

Problème 2 : Doseur pondéral de granules plastiques (extrait Mines MP 08)

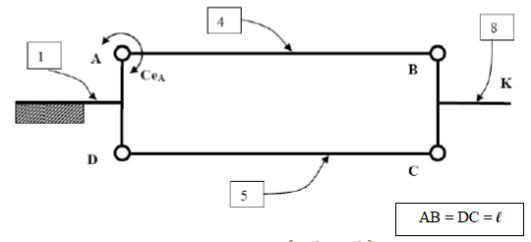
Cet extrait de sujet revient sur la structure mécanique à parallélogramme déformable vue dans l'exo 8 sur le pèse-lettre. Cette structure va permettre de mesurer le poids (ici d'une quantité de granules de thermoplastique utilisé dans la fabrication de pièces en plastique) sans connaître la position du CDG de l'amas de granules... conclusion : la majorité des capteurs d'efforts ou de pesée sont conçus avec cette structure en parallélogramme déformable puisqu'il est rare de connaître avec précision où se situe le point d'application de l'effort à mesurer. Le travail de résolution est prémâché... La succession des isolements sur lesquels appliquer le PFS est donnée et les BAME pour chaque isolement sont donnés graphiquement (figure en haut de la page 8). Il reste simplement à écrire les équations du PFS et à résoudre.

Q1 : on travaille sur un modèle simplifié :

- Les liaisons en B, C et D sont des pivots parfaites. Forme des

torseurs : $\begin{Bmatrix} X & L \\ Y & M \\ Z & 0 \end{Bmatrix}$ au centre de chaque liaison. Avec L'hypothèse

Pb plan : $\begin{Bmatrix} X & - \\ Y & - \\ - & 0 \end{Bmatrix}$.

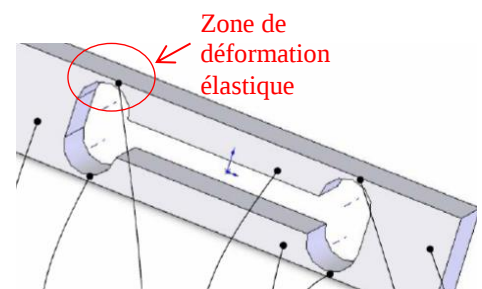


La notation de l'action de 8 sur 4 proposée par exemple en B est : $\begin{Bmatrix} B_x & - \\ B_y & - \\ - & 0 \end{Bmatrix}_B$ dans l'unique base de

l'énoncé soit : $T_{8 \rightarrow 4} = \begin{Bmatrix} B_x \vec{x} + B_y \vec{y} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_B$. Idem en C et D.

- En A, la liaison est une liaison pivot élastique puisque les actions mécaniques vont générer une petite déformation (rotation autour de $(A, \vec{z})$). Il y a donc apparition d'un moment résistant suivant $\vec{z}$:

$C_{eA} \vec{z}$. D'où le torseur proposé : $T_{1 \rightarrow 4} = \begin{Bmatrix} A_x \vec{x} + A_y \vec{y} \\ C_{eA} \vec{z} \end{Bmatrix}_A$.



- L'effort que l'on cherche à mesurer est le poids, mais on ne sait pas où se situe le CDG de la trémie avec son amas de granules de thermoplastique. D'où le torseur $T_{trémie \rightarrow capteur} = \begin{Bmatrix} -P \vec{y} \\ M_K \vec{z} \end{Bmatrix}_K$.
- Principe de mesure : « Des jauges de déformation, qui sont constituées de fins fils résistants collés dans la zone déformable 3, permettent de mesurer la valeur de C_{eA} , ce qui permet de déterminer P. ». Ces fils constituant la jauge de déformation ont une résistance qui varie avec la déformation très petite qu'ils subissent. La variation de cette résistance va déséquilibrer un pont de Wheatstone. Le signal électrique émis sera proportionnel à la résistance, donc à la déformation, donc au moment C_{eA} . La relation à établir entre P et C_{eA} permettra ainsi au capteur de donner une mesure de P sans connaître la position de K !!!

On suppose que les poids des éléments constitutifs du capteur sont négligés (pièces en A) par rapport aux autres actions mécaniques exercées.

- Isolons $S=\{5\}$: soumis à 2 glisseurs donc ils ont même support (CD) soit $\boxed{D_Y = C_Y = 0}$
- Isolons $S=\{8\}$: soumis à 3 actions mécaniques en B, C et K donc le théorème de la résultante statique sur $\vec{y}$ donne : $-B_Y - C_Y - P = 0$ soit $\boxed{B_Y = -P}$
- Isolons $S=\{4\}$: soumis à 2 actions mécaniques en B et A donc le théorème du moment statique en A selon $\vec{z}$ donne : $C_{eA} + l \cdot B_Y = 0$ soit $\boxed{P = C_{eA} / l}$

La version ci-dessus est la plus rapide. On ne donne que les équations qui servent.

On peut difficilement savoir comment appliquer le PFS pour chaque isolement puisque comparativement aux autres problèmes déjà rencontrés, la rupture d'équilibre pour un solide isolé ne se traduit pas par une rotation

autour d'un axe fixe (dans ce cas on applique par défaut le TMS suivant l'axe) ou par une translation suivant une direction fixe (dans ce cas on applique le TRS projeté suivant la direction de translation).

Version plus détaillée ou version au brouillon...

· BAME sur 5 :

$$T_{1 \rightarrow 5} = \begin{Bmatrix} D_x \vec{x} + D_y \vec{y} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_D \quad T_{8 \rightarrow 5} = \begin{Bmatrix} C_x \vec{x} + C_y \vec{y} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_C$$

TRS (inutile) : $D_x + C_x = 0 \quad D_y + C_y = 0$

TMS en D (par exemple) : $(\overrightarrow{DC} \wedge (C_x \vec{x} + C_y \vec{y})) \cdot \vec{z} = 0 \Rightarrow C_y = 0$

D'où : $C_y = -D_y = 0$

· BAME sur 8 :

$$T_{5 \rightarrow 8} = \begin{Bmatrix} -C_x \vec{x} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_C \quad T_{4 \rightarrow 8} = \begin{Bmatrix} -B_x \vec{x} - B_y \vec{y} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_B \quad T_{trémie \rightarrow capteur} = \begin{Bmatrix} -P \vec{y} \\ M_k \vec{z} \end{Bmatrix}_K$$

TRS : $B_x - C_x = 0 \quad -B_y - P = 0$

TMS (inutile) en B par exemple :

$$(\overrightarrow{BC} \wedge (-C_x \vec{x}) + M_k \vec{z} + \overrightarrow{BK} \wedge (-P \vec{y})) \cdot \vec{z} = 0 \dots$$

D'où : $B_y = -P$

· BAME sur 4 :

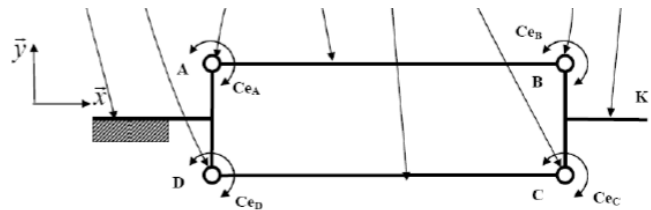
$$T_{8 \rightarrow 4} = \begin{Bmatrix} B_x \vec{x} - P \vec{y} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_B \quad T_{1 \rightarrow 4} = \begin{Bmatrix} A_x \vec{x} + A_y \vec{y} \\ C_{eA} \vec{z} \end{Bmatrix}_A$$

TRS (inutile) : $-B_x + A_x = 0 \quad -P + A_y = 0$

TMS en A par exemple : $(C_{eA} \vec{z} + \overrightarrow{AB} \wedge (B_x \vec{x} - P \vec{y})) \cdot \vec{z} = 0$ d'où $C_{eA} = l \cdot P$

Seules 3 équations (TMS en D sur 5 + TRS/ $\vec{y}$ sur 8 + TMS en A sur 4) sur 9 sont utiles....

Q2 : On recommence avec un modèle très proche de la réalité : 4 liaisons pivots élastiques pour lesquelles par symétrie on a $C_{eA} = C_{eB} = C_{eC} = C_{eD} = C_e$
Les torseurs aux points B, C et D présentent des moments $C_e \vec{z}$



- Isolons $S=\{4\}$: soumis à 2 actions mécaniques donc le théorème du moment statique en A selon $\vec{z}$ donne : $2 \cdot C_e + l \cdot B_y = 0$
- Isolons $S=\{5\}$: soumis à 2 actions mécaniques donc le théorème du moment statique en D selon $\vec{z}$ donne : $2 \cdot C_e + l \cdot C_y = 0$
- Isolons $S=\{8\}$: soumis à 3 actions mécaniques donc le théorème de la résultante statique en $\vec{y}$ donne : $-B_y - C_y - P = 0$

D'où : $\boxed{P = 4 \cdot C_e / l}$

Conclusion : la mesure du poids est donc indépendante de M_k et donc de la position du centre de gravité des granulés.

C'est encore la version la plus rapide.

En version détaillée ou au brouillon...

· BAME sur 5 :

$$T_{1 \rightarrow 5} = \begin{Bmatrix} D_x \vec{x} + D_y \vec{y} \\ C_e \vec{z} \end{Bmatrix}_D \quad T_{8 \rightarrow 5} = \begin{Bmatrix} C_x \vec{x} + C_y \vec{y} \\ C_e \vec{z} \end{Bmatrix}_C$$

Attention, ceux ne sont plus des glisseurs !!! les résultantes ne sont plus de direction DC !!!

TRS (inutile) : $D_x + C_x = 0 \quad D_y + C_y = 0$

TMS en D : $(\overrightarrow{DC} \wedge (C_x \vec{x} + C_y \vec{y}) + 2C_e \vec{z}) \cdot \vec{z} = 0 \Rightarrow \mathbf{l} \cdot \mathbf{C}_y + 2\mathbf{C}_e = \mathbf{0}$

· BAME sur 8 :

$$T_{5 \rightarrow 8} = \begin{Bmatrix} -C_x \vec{x} + \frac{2C_e}{l} \vec{y} \\ -C_e \vec{z} \end{Bmatrix}_C \quad T_{4 \rightarrow 8} = \begin{Bmatrix} -B_x \vec{x} - B_y \vec{y} \\ -C_e \vec{z} \end{Bmatrix}_B \quad T_{trémie \rightarrow capteur} = \begin{Bmatrix} -P \vec{y} \\ M_k \vec{z} \end{Bmatrix}_K$$

TRS : $B_x - C_x = 0 \quad -B_y + \frac{2C_e}{l} - P = 0$

TMS (inutile) en B par exemple :

$$(\overrightarrow{BC} \wedge (-C_x \vec{x} + \frac{2C_e}{l} \vec{y}) + M_k \vec{z} - 2C_e \vec{z} + \overrightarrow{BK} \wedge (-P \vec{y})) \cdot \vec{z} = 0 \dots$$

D'où : $\mathbf{B}_y = -\mathbf{P} + \frac{2\mathbf{C}_e}{l}$

· BAME sur 4 :

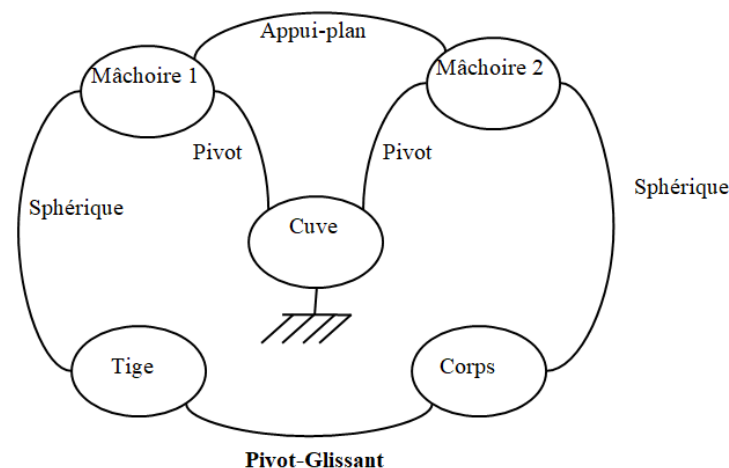
$$T_{8 \rightarrow 4} = \begin{Bmatrix} B_x \vec{x} - (P - \frac{2C_e}{l}) \vec{y} \\ C_e \vec{z} \end{Bmatrix}_B \quad T_{1 \rightarrow 4} = \begin{Bmatrix} A_x \vec{x} + A_y \vec{y} \\ C_e \vec{z} \end{Bmatrix}_A$$

TRS (inutile) : $-B_x + A_x = 0 \quad -P - \frac{2C_e}{l} + A_y = 0$

TMS en A par exemple : $(2C_e \vec{z} + \overrightarrow{AB} \wedge (B_x \vec{x} - (P - \frac{2C_e}{l}) \vec{y})) \cdot \vec{z} = 0$ d'où $\mathbf{4} \cdot \mathbf{C}_e = \mathbf{lP}$

Seules 3 équations (TMS en D sur 5 + TRS/ $\vec{y}$ sur 8 + TMS en A sur 4) sur 9 sont utiles..... l'idée est au fur et à mesure de votre pratique de la statique (et de la dynamique en Spé) d'aller au plus vite et de n'écrire que les équations utiles....

Q3 : Le graphe des liaisons est le suivant :



Le schéma cinématique plan :

