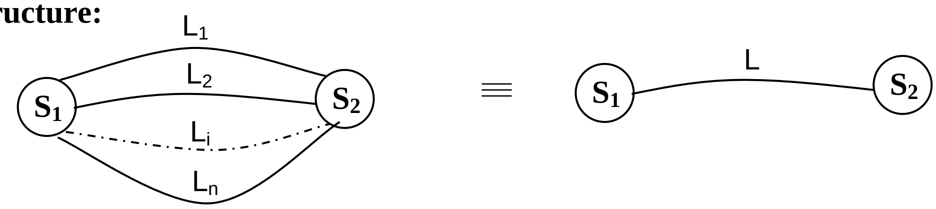
CHAINES DE SOLIDES

1 – Liaisons en parallèle:

1.1 - Graphe de structure:



L = liaison équivalente = liaison qui autorise le même mouvement et qui transmet la même action mécanique

1.2 – Torseur des inter-efforts de L:

On applique le principe fondamental de la statique à S_2:

n liaisons L_i : $\sum \mathcal{T}_i(S_1 \rightarrow S_2) + \mathcal{T}(Ext \rightarrow S_2) = \{0\}$

liaison équivalente: $\mathcal{T}(S_1 \rightarrow S_2) + \mathcal{T}(Ext \rightarrow S_2) = \{0\}$

d'où $$\boxed{\mathcal{T}(S_1 \rightarrow S_2) = \sum_{i-1}^{n} \mathcal{T}_i(S_1 \rightarrow S_2)} \quad (1)$$

Pour qu'une composante du torseur $\mathcal{T}(S_1 \rightarrow S_2)$ soit différente de zéro, il suffit qu'une seule composante de l'un des $\mathcal{T}_i(S_1 \rightarrow S_2)$ soit différente de zéro (il suffit qu'une seule des liaisons puisse transmettre la composante d'action mécanique).

1.3 – Torseur cinématique de L:

$\forall$ A, $\vec{V}(A \in S_1/S_2)$ et $\vec{\Omega}(S_i/S_2)$ sont identiques $\forall\ \mathcal{V}_i(S_i/S_2)$

d'où $$\boxed{\mathcal{V}(S_1/S_2) = \mathcal{V}_i(S_1/S_2) \quad \forall i} \quad (2)$$

On peut aussi obtenir le torseur cinématique de L à partir du torseur statique (liaison parfaite).

1.4 – Degré d'hyperstaticité de la liaison:

Les n liaisons en parallèle introduisent N_s inconnues de liaisons X_i, Y_i, … La relation (1) permet d'écrire 6 équations scalaires pour déterminer les N_s inconnues en fonction des composantes X, Y, Z, L, M, N de la liaison équivalente.

Soit r_s le nombre d'équations indépendantes (rang du système).

si $r_s = 6$, les 6 composantes de la liaison équivalente sont différentes de 0, donc c'est une liaison fixe.

On appelle **degré d'hyperstaticité** de la liaison $\boxed{h = N_s - r_s}$

<u>h = 0</u> : liaison isostatique (on peut déterminer toutes les inconnues c'est-à-dire la part que prend chaque liaison dans la transmission des actions mécaniques).

<u>h > 0</u> : liaison hyperstatique de degré h (h inconnues hyperstatiques c'est-à-dire non connues).

<u>Remarques:</u>
Dans un mécanisme <u>isostatique</u>, le torseur des inter-efforts de chaque liaison est connu:
- évaluation correcte des pressions de contact et des efforts d'où dimensionnement des pièces précis
- assurance que les surfaces sont bien en contact (F>0) d'où un positionnement précis
- facilité de fabrication car absence de conditions géométriques (parallélisme, coaxialité, …) à réaliser mais introduction de pièces intermédiaires (pour diminuer le nombre d'inconnues statiques ce qui augmente le nombre de degrés de liberté) donc plus de complexité (plus cher)

Dans un mécanisme <u>hyperstatique</u>, toutes les composantes d'inter-efforts ne sont pas connues:
- conditions géométriques à réaliser à la fabrication (*ex: table sur 4 pieds: les 4 points de contact doivent être dans un même plan*)
- mécanisme plus rigide (*table de machine-outil*).

1.5 – Degré de mobilité de la liaison:

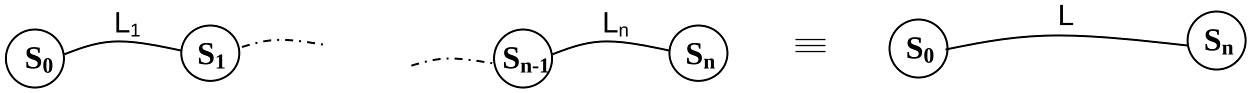
r_s représente le nombre de relations de nullité indépendantes du torseur cinématique de la liaison équivalente.

On appelle **degré de mobilité** de la liaison $\boxed{m = 6 - r_s}$

<u>m = 0</u> : liaison fixe
<u>m > 0</u> : liaison mobile à m degrés de liberté

2 – Liaisons en série:

2.1 - Graphe de structure: Chaîne ouverte de solides



2.2 – Torseur des inter-efforts de L:

On applique le principe fondamental de la statique à S_0:

$$\mathcal{T}(Ext \rightarrow S_0) + \mathcal{T}(S_1 \rightarrow S_0) = \{0\} \Rightarrow \mathcal{T}(Ext \rightarrow S_0) = \mathcal{T}(S_0 \rightarrow S_1)$$

… on applique le principe fondamental de la statique à $\{S_0+S_1+ \dots +S_{i-1}\}$

$$\mathcal{T}(Ext \rightarrow S_0) + \mathcal{T}(S_i \rightarrow S_{i-1}) = \{0\} \Rightarrow \mathcal{T}(Ext \rightarrow S_0) = \mathcal{T}(S_{i-1} \rightarrow S_i)$$

On applique le principe fondamental de la statique à $\{S_0\}$pour la liaison équivalente:

$$\mathcal{T}(Ext \rightarrow S_0) + \mathcal{T}(S_n \rightarrow S_0) = \{0\} \Rightarrow \mathcal{T}(Ext \rightarrow S_0) = \mathcal{T}(S_0 \rightarrow S_n)$$

d'où $$\boxed{\mathcal{T}(S_0 \rightarrow S_n) = \mathcal{T}(S_{i-1} \rightarrow S_i) \quad \forall i}$$

Pour qu'une composante du torseur $\mathcal{T}(S_0 \rightarrow S_n)$ soit nulle, il faut que <u>toutes</u> les composantes correspondantes des $\mathcal{T}(S_{i-1} \rightarrow S_i)$ soient nulles.

2.3 – Torseur cinématique de L:

Composition des mouvements: $\mathcal{V}(S_n/S_0) = \mathcal{V}(S_n/S_{n-1}) + \ldots + \mathcal{V}(S_1/S_0)$

$$\boxed{\mathcal{V}(S_n/S_0) = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{V}(S_i/S_{i-1})}$$

2.4 - Degré d'hyperstaticité de la liaison:

$\mathcal{T}(S_0 \rightarrow S_n) = \mathcal{T}(S_{i-1} \rightarrow S_i)$ $\forall i$ $\Rightarrow$ on peut déterminer toutes les composantes X_i, Y_i, …, N_i en fonction de X, Y, …, N donc la liaison équivalente à n liaisons en série est toujours **isostatique**.

2.5 – Degré de mobilité:

Soit N_c le nombre d'inconnues cinématiques introduites par les n liaisons:

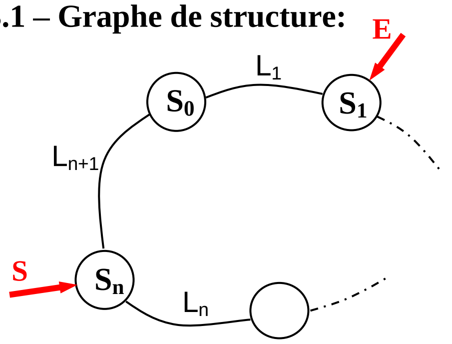
Le **degré de mobilité** de la liaison vaut $\boxed{m = N_c}$

On appelle degré de mobilité utile de la liaison $\boxed{m_u = \text{nombre d'inconnues cinématiques}}$

m_i est le degré de mobilité interne de la liaison (nombre de mouvements qui n'entraînent aucun mouvement des autres pièces c'est-à-dire le nombre de degrés de liberté qui existent quand S_n est fixe par rapport à S_0). On a alors: $\boxed{m = m_u + m_i}$

3 – Chaîne continue fermée:

3.1 – Graphe de structure:



n pièces + bâti $\mathbf{S_0}$ $\Rightarrow$ *n+1* liaisons

E représente les actions de l'extérieur à l'entrée du mécanisme (sur $\mathbf{S_1}$) et **S** les actions de l'extérieur sur la sortie ($\mathbf{S_n}$).

3.2 – Etude statique:

Les $n+1$ liaisons introduisent N_s inconnues statiques. On applique le principe fondamental de la statique aux n pièces (pas au bâti!) $\Rightarrow$ système de $6n$ équations à N_s inconnues de rang r_s ($\leq 6n$) en fonction des efforts extérieurs et des paramètres de position.

On appelle **degré d'hyperstaticité** du mécanisme $\boxed{h = N_s - r_s}$

Nota: r_s est difficile à déterminer quand n est grand !
On a $6n - r_s$ équations non principales qui représentent les relations entre les efforts extérieurs (connus) et les paramètres de position (lois entrée-sortie ou équations de mouvement) donc les mobilités possibles du mécanisme:

le **degré de mobilité** du mécanisme vaut $\boxed{m = 6n - r_s}$

d'où la relation entre degré de mobilité et degré d'hyperstaticité: $\boxed{\mathbf{m - h = 6n - N_s}}$

On appelle **indice de mobilité** $\mathbf{i = m - h}$

3.3 – Etude cinématique:

Les $n+1$ liaisons introduisent N_c inconnues cinématiques et la fermeture cinématique permet d'écrire 6 équations de rang $r_c \leq 6$:

$$\mathcal{V}(S_1/S_2) + \mathcal{V}(S_2/S_3) + \ldots + \mathcal{V}(S_n/S_0) + \mathcal{V}(S_0/S_1) = \{0\}$$

Remarque : lorsque deux vecteurs mobiles du mécanisme restent perpendiculaires au cours du temps, il est souvent intéressant d'écrire que leur produit scalaire est nul pour trouver une relation permettant d'obtenir la loi entrée-sortie (en général par dérivation de cette relation).

La mobilité m du mécanisme représente le nombre d'inconnues cinématiques indépendantes nécessaires pour calculer toutes les autres d'où $\boxed{m = N_c - r_c}$ avec $m = m_u + m_i$

Remarque: relation entre N_c et N_s?

pour chaque liaison parfaite: $N_{ci} = 6 - N_{si}$

pour les (n+1) liaisons: $\sum N_{ci} = 6(n+1) - \sum N_{si}$ soit $N_c = 6(n+1) - N_s$ d'où $\boxed{\mathbf{m - h = N_c - 6 = i}}$

3.4 – Etude géométrique:

On écrit les fermetures géométriques.

3.4.1 – Aspect linéaire:

On parcourt le mécanisme en passant par un point A_i de chaque liaison:

$$\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \ldots + \overrightarrow{A_{n+1}A_1} = \vec{0} \Rightarrow 3 \text{ équations scalaires}$$

3.4.2 – Aspect angulaire:

A partir d'une base de référence, on parcourt les différentes bases attachées aux différents solides:

$$(\vec{x}_0, \vec{x}_1) + (\vec{x}_1, \vec{x}_2) + \ldots + (\vec{x}_n, \vec{x}_0) = 0$$

idem dans deux autres plans perpendiculaires $\Rightarrow$ 3 équations scalaires.

3.5- Fermeture cinématique :

Les $n+1$ liaisons introduisent N_c inconnues cinématiques et la fermeture cinématique permet d'écrire 6 équations de rang $r_c \leq 6$:

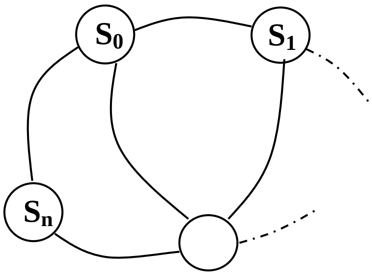
$$\mathcal{V}(S_1/S_2) + \mathcal{V}(S_2/S_3) + \ldots + \mathcal{V}(S_n/S_0) + \mathcal{V}(S_0/S_1) = \{0\}$$

En général, ces équations ne sont pas linéaires par rapport aux paramètres de position, donc n'admettent pas de solution analytique: on fait appel à des logiciels spécialisées pour les résoudre (Maple, DMT, …). Par contre, les équations obtenues avec les fermetures cinématiques sont linéaires par rapport aux vitesses (mais pas par rapport aux paramètres de position).

Remarque : lorsque deux vecteurs mobiles du mécanisme restent perpendiculaires au cours du temps, il est souvent intéressant d'écrire que leur produit scalaire est nul pour trouver une relation permettant d'obtenir la loi entrée-sortie (en général par dérivation de cette relation).

4 – Chaîne complexe:

4.1 – Graphe de structure:



Le graphe de structure fait apparaître plusieurs chaînes continues fermées imbriquées avec *n* pièces (sans le bâti) et *l* liaisons.

4.2 – Nombre cyclomatique du graphe:

C'est le nombre de cycles indépendants γ dans le graphe: $\boxed{\gamma = l - n}$

4.3 – Etude statique:

C'est la même étude que pour une seule chaîne fermée:

$$\begin{cases} h = N_s - r_s \\ m = 6n - r_s \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \boxed{\mathbf{m - h = 6n - N_s}}$$

4.4 – Etude cinématique:

On écrit les fermetures cinématiques pour les γ cycles indépendants $\Rightarrow$ 6γ équations scalaires de rang r_c d'où

$$\boxed{\mathbf{m - h = N_c - 6\gamma}}$$

5 – Conclusion:

$$\boxed{\mathbf{m - h = 6n - N_s = N_c - 6\gamma}} \quad \text{avec} \quad \boxed{\mathbf{m = m_u + m_i}}$$

mécanisme de transformation de mouvement : $m_u = 1$ avec réglage $m_u = 2$ (*variateur*)
bridage: $m_u = 0$
pb: détecter les mobilités internes !

6 – Problèmes plans: Soit un mécanisme supposé plan dans le plan xy

$$\Rightarrow \quad \mathcal{V}(S_i/S_j) = {}_O\begin{Bmatrix} - & v_x \\ - & v_y \\ \omega_z & - \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathcal{T}(S_j \rightarrow S_i) = {}_O\begin{Bmatrix} X & - \\ Y & - \\ - & N \end{Bmatrix}$$

Les composantes "ignorées" ne sont pas nécessairement nulles.

Chaque chaîne fermée fournit 3 équations scalaires d'où $\boxed{\mathbf{m - h = 3n - N_s = N_c - 3\gamma}}$

<u>Rappels:</u> dans le plan xy

- pivot, pivot glissant, linéaire annulaire d'axe z ou rotule $\Rightarrow$ pivot d'axe z
- glissière, pivot glissant d'axe x ou y, appui plan, linéaire rectiligne de directrice x ou y $\Rightarrow$ glissière
- linéaire annulaire d'axe x ou y, linéaire rectiligne de directrice z, ponctuelle $\Rightarrow$ ponctuelle