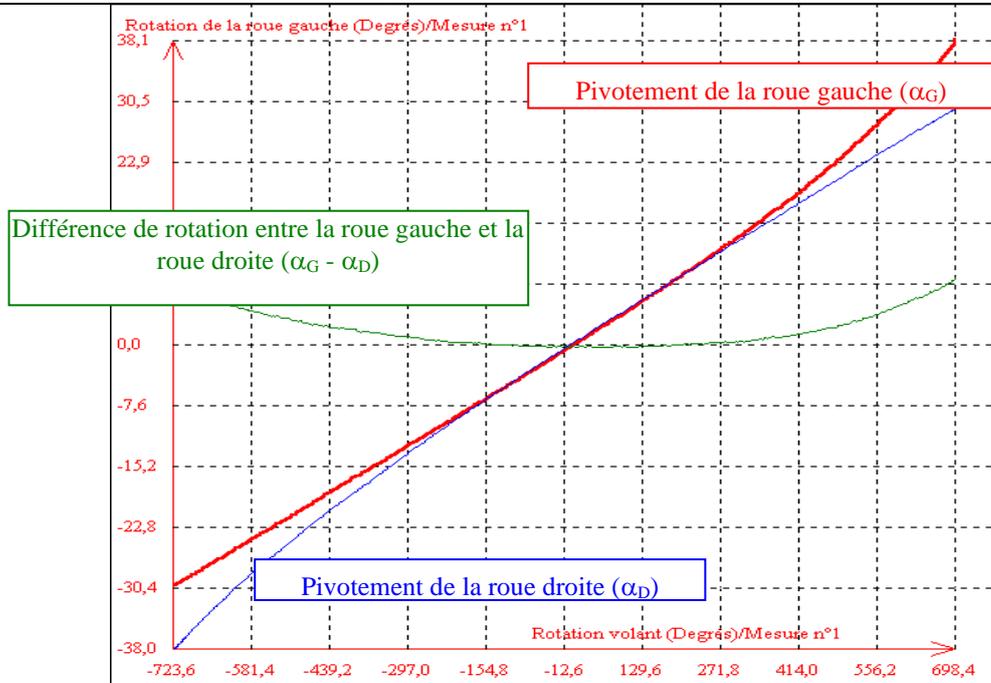


Q8 : Rotation des roues en fonction de la rotation du volant :

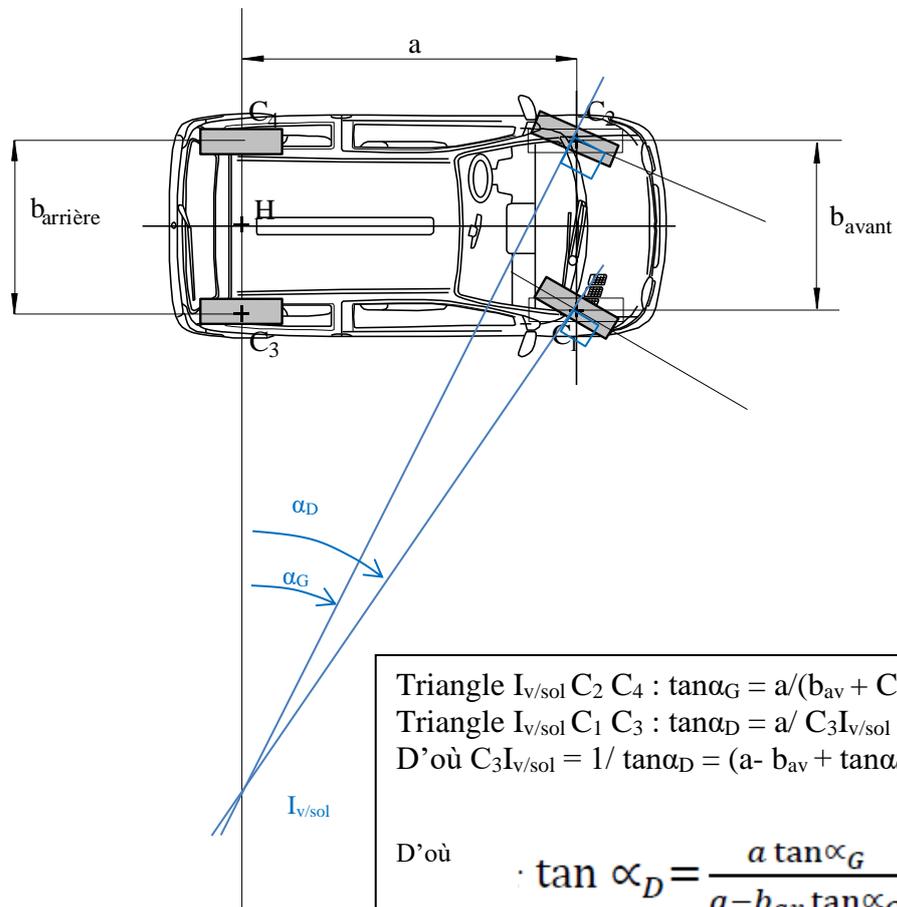
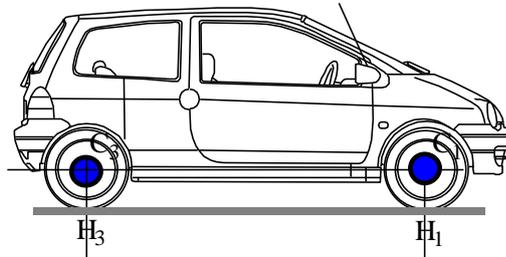
On constate qu'il n'y a pas proportionnalité entre l'angle de pivotement de chaque roue et l'angle au volant (la représentation graphique n'est pas une droite). La troisième courbe représente l'évolution de cette différence. On constate qu'elle est nulle pour un angle au volant proche de zéro et qu'elle croît avec l'angle de braquage.

L'amplitude de rotation du volant est égale à 1420° ce qui correspond à près de 4 tours de volant (cohérent avec le cahier des charges : $\pm 707^\circ$)

L'angle de pivotement des roues est compris, pour l'une entre -38° et 29° et pour l'autre entre -30° et 38° (cohérent avec le cahier des charges : 30° et 39° selon le sens de pivotement)



Q9, 10 :



Q11 : La courbe théorique correspond à une courbe idéale pour respecter la condition de non glissement des roues sur le sol.

La courbe expérimentale montre comment le mécanisme de train tente de respecter cette condition.

On peut noter que l'écart entre les deux courbes croît avec l'angle de braquage, et que le glissement apparaît surtout lors de manœuvres de parking.

La conséquence sur l'usure des pneus est peu importante compte tenu du faible kilométrage parcouru dans ces conditions.

Le respect rigoureux de la condition de non glissement avec un système dont la cinématique est basée sur le principe de la station DAE est impossible puisque la géométrie du mécanisme impose la relation entre les deux angles de braquage, indépendamment de cette condition de non glissement des roues sur le sol.

Seul un mécanisme à came(s) permettrait de respecter cette condition.

Q12 :

Trajectoire de C_1 : cercle de centre I_v/sol de rayon $[I_v/\text{sol } C_1]$

Trajectoire de C_2 : cercle de centre I_v/sol de rayon $[I_v/\text{sol } C_2]$

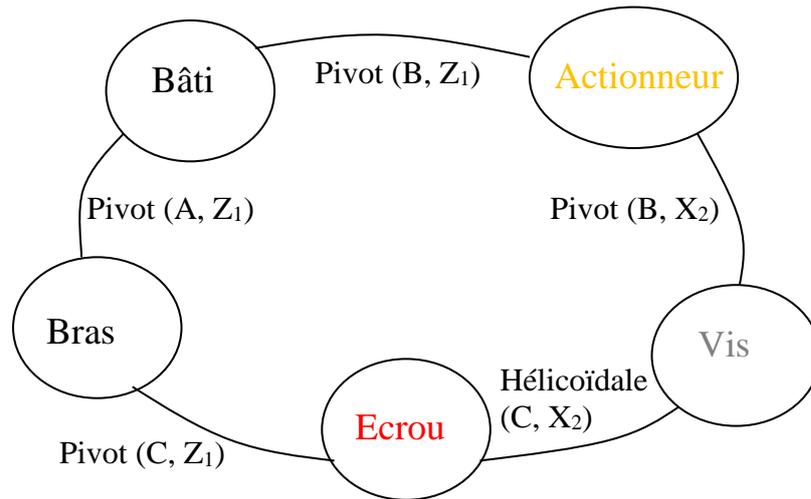
Les vitesses de rotation propre des roues sont différentes. Pendant un laps de temps Δt la roue extérieure au virage (roue 2) parcourt une distance plus grande que la roue intérieure au virage (roue 1) donc $\omega_G > \omega_D$. Si ces roues sont motrices, c'est le cas sur la twingo puisque c'est une traction il faut un différentiel pour répartir la puissance du moteur de manière différente sur chacune des roues.

$$\text{Rapport des vitesses de rotation propre des roues : } \frac{\omega_G}{\omega_D} = \frac{IC_2}{IC_1} = \frac{\sqrt{\left(R + \frac{bav}{2}\right)^2 + a^2}}{\sqrt{\left(R - \frac{bav}{2}\right)^2 + a^2}}$$

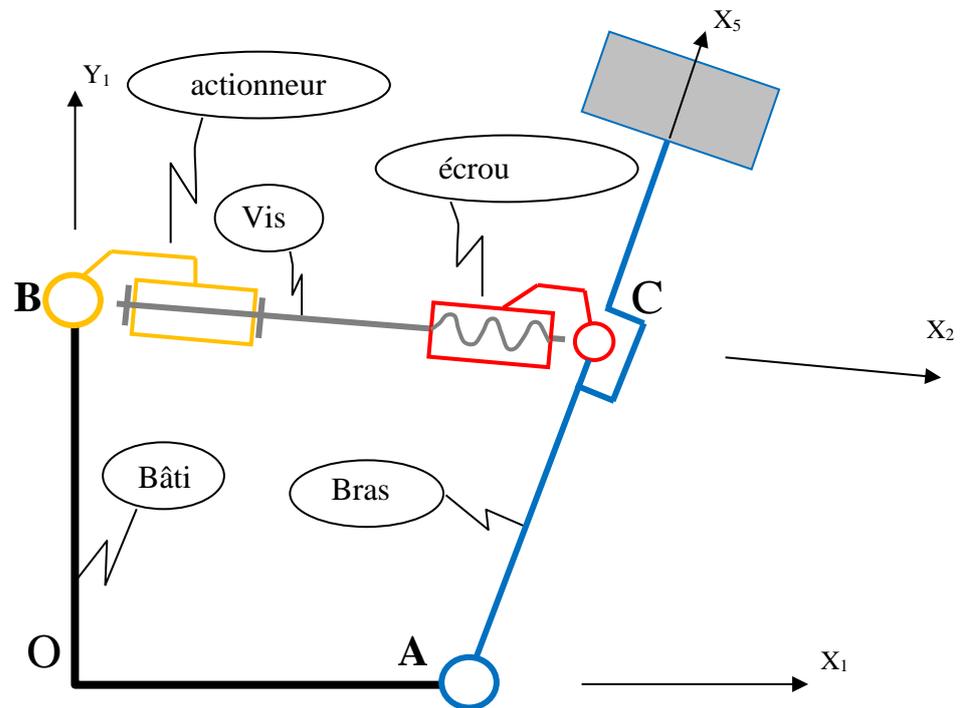
$$\text{Q13 : } 2\omega_{\text{moteur}} = \omega_G + \omega_D$$

BRAS ROBOT MAXPID

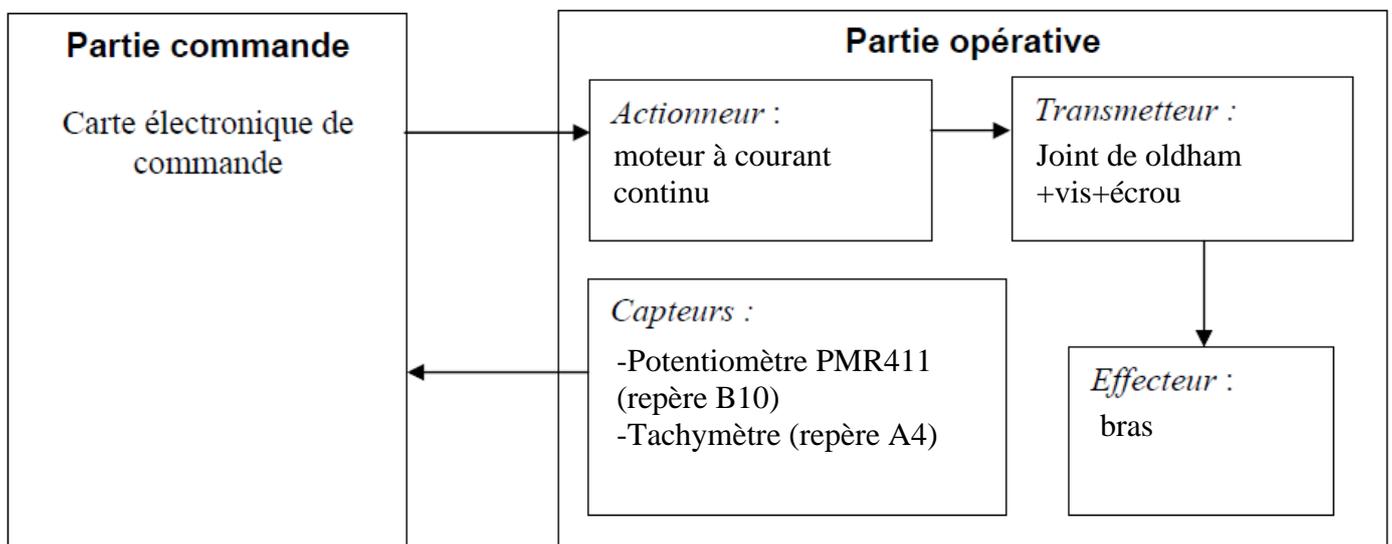
Q1 : Graphe de structure



Q2 : Schéma cinématique

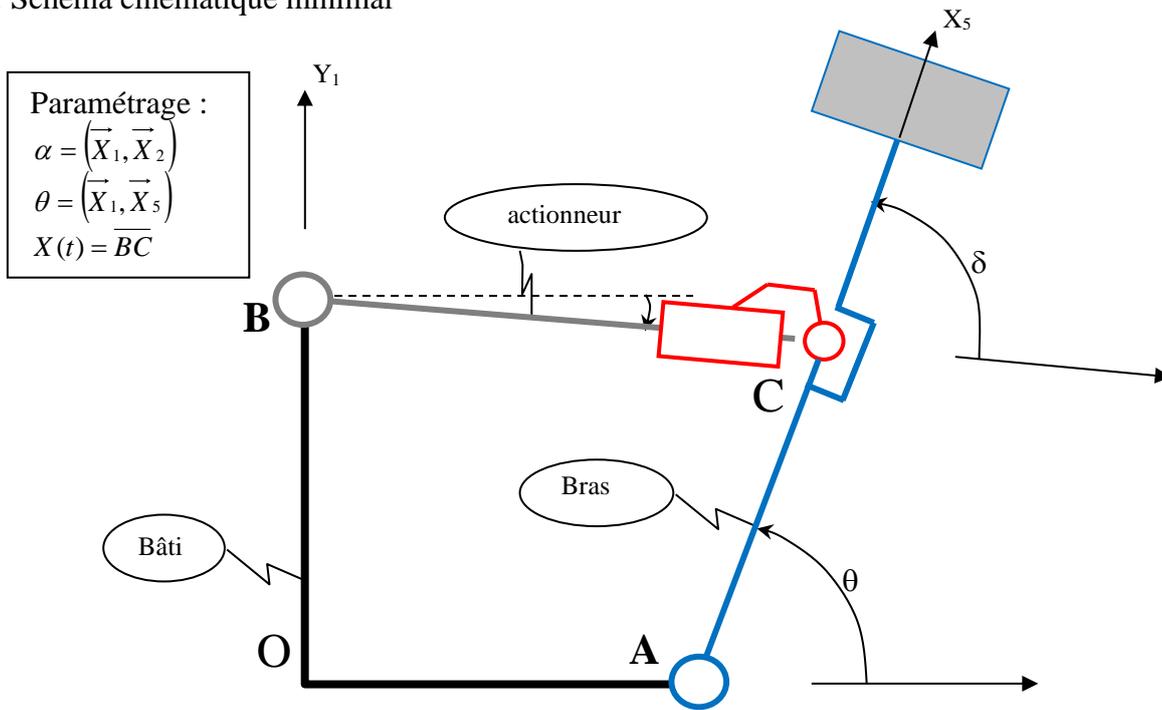


Q3 :



Principe de fonctionnement : potentiomètre : résistance variable circulaire (mesure de l'angle de rotation du bras). Fournit une tension proportionnelle à l'angle mesuré. Tachymètre : moteur CC monté en inversant entrée et sortie (mesure de la vitesse angulaire du moteur). Fournit une tension proportionnelle à la vitesse angulaire.

Q4 : Schéma cinématique minimal



Q5 : Fermeture géométrique : $\vec{OO} = \vec{OA} + \vec{AC} + \vec{CB} + \vec{BO} = \vec{0} \Rightarrow a\vec{X}_1 + c\vec{X}_5 - X\vec{X}_2 - b\vec{Y}_1 = \vec{0}$

En projetant sur \vec{X}_1 : $a + c \cdot \cos\theta - X \cos\alpha = 0$ (1)

En projetant sur \vec{Y}_1 : $c \cdot \sin\theta - X \sin\alpha - b = 0$ (2)

Q6 : élimination de α : $X \cos\alpha = a + c \cdot \cos\theta$ et $X \sin\alpha = c \cdot \sin\theta - b$. On élève au carré et on somme

de (1) et (2) : $X(t) = \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2 + 2ac \cdot \cos\theta - 2bc \cdot \sin\theta)}$ (3)

Q7 : $\Delta X = -P \cdot \Delta\beta$ (4) avec $\Delta\beta$ en tour ou $\Delta X = -\frac{P}{2\pi} \Delta\beta$ avec $\Delta\beta$ en radian

Q8 : démonstration : $X(\theta) - X(\theta=0) = -P \cdot (\beta(\theta) - \beta(\theta=0)) = X(\theta) - \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2 + 2ac)} = -P \cdot \beta(\theta)$

d'où : $\beta_{\text{calcul en tour}}(\theta) = \frac{1}{p} (\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 2ac} - \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 2c(a \cos\theta - b \sin\theta)})$

Q9 :

θ en degré	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
$\beta_{\text{calcul}}(\theta)$ en tours	0	1.79	3.9	6.27	8.91	11.8	14.87	18.13	21.5	25

Manipulation 3 :

$\beta_{\text{mesure}}(\theta)$ en tours	0	4	8	12	16	20	24
θ en degré	0	20.5	63.7	50.7	63.5	75.5	87.1

Q10 : Détermination θ : mesuré par le potentiomètre PMR411

Détermination α : Calculé à partir de la fermeture géométrique

Détermination β : calculé par intégration de $\dot{\beta}$ mesuré par le tachymètre

Détermination δ : Calculé par fermeture géométrique

Détermination X : Calculé par $\Delta X = P \Delta \beta$

Q11 : Tracés

On peut approximer $\beta(\theta)$ par une fonction linéaire

de plusieurs façons :

- en faisant passer une droite

par les points extrêmes (1)

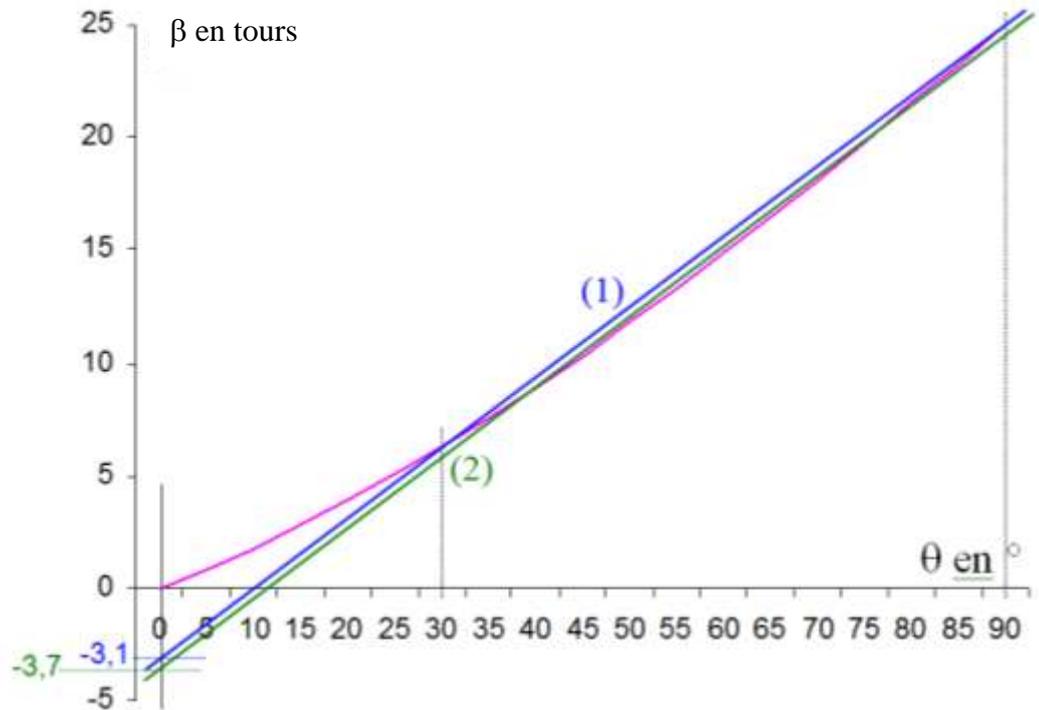
- en prenant une droite

« moyenne » (2)

soit avec θ en degrés :

$$\beta_{lin1} = 0,31 \theta - 3,1 \quad (1)$$

ou $\beta_{lin2} = 0,31 \theta - 3,7 \quad (2)$



Q12 : Loi entrée/sortie linéarisée pour $\theta \in [30^\circ; 90^\circ]$:

$$\theta = \frac{\beta}{0.31} + 10 \quad (1)$$

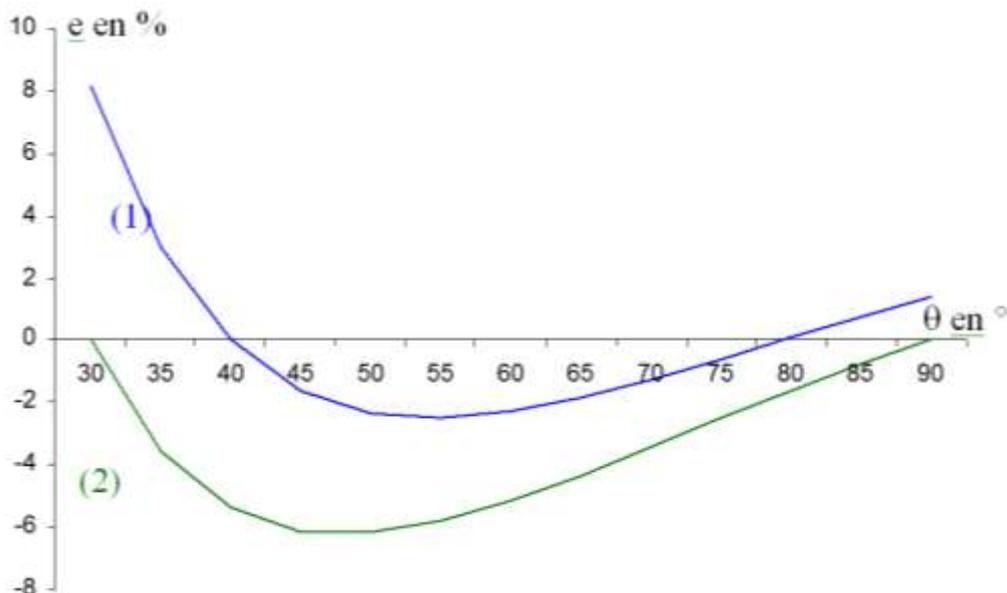
ou $\theta = \frac{\beta}{0.31} + \frac{3.7}{0.31} \quad (2)$

Q13 :

L'erreur relative maximale est de :

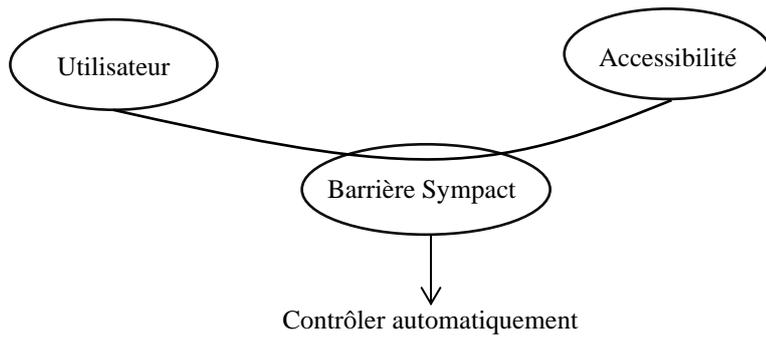
- 8% pour l'approximation (1)

- 6% pour l'approximation (2)



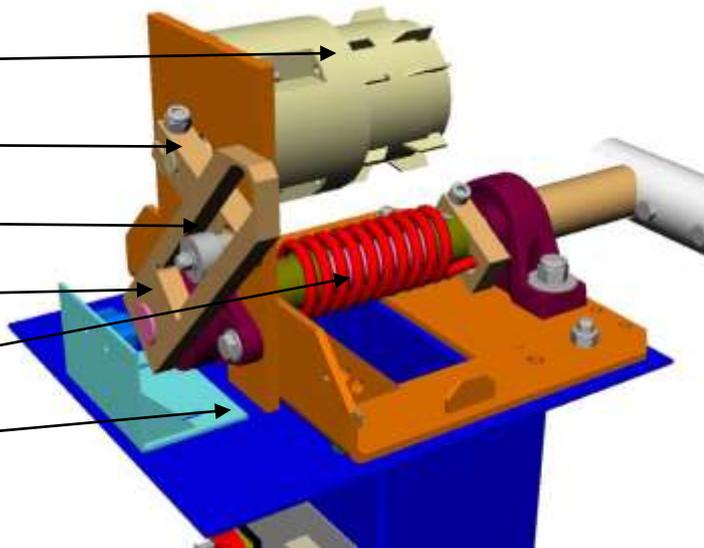
BARRIERE SYMPACT

Q1 Besoin satisfait :



Q2 Identification des composants :

- Le moteur,
- La manivelle,
- Le roulement rigide,
- L'axe de la lisse,
- Le ressort de rappel
- Le bâti,



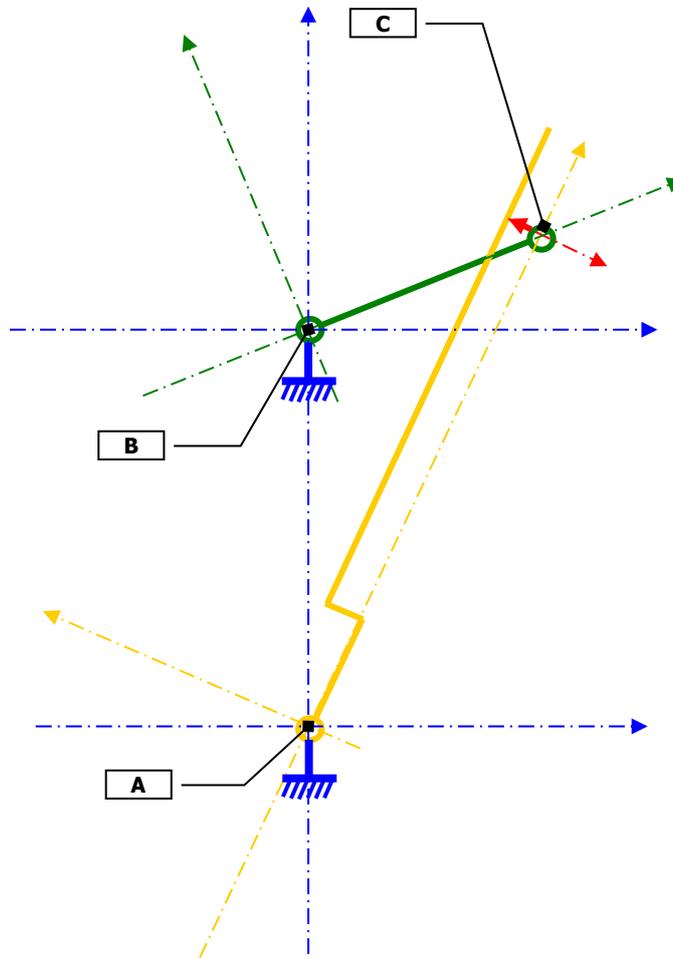
Q3 Caractérisation des liaisons :

	<i>Surface de contact</i>	<i>Mobilités</i>	<i>Nom de la liaison</i>	<i>Caractéristiques</i>
Liaison 1	« roulements »	1 rotation	Pivot	1 axe
Liaison 2	« roulement »	1 rotation	Pivot	1 axe
Liaison 3	1 ligne rectiligne	2 rotations, 2 translations	Linéaire rectiligne	1 axe et 1 normale
Liaison 4	guidage cylindrique avec arrêt axial	1 rotation	Pivot	1 axe

Q4 Modélisation plane :

Cette modélisation peut être considérée comme plane car les vecteurs rotations des 3 liaisons pivot sont colinéaires et la linéaire rectiligne peut être modélisée par une ponctuelle dont les mobilités « extérieures » au plan de projection peuvent être négligées (car ne contribuant pas à la transformation de mouvement étudiée).

Schéma cinématique plan :



- Q5** Pour l'étude de la loi entrée / sortie, le paramètre géométrique de la liaison pivot entre le roulement et la manivelle n'intervenant pas, celle-ci peut être négligée.
- Q6** Le roulement permet de remplacer le glissement au niveau du contact manivelle/lisse par du roulement sans glissement. Il n'y a quasiment plus de pertes énergétiques dans cette liaison.
- Q7** Le ressort aide le moteur dans la phase de montée de la lisse (phase la plus énergivore). Il permet d'économiser l'énergie.

Q6 Amplitude maxi :
L'amplitude est maxi pour $Y_2 \perp Y_3$, soit la relation dans le triangle rectangle :

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta_{31\min}\right) = \frac{R}{H} \quad \text{d'où} \quad \Delta\theta_{31\min} = 2 \cdot \arccos \frac{R}{H}$$

$$\text{Ainsi } \Delta\theta_{31\min} = \frac{\pi}{2} \quad \text{impose} \quad \frac{R}{H} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Q7 Réversibilité de la barrière :

Nous vérifions que : $\frac{R}{H} = \frac{81}{109} = 0.743 > \frac{\sqrt{2}}{2}$

Ainsi les vecteurs Y_2 et Y_3 ne seront pas orthogonaux, car sinon la configuration du mécanisme serait irréversible.

Q8 Fermeture géométrique : $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA} = \vec{0}$

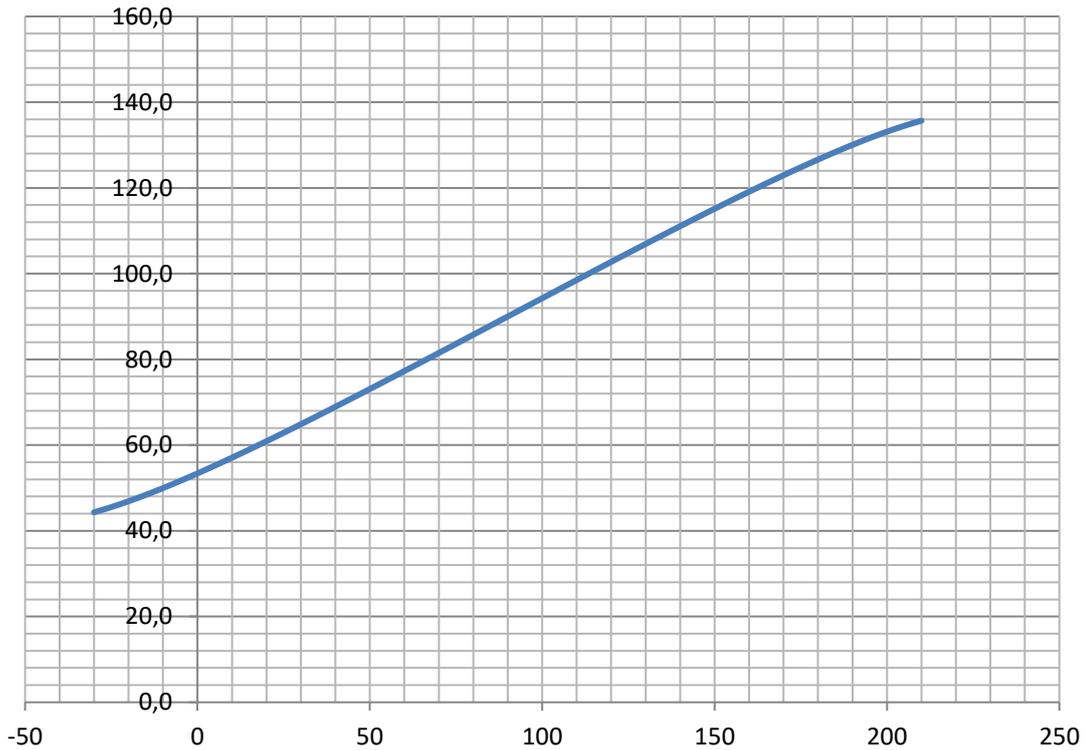
$$\Leftrightarrow H \cdot \vec{z}_1 + R \cdot \vec{y}_2 - Y_{23} \cdot \vec{y}_3 = \vec{0}$$

$$/\vec{z}_3 : H \cdot \cos\theta_{31} - R \cdot \sin\theta_{32} = 0 \Leftrightarrow H \cdot \cos\theta_{31} - R \cdot \sin(\theta_{31} - \theta_{21}) = 0$$

Ou encore : $\tan\theta_{31} = \frac{R \cdot \sin\theta_{21} + H}{R \cdot \cos\theta_{21}}$

Q9 Loi entrée / sortie théorique :

θ_{31} théorique en fonction de θ_{21} (en degré)



Q10 Capteur de position :

Le capteur de position est un potentiomètre MCB de plage 93 ° de linéarité +/-1,5% monté en bout de l'arbre de la lisse.

Q11 Fréquences caractérisant le mouvement :

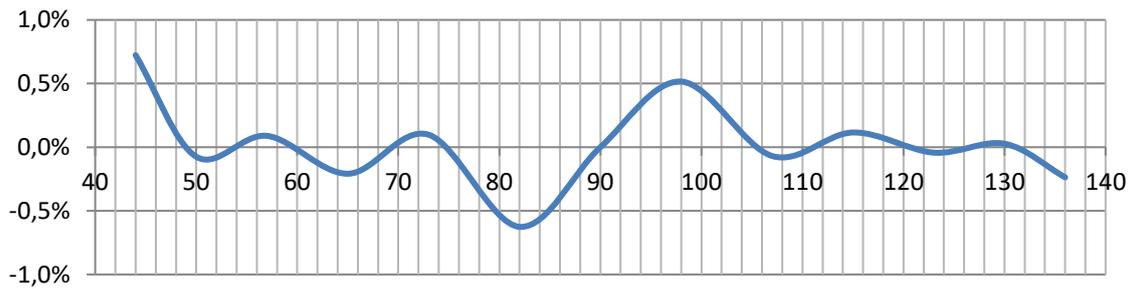
Le variateur de vitesse par pilotage en fréquence ATV 28/31 permet de fournir une loi de commande de vitesse trapézoïdale avec les accélérations et les décélérations en Hz/s et les fréquences de rotation de commande en Hz (Attention 1 Hz correspond ici à 0.5 tr/sec).

Q12 Relevé de mesures :

θ_{21} (°)	-30	-10	10	30	50	70	90	110	130	150	170	190	210
θ_{31} (°)	44	50	57	65	73	82	90	98	107	115	123	130	136
Pos. lisse	Lisse horizontale										Lisse verticale		

Q13 Tracé de l'écart entre l'angle théorique et expérimental :

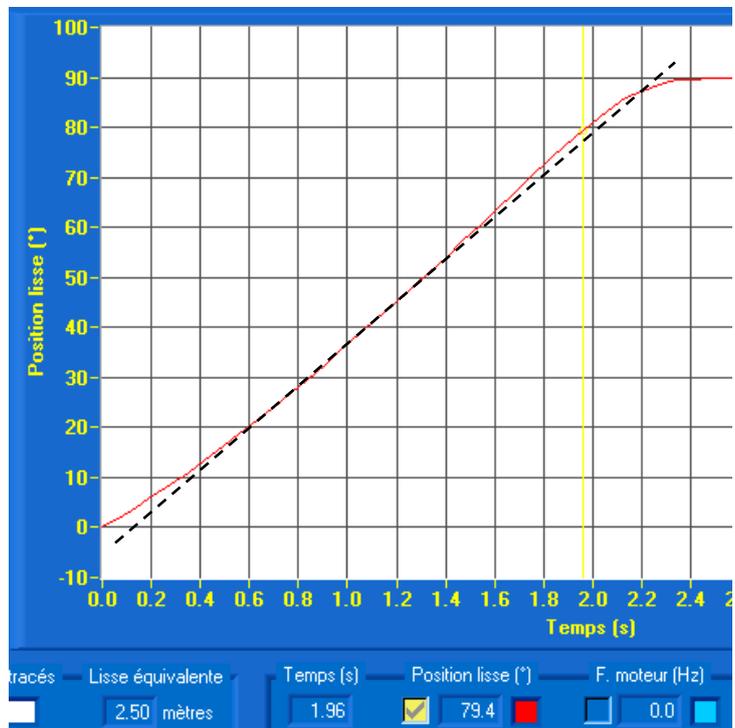
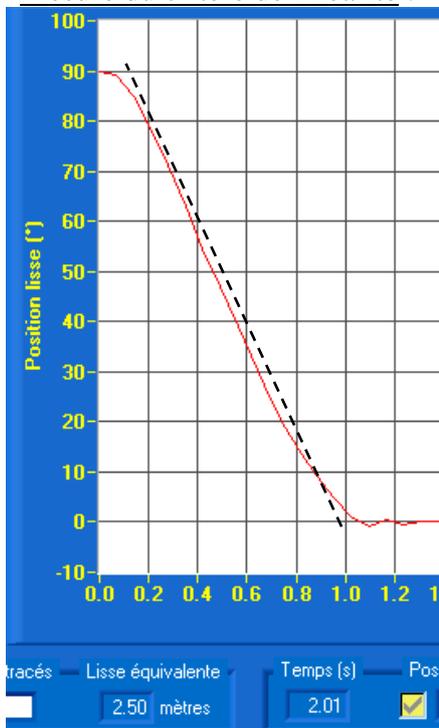
écart en % en fonction de θ_{31}



Domaine de validité de la modélisation :

Les écarts sont très faibles car les hypothèses liées à la modélisation sont bien vérifiées, à savoir : liaisons sans jeu, solides indéformables, pb plan, dimensions géométriques justes, ...
Ces écarts sont vraisemblablement dus aux incertitudes de mesure.

Q14 Mesure du critère de linéarité :



Commentaires :

Seule la partie centrale de la courbe est représentative car, au démarrage et à l'arrêt de la barrière, l'accélération et la décélération du moteur sont imposées ; dans cette partie centrale le mouvement de la barrière est sensiblement linéaire, à l'ouverture comme à la fermeture.

Transmission SW

- Q1. 60 tours/min = 2π rad/s
 Q2. Oui la vitesse de rotation est identique en entrée et sortie
 Q3. Lorsque l'on souhaite transmettre un mouvement de rotation entre deux axes parallèles mais non coaxiaux
 Q4. Il évite les efforts radiaux perturbateurs pouvant être liés à un défaut de coaxialité. Il sert de filtre mécanique. Sur Maxpid il est nécessaire à cause du système vis/écrou à billes utilisé pour transformer le mvt. Ce système nécessite une grande précision de guidage.

Q5. Loi entrée/sortie géométrique : $\vec{y}_1 \cdot \vec{z}_3 = 0 \Rightarrow \vec{y}_1 = \begin{matrix} 0 \\ \cos \theta_{01} \\ \sin \theta_{01} \end{matrix}$ et $\vec{z}_3 = \begin{matrix} 0 \\ -\sin \theta_{03} \\ \cos \theta_{03} \end{matrix}$ $\begin{matrix} \cos \theta_{03} \sin \alpha \\ -\sin \theta_{03} \\ \cos \theta_{03} \cos \alpha \end{matrix}$

D'où $\vec{y}_1 \cdot \vec{z}_3 = 0 = -\cos \theta_{01} \sin \theta_{03} + \sin \theta_{01} \cos \theta_{03} \cos \alpha$ que l'on peut mettre sous la forme :

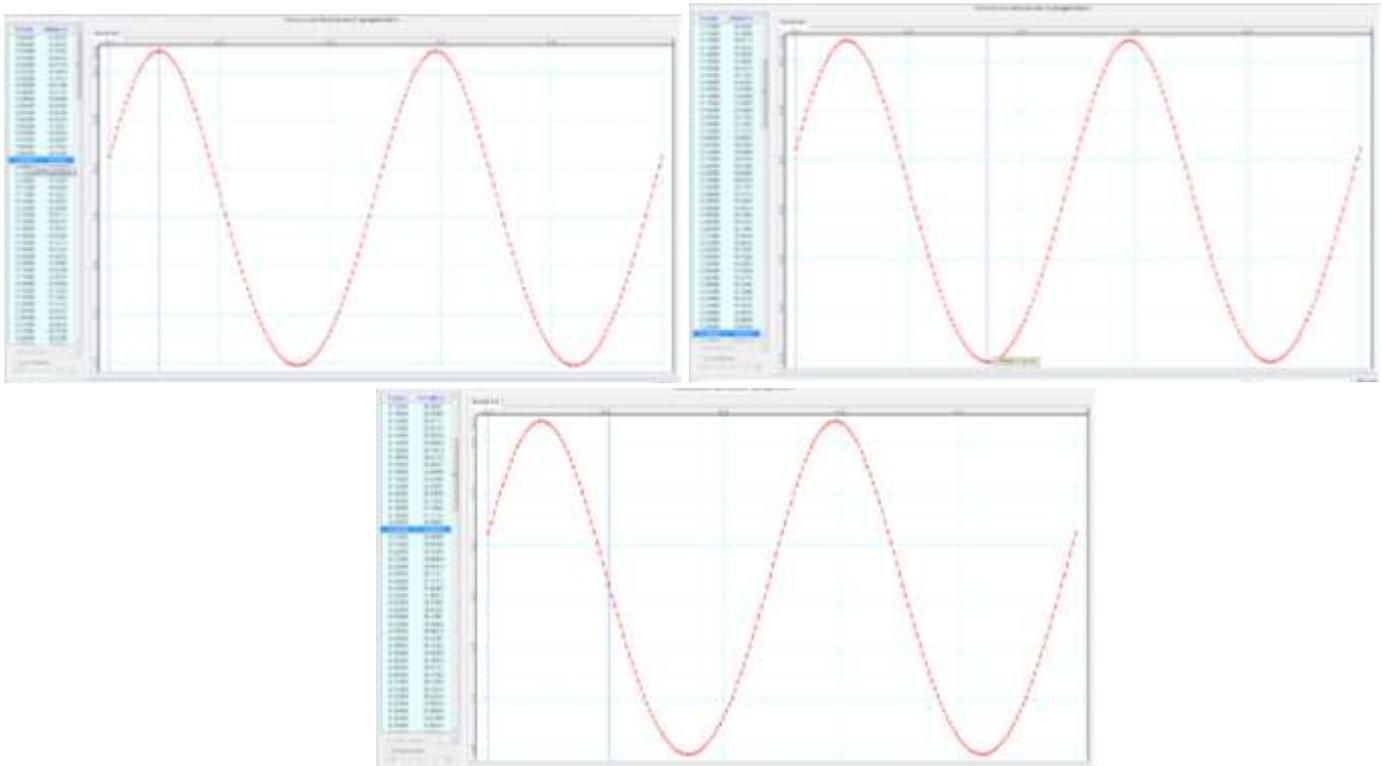
$$\tan \theta_{03} = \tan \theta_{01} \cos \alpha$$

Q6. Loi entrée/sortie cinématique : $\dot{\theta}_{03}(1 + \tan^2 \theta_{03}) = \dot{\theta}_{01}(1 + \tan^2 \theta_{01}) \cos \alpha$ d'où

$$\dot{\theta}_{03} = \dot{\theta}_{01} \frac{(1 + \tan^2 \theta_{01}) \cos \alpha}{(1 + \cos^2 \alpha \cdot \tan^2 \theta_{01})}$$

Q7. Le joint n'est homocinétique que lorsque $\alpha = 0$

Q8.



Q9. $coeff = \frac{|\omega_e - \omega_{ext}|}{\omega_e} = \frac{66.83 - 53.86}{60} = 0.216 = 21.6\%$ pour $\alpha \approx 30^\circ$

Q10. Il laisse une rotation libre sur les 3 degrés de liberté en rotation. La liaison équivalente est une rotule à doigt.

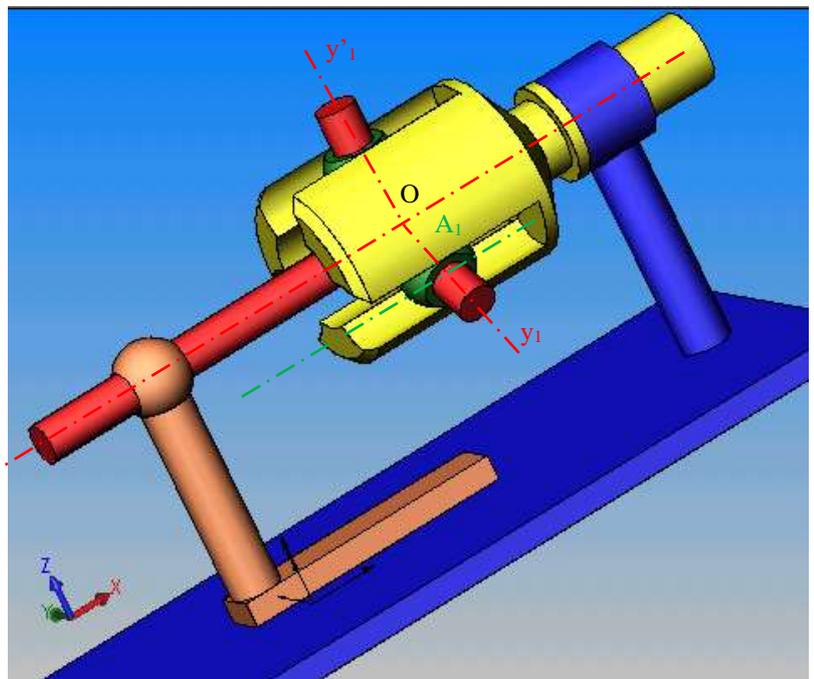
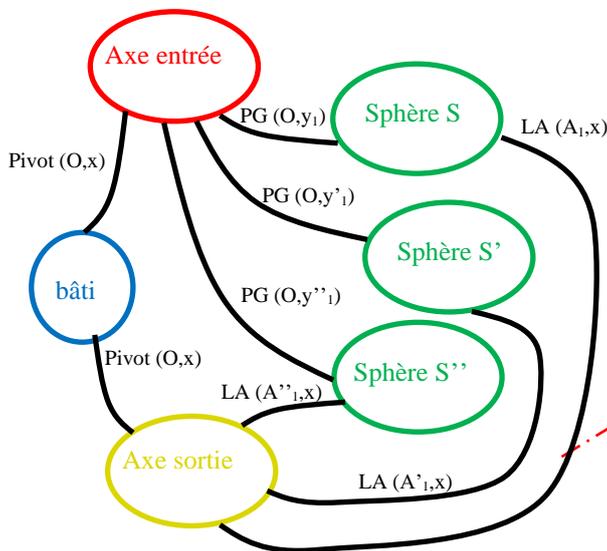
Q11. Joint de cardan double

Homocinétiq ue ? Oui / Non		Angle réglage 1 / bâti : Position initiale = Position finale				
		- 30°	-15°	0°	+ 15°	+ 30°
Angle réglage 2 / bâti : Position initiale = Position finale	0°	non	non	oui	non	non
	15°	non	oui	non	non	non
	30°	oui	non	non	non	non

Q12. Si les axes de rotation en entrée et sortie sont parallèles alors le double joint de cardan est homocinétiq ue. Dans les autres cas, il ne l'est pas.

Q13. Les pièces intermédiaires ont toujours un mouvement à vitesse variable ce qui crée de la fatigue des matériaux. Si α est proche de 90° les extrémums de $\dot{\theta}_{03}$ sont très importants donc des phénomènes d'usure des guidages en rotation également. Les joints de cardan doivent être utilisés pour de petits angles α .

Q14. Graphe des liaisons :

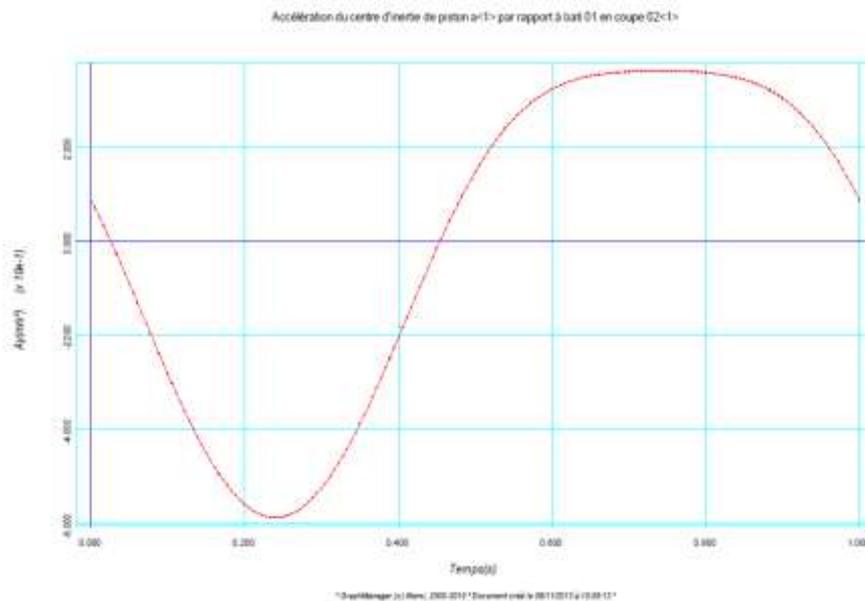
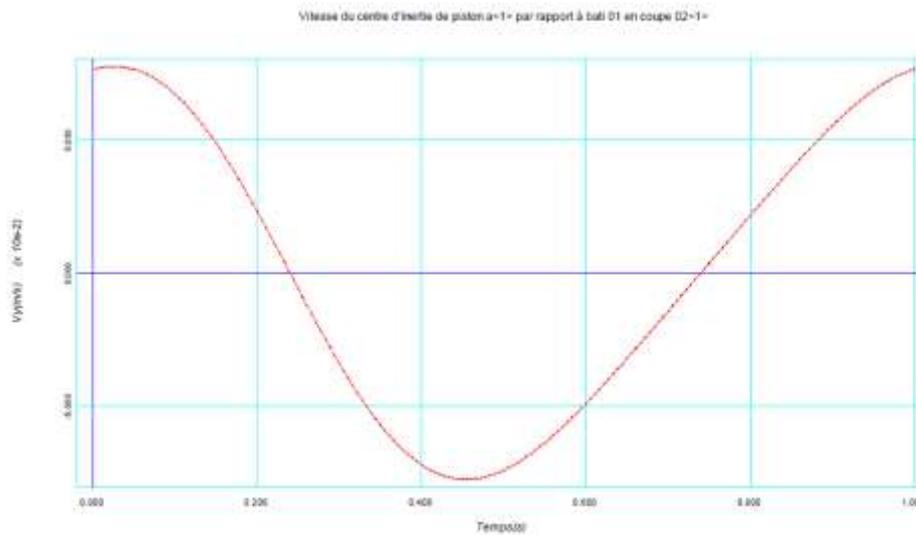
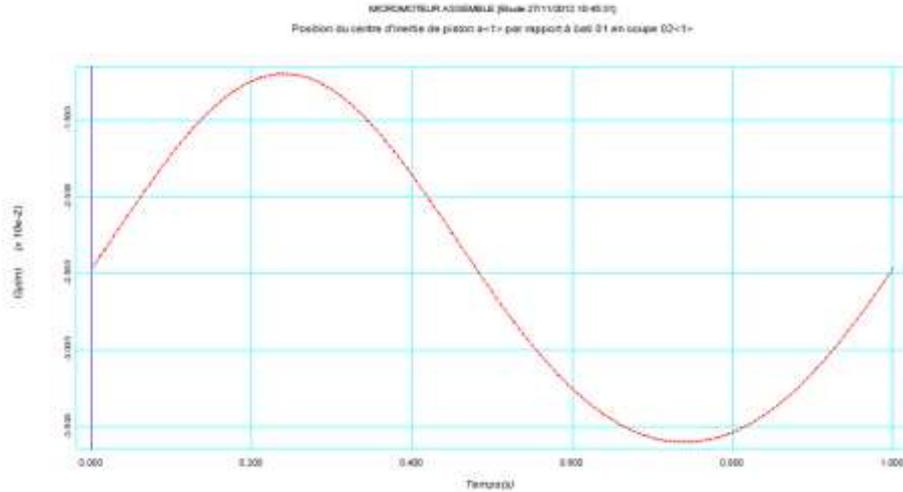


O : centre du tri-arbre rouge, A_1 : centre de la sphère S verte, LA : linéaire annulaire ou sphère/cylindre, PG : pivot glissant.

Ici les axes des rotation entrée et sortie sont confondus. SW ne parvient pas à faire fonctionner le mécanisme pour un angle $\alpha \neq 0$. Les contraintes géométriques lors de l'assemblage bloque la construction. Alors qu'en réalité cela marche, on les utilise dans toutes les voitures.

Transformation SW

- Q1. Le paramètre géométrique d'entrée est le déplacement vertical du piston /bâti
- Q2. Le paramètre géométrique de sortie est l'angle de rotation de l'arbre moteur (hélice)/bâti
- Q3. Mouvement de translation rectiligne alternative
- Q4. Mouvement de rotation continue
- Q5.



Q6.

$$\vec{OO} = \vec{0} = \vec{OA} + \vec{AB} + \vec{BO} = a\vec{x}_1 + b\vec{x}_2 - \lambda(t)\vec{x}_0 = (a\cos\alpha + b\cos\beta - \lambda(t))\vec{x}_0 + (a\sin\alpha + b\sin\beta)\vec{y}_0$$

D'où $a\cos\alpha + b\cos\beta = \lambda(t)$ et $a\sin\alpha + b\sin\beta = 0$

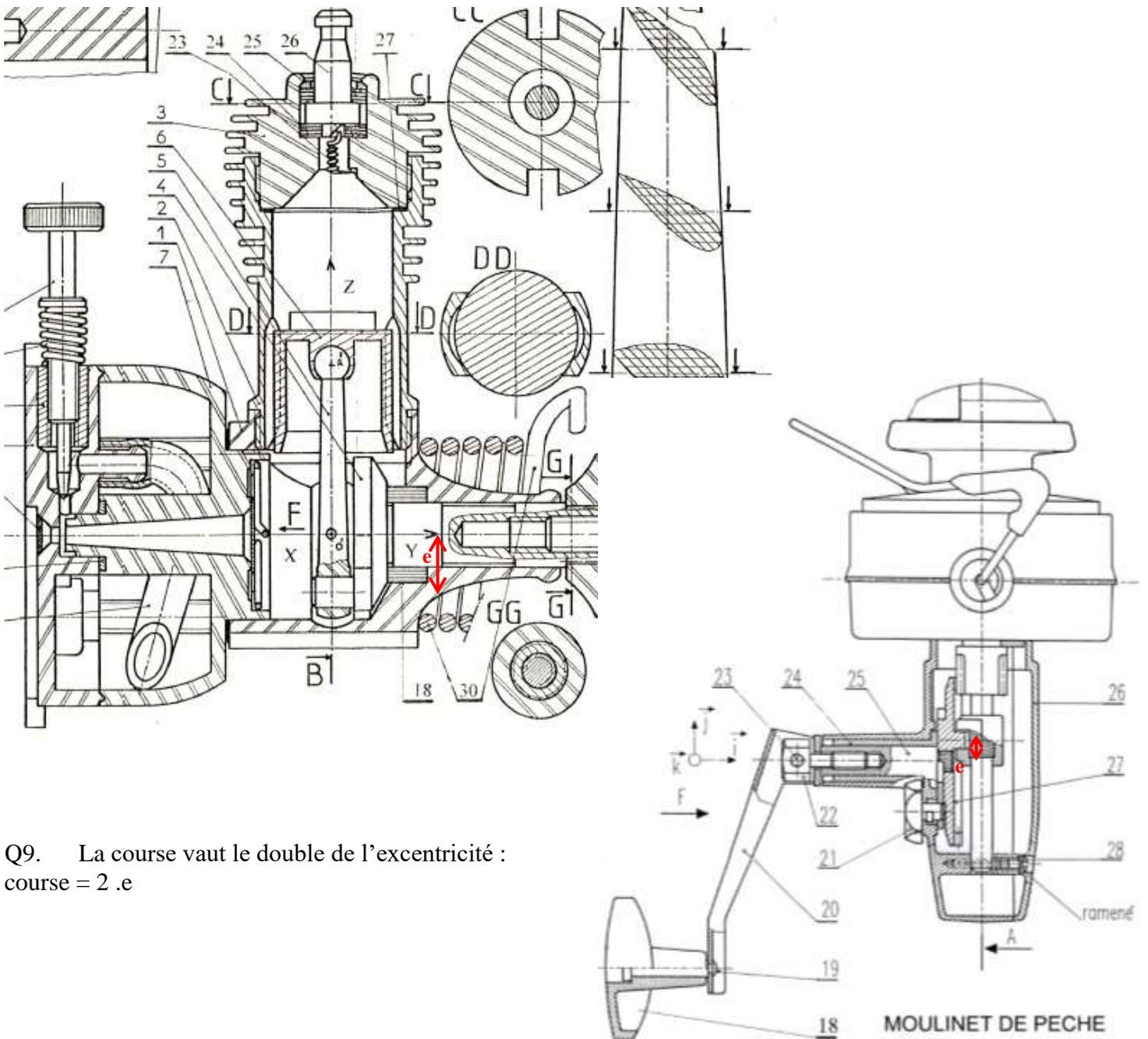
Ce qui donne $\cos\beta = \frac{\lambda(t) - a\cos\alpha}{b}$ et $\sin\beta = \frac{-a\sin\alpha}{b}$

D'où $\frac{\lambda(t) - a\cos\alpha}{b} = \sqrt{1 - \left(\frac{a\sin\alpha}{b}\right)^2} \Rightarrow \lambda(t) = a\cos\alpha + \sqrt{b^2 - a^2\sin^2\alpha}$

Ce qui donne pour la vitesse : $\dot{\lambda}(t) = -a\dot{\alpha}\sin\alpha + \frac{-a^2\dot{\alpha}\sin\alpha\cos\alpha}{\sqrt{b^2 - a^2\sin^2\alpha}}$

Q7. Forme sinusoïdale pour le déplacement. On s'éloigne de la sinusoïde pour la vitesse et l'accélération

Q8. La course vaut le double de l'excentricité: ici course = 2 . e



Q9. La course vaut le double de l'excentricité :
course = 2 . e

Q10. $y(\theta) = e \cos \theta(t)$ d'où $\dot{y}(\theta) = -e\dot{\theta} \sin \theta(t)$ et $\ddot{y}(\theta) = -e\ddot{\theta} \sin \theta(t) - e\dot{\theta}^2 \cos \theta(t)$

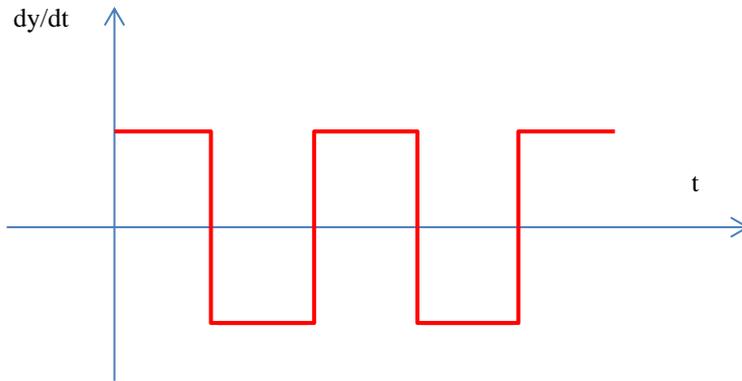
Q11. La vitesse de rotation $\dot{\theta}$ étant constante on a des formes purement sinusoïdales pour le déplacement y et ses dérivées.

Q12. La forme en sinus du déplacement y engendre une répartition du fil non régulière. Il « s'amoncele » sur les extrémités de la bobine.

Q13. Les brins se chevauchent et bloquent l'enroulement ou le déroulement de la bobine

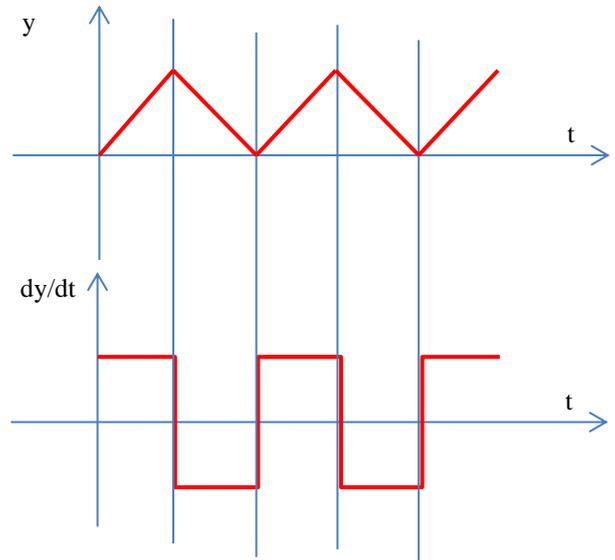
Q14. Même problème puisque le déplacement présente une forme voisine d'une pure sinusoïde

Q15. Vitesse de translation constante.



Q16. Elle est constante

Q17. Accélération toujours nulle.



Q18. pour $\theta \in [0; 180^\circ]$:

$$X(\theta) = \left(20 + 10 * \frac{\pi}{180} \theta \right) * \cos \left(\frac{\pi}{180} \theta \right)$$

$$Y(\theta) = \left(20 + 10 * \frac{\pi}{180} \theta \right) * \sin \left(\frac{\pi}{180} \theta \right)$$

pour $\theta \in [180^\circ; 360^\circ]$

$$X(\theta) = \left(20 + \left(20 - 10 * \frac{\pi}{180} \theta \right) \right) * \cos \left(\frac{\pi}{180} \theta \right)$$

$$Y(\theta) = \left(20 + \left(20 - 10 * \frac{\pi}{180} \theta \right) \right) * \sin \left(\frac{\pi}{180} \theta \right)$$

On parle de représentation paramétrique d'une courbe

