

Exercice : Scooter Piaggio

I. Présentation

La densification des zones urbaines ces vingt dernières années a conduit à une saturation de la plupart des grandes villes européennes. Ainsi, les conditions de circulation devenues très difficiles, les réseaux de transport en commun saturés, ont conduit de nombreux usagers à se tourner vers les véhicules à deux roues. D'abord destiné à un public de passionnés recherchant des sensations et un sentiment de liberté, le marché des deux roues a connu une évolution plus utilitaire. Ceci explique le fort succès des scooters cette dernière décennie. L'enjeu des constructeurs de scooters est donc de proposer des véhicules pouvant se déplacer aisément en milieu urbain et sur route tout en s'adaptant à ces nouveaux usagers peu habitués aux spécificités des deux roues en améliorant le confort et la sécurité.



Figure 1 : Scooter Piaggio MP3



Figure 2 : Piaggio en virage

Dans ce domaine, la société Piaggio propose un scooter dont le train avant est muni de deux roues.

Les objectifs sont d'avoir une tenue de route plus proche d'un véhicule à quatre roues, d'augmenter la capacité de freinage ainsi que le confort d'utilisation en ville tout en conservant la maniabilité d'un deux roues classique. Nous allons nous intéresser dans ce sujet à certains aspects de la conception du train avant à deux roues développé par la société Piaggio sur son scooter MP3.

Le train avant est défini comme l'ensemble comprenant : la roue (ou les roues) avant, la suspension, le dispositif de freinage, tous les éléments participant aux liaisons entre ceux-ci. Sur un scooter à une seule roue avant, le train avant est lié au châssis du véhicule par une liaison pivot permettant d'orienter la roue avant par rapport au véhicule grâce au guidon. Cette liaison permet de diriger le véhicule.

Pour un scooter à deux roues avant, le train avant doit non seulement permettre le pivotement des roues commandé par le guidon mais il doit également permettre l'inclinaison de l'ensemble du scooter tout en conservant le contact des roues au sol (voir photo ci-dessus).

Le train avant étudié est présenté sur la figure ci-contre :

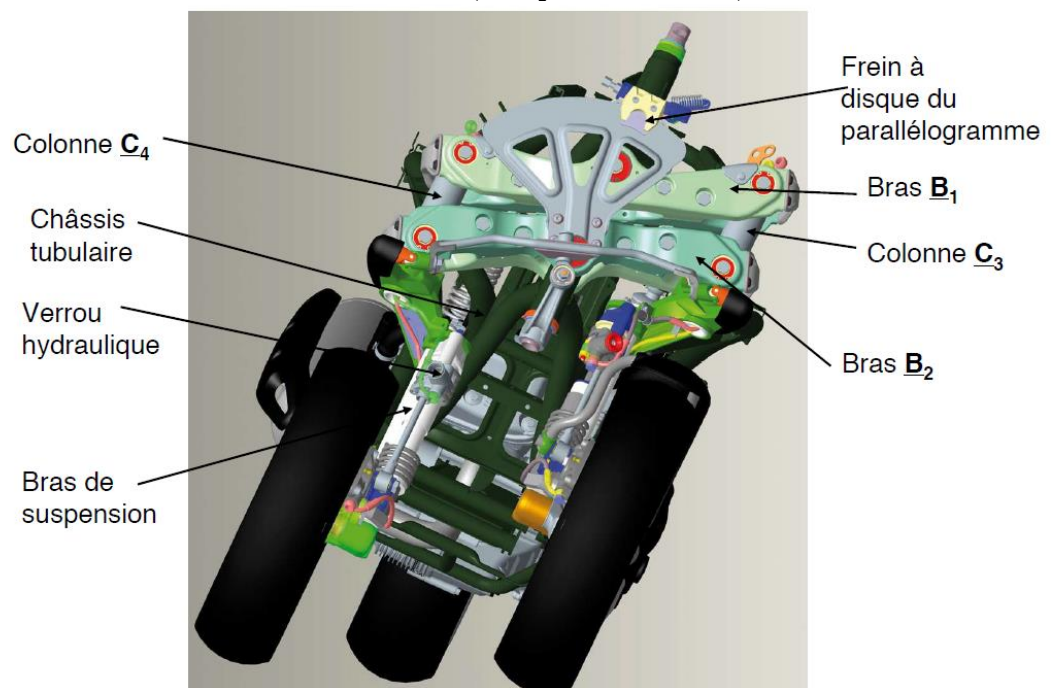


Figure 3 : Vue d'ensemble du train avant

Les colonnes C_3 et C_4 supportent les axes de pivotement de roues avant. Leur mouvement vertical, permettant au scooter de s'incliner, est assuré par les bras B_1 et B_2 . Un frein à disque permet de limiter les mouvements de ces bras afin d'assurer la stabilité du scooter dans les phases de changements de direction.

L'extrait de cahier des charges suivant permet de spécifier les principales performances attendues par ce train avant innovant :

Exigences	Critères	Niveaux
EX1 : Permettre au conducteur de maîtriser son véhicule sur la route	Inclinaison autorisée	$\pm 50^\circ$
	Stabilité du véhicule	Autonome pour $V > 15 \text{ km/h}$
	Verrouillage de l'inclinaison du train avant	Pour $V < 15 \text{ km/h}$ temps de verrouillage $< 3 \text{ s}$
	Masse maximale du train avant	80 kg
	Rayon de braquage maxi	2,5 m
EX2 : Assurer la liaison au sol	Contact des 2 roues au sol	Permanent
EX3 : Assurer une partie du freinage du scooter	Décélération maximale	8 m.s^{-2}
EX4 : Être conforme à la législation en vigueur	Distance entre les deux roues avant pour être conduit par un titulaire du permis B	460 mm
	Normes antipollution	Euro 3

II. Validation du critère de freinage

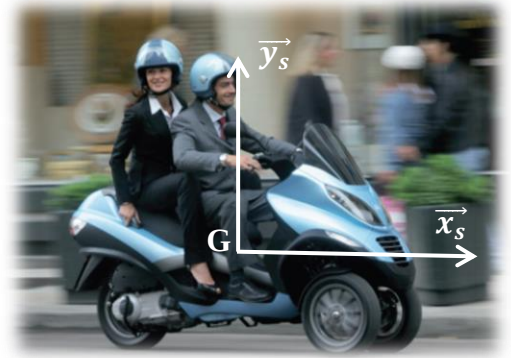
Objectif : L'objectif de cette partie est de vérifier le critère de décélération maximale du scooter.

II.1. Modélisation, hypothèses et paramétrage

On considère le scooter animé d'un mouvement de translation rectiligne uniformément décéléré de direction $\vec{x}_s$, celle de la route.

On se place dans le cas le plus défavorable :

- le scooter est chargé : 2 passagers, des bagages. On appelle M la masse de l'ensemble $E = \{\text{scooter} + \text{passager(s)} + \text{bagages}\}$ de centre d'inertie G . M vaut 425 kg. On considère tous les éléments symétriques par rapport au plan $(G, \vec{x}_s, \vec{y}_s)$, plan de symétrie du scooter.
- le freinage est un freinage d'urgence : le conducteur bloque les freins. On se retrouve alors dans une situation où l'on peut considérer que les roues avant sont à la limite du glissement.
- Dans cette phase, le sol ne transmet aucune action mécanique sur la roue arrière.
- La liaison entre le sol et une roue peut être modélisée par une liaison ponctuelle.



On note f est le coefficient de frottement entre les pneus et la route. Ce coefficient est supposé constant et identique pour chaque roue. Il vaut $f = 0,6$. Le rayon d'une roue est quant à lui noté R et vaut $R = 24 \text{ cm}$.

Le repère $(O, \vec{x}_s, \vec{y}_s, \vec{z}_s)$ associé au sol est considéré galiléen. On considère que l'ensemble des actions mécaniques est contenu dans le plan $(\vec{x}_s, \vec{y}_s)$.

II.2. Détermination des efforts transmis sur le train avant lors d'un freinage d'urgence

Le modèle retenu pour le frottement est celui décrit par les lois de Coulomb.

Q1. Justifier que le torseur d'action mécanique représentant l'action du sol sur une roue avant peut se mettre sous la forme d'un glisseur au point de contact entre la roue et le sol de résultante $X_{\text{sol} \rightarrow \text{roue}} \vec{x}_s + Y_{\text{sol} \rightarrow \text{roue}} \vec{y}_s$.

Q2. Appliquer le Théorème de la résultante **dynamique** à l'ensemble $E = \{\text{scooter} + \text{passager(s)} + \text{bagages}\}$ et en déduire l'expression de $X_{\text{sol} \rightarrow \text{roue}}$ permettant de satisfaire le critère de décélération maximale du cahier des charges.

Q3. En appliquant la loi de Coulomb au contact entre la roue et le sol, préciser si ce critère de décélération peut être satisfait avec cette valeur de coefficient de frottement.

Q4. En déduire alors la norme de l'action mécanique qui s'exerce sur le train avant lors de ce freinage d'urgence. Faire l'application numérique.

III. Etude et validation partielle du dispositif de verrouillage de l'inclinaison

On s'intéresse dans cette partie à la conception du dispositif de verrouillage de l'inclinaison. Il doit permettre de vérifier le critère de verrouillage de l'exigence EX1 pour les vitesses inférieures à 15km/h. Ce dispositif, présent en option, répond à un souci d'amélioration du confort d'utilisation du scooter en milieu urbain. Le train avant est sensiblement alourdi, par sa structure particulière, par rapport à un véhicule classique. Afin de conserver une bonne maniabilité aux faibles vitesses et de s'adapter aux usagers de tout gabarit, le verrouillage de l'inclinaison est donc proposé en option dans l'exigence EX1. Il permet en outre d'éviter de poser le pied aux arrêts (nombreux en circulation urbaine), et de garer le scooter dans n'importe quelle configuration (pente, à cheval sur un trottoir ou une bordure, etc . . .) sans avoir à utiliser la béquille centrale (opération difficile sur un engin d'environ 200 kg).

Objectif : l'objectif de cette partie est de valider le mécanisme de transmission du dispositif de verrouillage par rapport au cahier des charges.

La solution retenue pour bloquer la mobilité du train avant est un verrou hydraulique pour chaque bras de suspension. Les schémas correspondant à la suspension avant en configuration libre et verrouillée sont donnés sur la figure suivante.

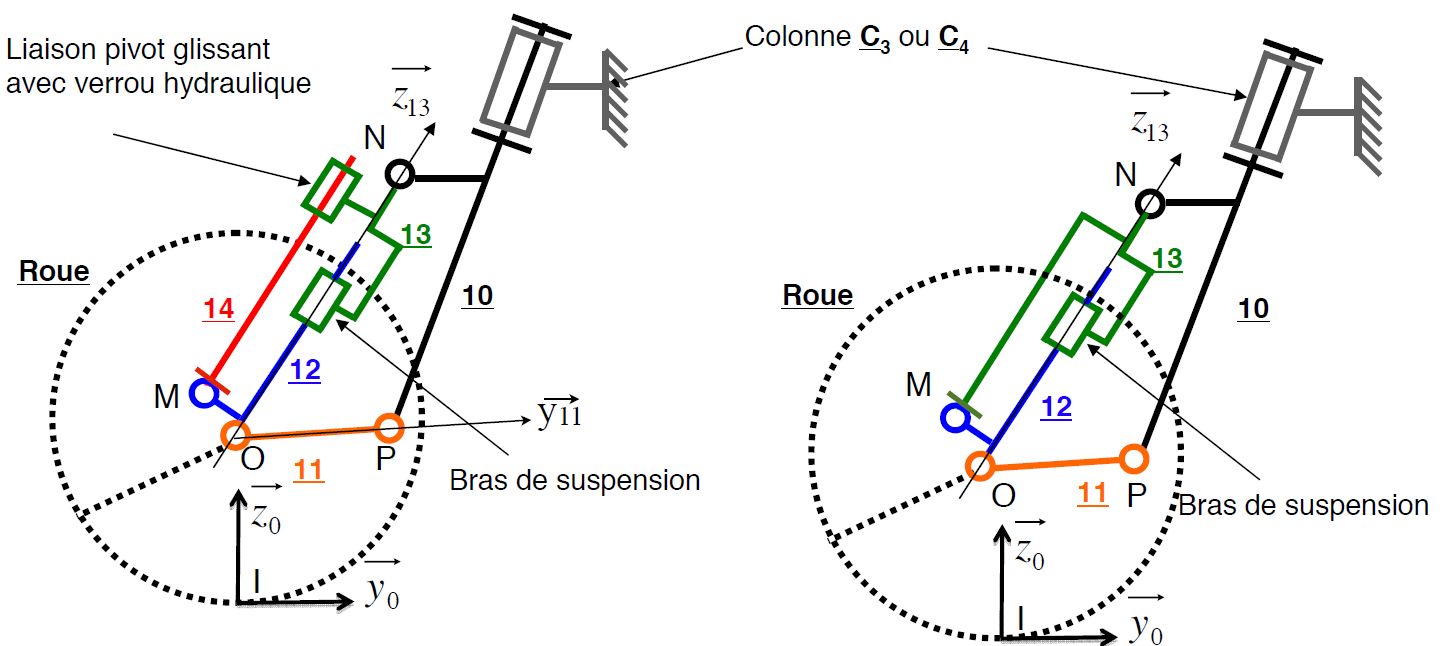


Figure 4 : Configuration libre (à gauche) et verrouillée (à droite)

III.1. Détermination de l'action mécanique nécessaire au verrouillage de la mobilité de la suspension avant.

La figure 4 présente le train avant du scooter dans les deux cas de fonctionnement. Celui-ci est composé des éléments et des liaisons suivants :

- La roue est en liaison pivot d'axe $(O; \vec{x}_0)$ avec le bras oscillant 11
- Le bras oscillant 11 est en liaison pivot d'axe $(O; \vec{x}_0)$ avec le bras de suspension constitué des pièces 12 et 13.
- La demi-fourche 10 est en liaison pivot d'axe $(P; \vec{x}_0)$ avec le bras oscillant 11
- Une tige 14 est liée par une liaison ponctuelle de normale $(M; \vec{z}_{13})$ avec 12 et par une liaison pivot glissant d'axe $(M; \vec{z}_{13})$ avec 13. C'est cette dernière liaison pivot glissant qui sera verrouillée par le verrou hydraulique.
- La liaison équivalente entre 12 et 13 est assimilée à une glissière de direction $\vec{z}_{13}$
- Entre 12 et 13 sont placés un amortisseur et un ressort non représentés.
- La masse des différents éléments est négligée.

On pose : $\overrightarrow{OM} = -m_y \overrightarrow{y_{13}} + m_z \overrightarrow{z_{13}}$ $\overrightarrow{ON} = n \overrightarrow{z_{13}}$ $\overrightarrow{OP} = l_{11} \overrightarrow{y_{11}}$
 $\theta_{13} = (\overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{y_{13}}) = (\overrightarrow{z_0}, \overrightarrow{z_{13}})$ $\theta_{11} = (\overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{y_{11}}) = (\overrightarrow{z_0}, \overrightarrow{z_{11}})$

On utilisera les hypothèses suivantes pour l'ensemble du problème :

- le référentiel lié au sol et noté R_0 est supposé galiléen
- l'ensemble de la suspension et du scooter est en équilibre dans le référentiel R_0
- l'action exercée par la roue sur 11 en O est modélisée par un glisseur de résultante :
 $\vec{R}_{r \rightarrow 11} = Y_{r \rightarrow 11} \overrightarrow{y_0} + Z_{r \rightarrow 11} \overrightarrow{z_0}$ (le moment en O de l'action de la roue sur 11 est donc nul)
- on suppose que la pivot glissant entre 13 et 14 est une liaison avec frottement. Elle transmet donc en plus des actions inhérentes à cette liaison une résultante portée par l'axe $\overrightarrow{z_{13}}$ notée : $Z_{13 \rightarrow 14} \overrightarrow{z_{13}}$
- le ressort placé entre 12 et 13 exerce une action mécanique sur 12 modélisée par une résultante au point O portée par $\overrightarrow{z_{13}}$ notée : $\vec{R}_{ress \rightarrow 12} = -F_{ress \rightarrow 12} \overrightarrow{z_{13}}$. On suppose que l'amortisseur ne transmet aucune action mécanique dans cette phase de fonctionnement.
- le problème est considéré plan, et on se place dans le plan $(\overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$. Le torseur représentant l'action mécanique de i sur j en un point M sera donc noté :

$$\{\mathcal{T}_{i \rightarrow j}\} = \begin{Bmatrix} - & L_{ij} \\ Y_{ij} & - \\ Z_{ij} & - \end{Bmatrix}_{(M, \mathcal{B}_0)}$$

Le graphe partiel des liaisons sur lequel ont été ajoutées les actions mécaniques est représenté ci-contre

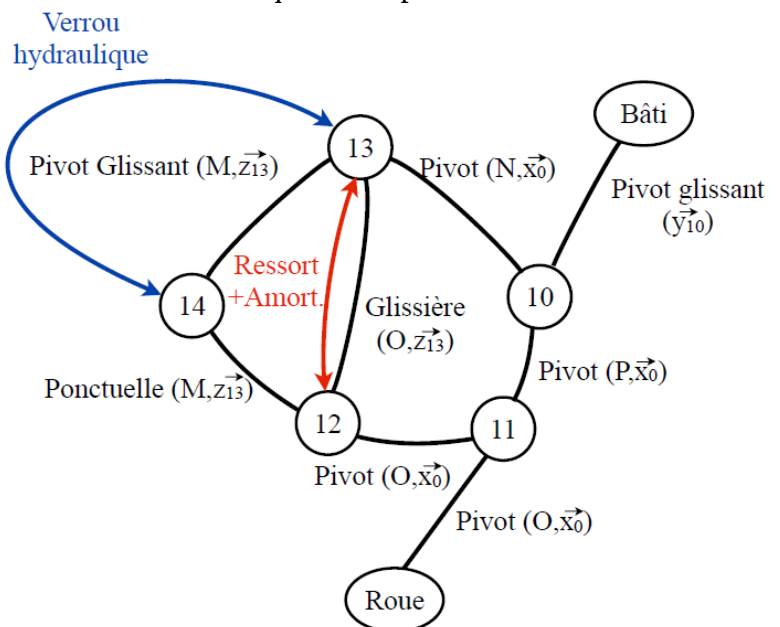


Figure 5 : graphe partiel des liaisons avec les actions mécaniques

Q5. Isoler le solide 11 et montrer à l'aide du principe fondamental de la statique que l'action mécanique de 10 sur 11 est portée par l'axe $\overrightarrow{y_{11}}$.

Q6. Isoler l'ensemble 12, 13 et 14 et montrer, en appliquant le théorème du moment statique au point N, centre de la liaison entre 10 et 13 que l'action mécanique de 11 sur 12 est une résultante portée par l'axe $\overrightarrow{z_{13}}$.

Q7. En déduire, à l'aide des résultats précédents, le torseur représentant l'action mécanique du solide 11 sur le solide 12 au point O. Ce torseur sera exprimé en fonction de : $Y_{r \rightarrow 11}$, $Z_{r \rightarrow 11}$, θ_{11} et θ_{13} .

Q8. Déterminer alors le torseur de l'action mécanique de 14 sur 12 au point M. Détailler la méthode utilisée.

Q9. En déduire alors l'expression de $Z_{13 \rightarrow 14}$ en fonction de : $Y_{r \rightarrow 11}$, $Z_{r \rightarrow 11}$, θ_{11} et θ_{13} et $F_{ress \rightarrow 12}$.

III.2. Détermination de la pression hydraulique sur le verrou nécessaire au verrouillage de la mobilité de la suspension avant.

Objectif : L'objectif de cette partie est de déterminer la pression à imposer dans le dispositif de verrouillage permettant de maintenir la suspension bloquée

Le principe retenu pour verrouiller la liaison pivot glissant entre 13 et 14 consiste à pincer un cylindre élastique Cy sur la tige 14 (voir figure 6). Le blocage se fait alors par adhérence. Le contact entre Cy et 14 sera considéré comme ponctuel aux points J'_1 et J'_2 .

Pour simplifier, on considère que les coefficients de frottement et d'adhérence entre Cy et 14 sont égaux et valent : $f = 0,3$. La résultante globale des efforts à transmettre par adhérence de 14 sur Cy est : $\vec{R}_{14 \rightarrow Cy} = Z_{14 \rightarrow Cy} \vec{z}_{13}$ avec $Z_{14 \rightarrow Cy} = 923 \text{ N}$

Compte tenu de la grande souplesse de Cy, on considère que les efforts transmis en J_1 et J_2 sont identiques en norme aux efforts en J'_1 et J'_2 respectivement.

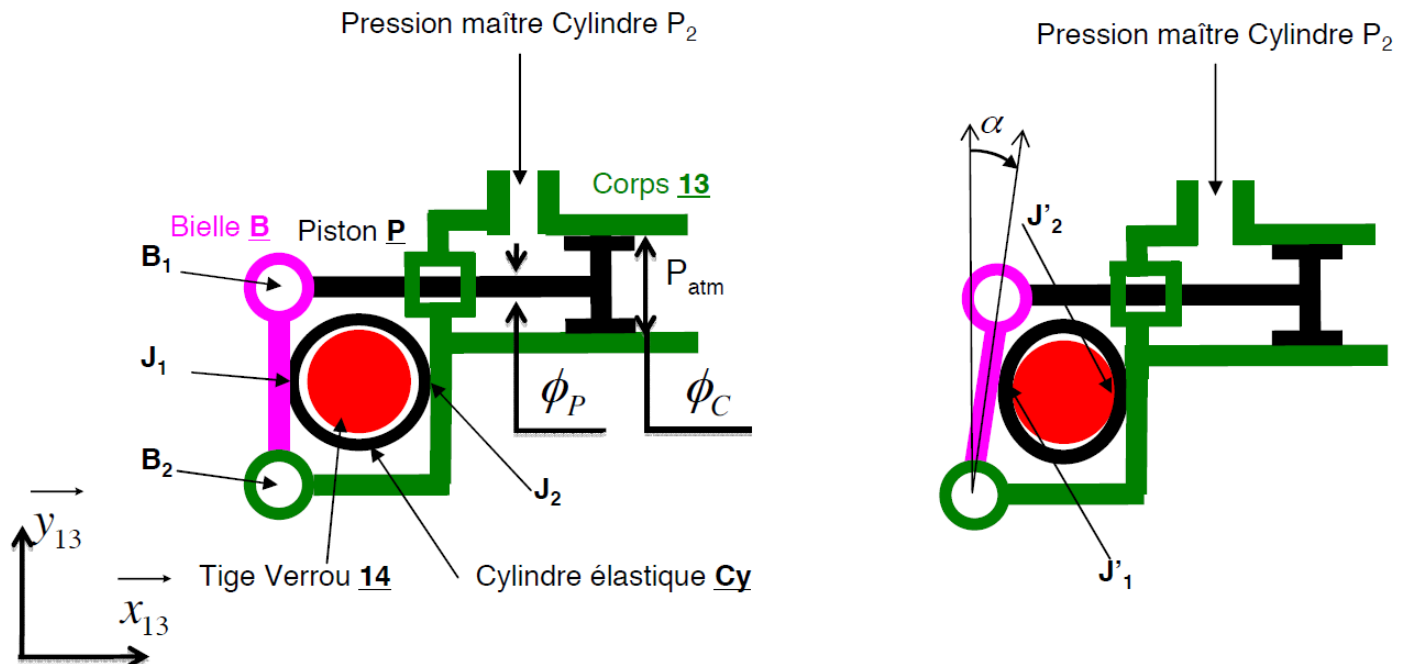


Figure 6 : Verrou hydraulique non verrouillé (à gauche) et verrouillé (à droite)

On pose : $\vec{B_2 B_1} = l_b \vec{y}_{13}$ $\vec{B_2 J_1} = \frac{l_b}{2} \vec{y}_{13}$ $\vec{J_1 J_2} = d_T \vec{x}_{13}$ $\alpha \approx 0 \text{ rad}$
 $l_b = 30 \text{ mm}$ $d_T = 50 \text{ mm}$ diamètres : $\phi_C = 30 \text{ mm}$ et $\phi_P = 15 \text{ mm}$

L'angle α étant supposé petit, on travaillera sur la configuration non déformée.

Q10. En détaillant le(s) théorème(s) et isolement(s) utilisés, exprimer les torseurs d'actions mécaniques transmissibles par les liaisons ponctuelles avec frottement en J'_1 et J'_2 notés $\{T_{Cy \rightarrow 14}^{J'_1}\}$ et $\{T_{Cy \rightarrow 14}^{J'_2}\}$ à la limite du glissement entre 14 et Cy. On exprimera ces torseurs dans la base $(\vec{x}_{13} = \vec{x}_0, \vec{y}_{13}, \vec{z}_{13})$ respectivement en J'_1 et J'_2 en fonction de $Z_{14 \rightarrow Cy}$ et de f .

Q11. En détaillant le(s) théorème(s) et isolement(s) utilisés, en déduire la projection sur $\vec{x}_{13}$ de la résultante des actions mécaniques transmissibles de P sur B notée $\vec{R}_{P \rightarrow B}$ en fonction de $Z_{14 \rightarrow Cy}$ et de f . En déduire la pression P_2 à imposer dans le dispositif de verrouillage en fonction de $Z_{14 \rightarrow Cy}$, f , P_{atm} et des caractéristiques géométriques. Effectuer l'application numérique de P_2 exprimée en bar.

III.3. Détermination du couple moteur nécessaire au verrouillage des mobilités du train avant.

Le mécanisme de verrouillage par verrou hydraulique décrit dans la partie précédente est complété avec un dispositif de freinage par frein à disque. Ces deux mécanismes (verrou hydraulique et frein à disque) sont actionnés par un moteur électrique commun. Le mécanisme de transmission du dispositif de verrouillage est schématisé figure 6

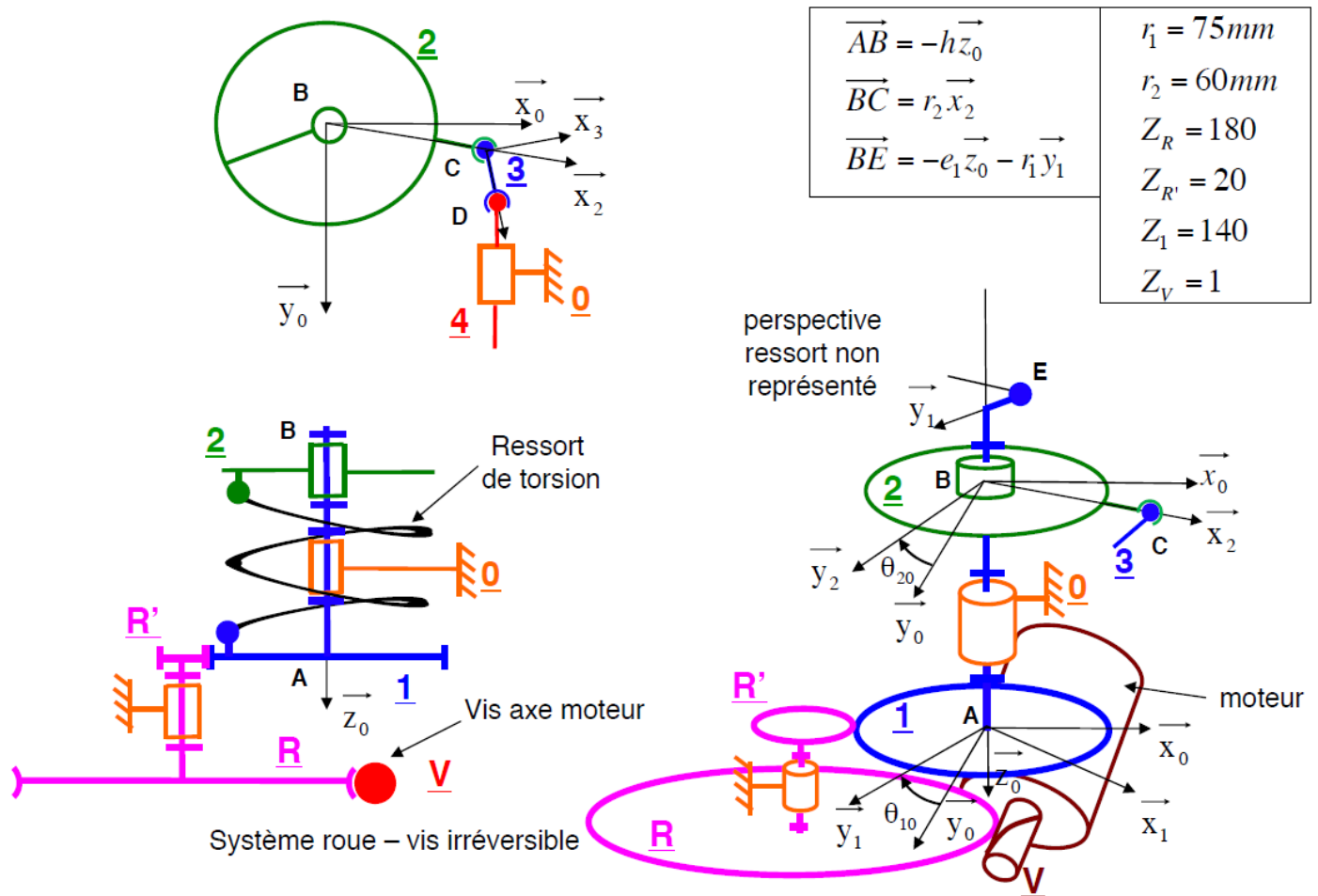


Figure 7 : Mécanisme de transmission du dispositif de verrouillage

Il est principalement constitué d'un ensemble 1 en liaison pivot par rapport au bâti 0. L'axe du moteur électrique est solidaire de la vis V qui engrène sur la roue R solidaire de la roue R' qui entraîne l'ensemble 1. L'extrémité du câble actionnant le frein à disque du parallélogramme est fixée à l'ensemble 1 au point E. La rotation de 1 permet donc de mettre en tension le câble du frein à disque du parallélogramme. La pièce 2 est en liaison pivot avec l'ensemble 1. Un ressort de torsion placé entre 1 et 2 permet d'imposer un couple noté $\vec{C}_{res \rightarrow 2} = C_{res \rightarrow 2} \overrightarrow{z_0}$ sur 2. La pièce 2 est en liaison sphérique au point C avec la bielle 3. La bielle 3 est en liaison sphérique au point D avec le piston 4 du maître-cylindre dont le schéma de principe est présenté figure 8. Le maître-cylindre permet d'actionner les verrous hydrauliques des deux bras de suspension avant.

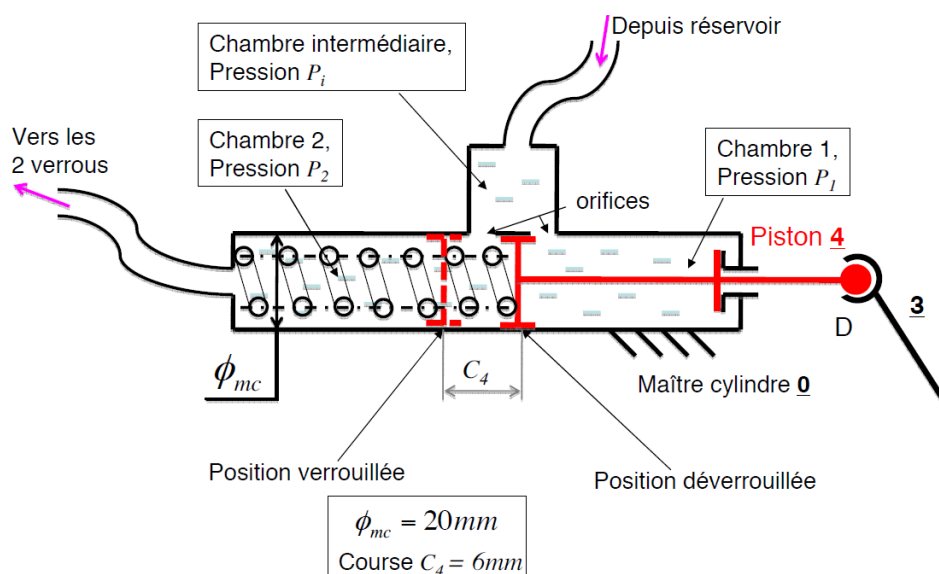


Figure 8 : Maître-cylindre du dispositif de verrouillage

On suppose qu'en position verrouillée, on a :

$$\theta_{32} = (\vec{x}_2, \vec{x}_3) = (\vec{y}_2, \vec{y}_3) = -30^\circ \quad \theta_{20} = (\vec{x}_0, \vec{x}_2) = (\vec{y}_0, \vec{y}_2) = 0^\circ$$

Les actions du ressort du maître-cylindre ainsi que les actions dues à la pression arrière P_1 seront négligées.

Q12. Déterminer le couple $C_{res \rightarrow 2}$ à imposer par le ressort de torsion sur 2 pour verrouiller les deux bras de suspension en fonction de P_2 et des données géométriques. Justifier votre réponse en détaillant les théorème(s) et isolement(s) utilisés.

Lors du verrouillage des verrous hydrauliques, la course C_4 du piston 4 du maître-cylindre est de 6 mm. On considère que cela entraîne un débattement angulaire maximum de la pièce 2 valant $\Delta\theta_{20 \max} = 6^\circ$.

La figure 9 ci-dessous montre un relevé expérimental de l'effort de tension dans le câble noté F en fonction de l'angle θ_{10} lorsque l'on actionne le frein à disque. F est mesuré au point E de la figure 6. La résultante des actions du câble en E est : $\vec{F}_{cab \rightarrow 1} = -F \vec{x}_1$. Pour assurer le blocage du parallélogramme d'inclinaison, la tension dans le câble doit être égale à 200 N.

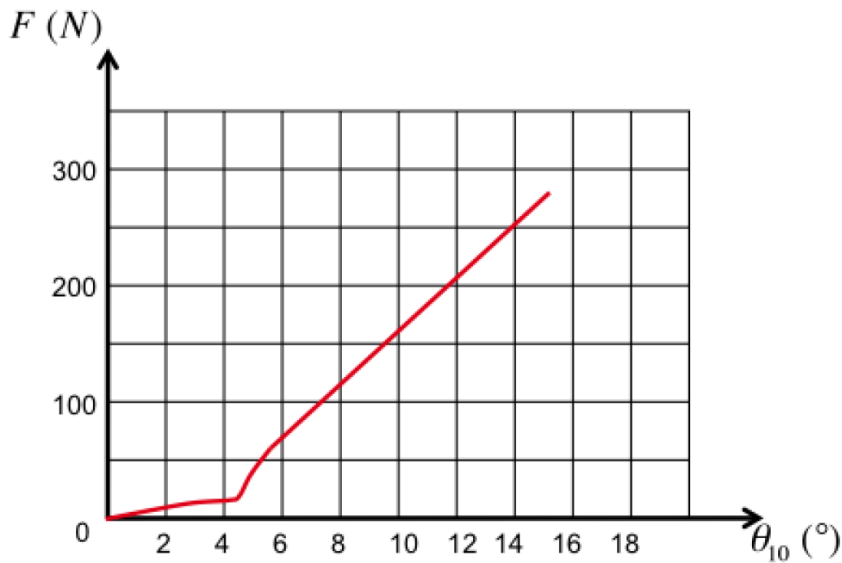


Figure 9 : tension F en fonction de l'angle θ_{10}

Q13. Relever la valeur $\theta_{10 \max}$ à imposer à la pièce 1 pour obtenir l'effort de tension de verrouillage. Déduire alors des questions précédentes l'expression de la raideur du ressort de torsion notée K_{Res} (en Nm/deg) qui permettra d'imposer la pression P_2 . Faire l'application numérique.

Q1. Le contact entre la roue et le sol se modélise par une liaison ponctuelle de normale $\vec{y}_s$. De plus, on suppose la présence de frottements dans cette liaison, ce qui justifie la présence d'une résultante contenue dans le plan tangent. Le problème étant considéré dans le plan $(\vec{x}_s, \vec{y}_s)$, cette résultante dans le plan tangent est donc supportée par le vecteur $\vec{x}_s$. Donc au point de contact entre la roue et le sol I :

$$\{\mathcal{T}_{sol \rightarrow roue} = \begin{pmatrix} X_{sol \rightarrow roue} & - \\ Y_{sol \rightarrow roue} & - \\ - & 0 \end{pmatrix}_{I, \mathcal{B}}$$

Q2. On isole l'ensemble $E = \{\text{scooter} + \text{passagers} + \text{bagages}\}$ et on fait un BAME :

- $\{\mathcal{T}_{sol \rightarrow roue \text{ droite}}\}$
- $\{\mathcal{T}_{sol \rightarrow roue \text{ gauche}}\}$
- $\{\mathcal{T}_{poids}\}$
- le sol ne transmet aucune action sur la roue arrière.

La résultante dynamique s'écrit (en notant $\vec{x}$ la position du scooter :

$$\vec{M} \overrightarrow{a_{(G \in E/Ro)}} = M \ddot{\vec{x}}$$

Le théorème de la résultante dynamique associé à l'ensemble E dans le référentiel $\widehat{\mathcal{R}}_s$ lié au sol supposé galiléen :

$$M \ddot{\vec{x}} = M \vec{g} + Y_{sol \rightarrow roue} \vec{y}_s + X_{sol \rightarrow roue} \vec{x}_s$$

Soit selon l'axe $\vec{x}_s$: $M \ddot{x} = X_{sol \rightarrow roue}$

Application numérique : $\ddot{x} = -8 \text{ m/s}^2$, $M = 425 \text{ kg}$ donc $X_{sol \rightarrow roue} = -3400 \text{ N}$

Q3. En appliquant la loi de Coulomb, sachant que les roues avant sont à la limite du glissement, alors : $|X_{sol \rightarrow roue}| = f |Y_{sol \rightarrow roue}|$.

Application numérique : $Y_{sol \rightarrow roue} = Mg = 4250 \text{ N}$ donc $|X_{sol \rightarrow roue}| = 2550 \text{ N}$. Ce critère de décélération ne peut pas être satisfait avec cette valeur de coefficient de frottement. Cela veut dire que le cahier des charges constructeur a pris une marge de sécurité pour la conception du train avant du scooter.

Q4. L'action mécanique qui s'exerce sur le train avant a donc pour norme :

$$\|\vec{R}_{sol \rightarrow roues}\} = \sqrt{X_{sol \rightarrow roue}^2 + Y_{sol \rightarrow roue}^2} = 4950 \text{ N}$$

Q5. On isole le solide 11 et on fait le BAME :

$$\{\mathcal{T}_{10 \rightarrow 11}\} = \begin{pmatrix} - & 0 \\ Y_{10/11} & - \\ Z_{10/11} & - \end{pmatrix}_{P, \mathcal{B}_0} \quad \{\mathcal{T}_{12 \rightarrow 11}\} = \begin{pmatrix} - & 0 \\ Y_{12/11} & - \\ Z_{12/11} & - \end{pmatrix}_{O, \mathcal{B}_0} \quad \{\mathcal{T}_{roue \rightarrow 11}\} = \begin{pmatrix} - & 0 \\ Y_{roue/11} & - \\ Z_{roue/11} & - \end{pmatrix}_{O, \mathcal{B}_0}$$

On veut montrer que l'action mécanique de 10 sur 11 est portée par l'axe $\vec{y}_{11}$. On applique le théorème du moment statique au point O en projection sur $\vec{x}_0$ à la pièce 11 supposée en équilibre dans le référentiel $\mathcal{R}_0$ supposé galiléen :

$$\begin{aligned} 0 &= \vec{M}_{O, 10/11} \cdot \vec{x}_0 + \vec{M}_{O, 12/11} \cdot \vec{x}_0 + \vec{M}_{O, roue/11} \cdot \vec{x}_0 \\ \Leftrightarrow 0 &= \vec{OP} \wedge (Y_{10/11} \vec{y}_0 + Z_{10/11} \vec{z}_0) + 0 + 0 \\ \Leftrightarrow 0 &= [l_{11} \vec{y}_{11} \wedge \vec{R}_{10/11}] \cdot \vec{x}_0 \\ \Rightarrow \vec{0} &= \vec{y}_{11} \wedge \vec{R}_{10/11} \end{aligned}$$

Donc les vecteurs $\vec{y}_{11}$ et $\vec{R}_{10/11}$ sont colinéaires. On en déduit alors que $\vec{R}_{10/11}$ est porté par $\vec{y}_{11}$.

Q6. On isole l'ensemble $\mathbf{S}=\{\mathbf{12}+\mathbf{13}+\mathbf{14}\}$ et on fait le BAME :

$$\{\mathcal{T}_{11 \rightarrow 12}\} = \begin{Bmatrix} - & 0 \\ Y_{11/12} & - \\ Z_{11/12} & - \end{Bmatrix}_{O, \mathcal{B}_0} \quad \{\mathcal{T}_{10 \rightarrow 13}\} = \begin{Bmatrix} - & 0 \\ Y_{10/13} & - \\ Z_{10/13} & - \end{Bmatrix}_{N, \mathcal{B}_0}$$

On veut montrer que l'action mécanique de $\mathbf{11}$ sur $\mathbf{12}$ est portée par l'axe $\vec{z}_{13}$. On applique le théorème du moment statique au point N en projection sur $\vec{x}_0$ à l'ensemble $\mathbf{S}$ supposé en équilibre dans le référentiel $\mathcal{R}_0$ supposé galiléen :

$$\begin{aligned} 0 &= \vec{M}_{N,11/12} \cdot \vec{x}_0 + \vec{M}_{N,10/13} \cdot \vec{x}_0 \\ \Leftrightarrow 0 &= \vec{NO} \wedge (Y_{11/12} \cdot \vec{y}_0 + Z_{11/12} \cdot \vec{z}_0) + 0 \\ \Leftrightarrow 0 &= [-n \vec{z}_{13} \wedge \vec{R}_{11/12}] \cdot \vec{x}_0 \\ \Rightarrow \vec{0} &= \vec{z}_{13} \wedge \vec{R}_{11/12} \end{aligned}$$

Donc les vecteurs $\vec{z}_{13}$ et $\vec{R}_{11/12}$ sont colinéaires. On en déduit alors que $\vec{R}_{11/12}$ est porté par $\vec{z}_{13}$.

Q7. En se servant de la **Q6** on montre facilement que $\vec{R}_{12 \rightarrow 11}$ est porté par $\vec{z}_{13}$. De même d'après la **Q5** $\vec{R}_{10 \rightarrow 11}$ est porté par $\vec{y}_{11}$. On isole alors le solide $\mathbf{11}$ et on applique le théorème de la résultante statique à $\mathbf{11}$ en équilibre dans $\mathcal{R}_0$ supposé galiléen :

$$\begin{aligned} \vec{0} &= \vec{R}_{roue \rightarrow 11} + \vec{R}_{12 \rightarrow 11} + \vec{R}_{10 \rightarrow 11} \\ \Leftrightarrow \vec{0} &= Y_{r \rightarrow 11} \vec{y}_0 + Z_{r \rightarrow 11} \vec{z}_0 + R_{12 \rightarrow 11} \vec{z}_{13} + R_{10 \rightarrow 11} \vec{y}_{11} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \text{selon } \vec{y}_0 : 0 = Y_{r \rightarrow 11} - R_{12 \rightarrow 11} \sin \theta_{13} + R_{10 \rightarrow 11} \cos \theta_{11} \\ \text{selon } \vec{z}_0 : 0 = Z_{r \rightarrow 11} + R_{12 \rightarrow 11} \cos \theta_{13} + R_{10 \rightarrow 11} \sin \theta_{11} \end{cases} \end{aligned}$$

On combine les deux équations pour éliminer la résultante $R_{10 \rightarrow 11}$ et l'on obtient l'équation :

$$\begin{aligned} 0 &= Z_{r \rightarrow 11} \cos \theta_{11} - Y_{r \rightarrow 11} \sin \theta_{11} + R_{12 \rightarrow 11} [\cos \theta_{13} \cos \theta_{11} + \sin \theta_{13} \sin \theta_{11}] \\ \Leftrightarrow R_{12 \rightarrow 11} &= \frac{1}{\cos(\theta_{13} - \theta_{11})} [Y_{r \rightarrow 11} \sin \theta_{11} - Z_{r \rightarrow 11} \cos \theta_{11}] \end{aligned}$$

Au point O, on a donc :

$$\{\mathcal{T}_{11 \rightarrow 12}\} = \begin{Bmatrix} - & 0 \\ R_{11 \rightarrow 12} \cos \theta_{13} & - \\ -R_{11 \rightarrow 12} \sin \theta_{13} & - \end{Bmatrix}_{O, \mathcal{B}_0} \quad \text{avec} \quad R_{11 \rightarrow 12} = \frac{Z_{r \rightarrow 11} \cos \theta_{11} - Y_{r \rightarrow 11} \sin \theta_{11}}{\cos(\theta_{13} - \theta_{11})}$$

Q8. On isole la pièce $\mathbf{12}$ et on fait le BAME :

$$\begin{aligned} \{\mathcal{T}_{11 \rightarrow 12}\} &= \begin{Bmatrix} - & 0 \\ 0 & - \\ R_{11/12} & - \end{Bmatrix}_{O, \mathcal{B}_{13}} & \{\mathcal{T}_{13 \rightarrow 12}\} &= \begin{Bmatrix} - & L_{13/12} \\ Y_{13/12} & - \\ 0 & - \end{Bmatrix}_{O, \mathcal{B}_{13}} \\ \{\mathcal{T}_{14 \rightarrow 12}\} &= \begin{Bmatrix} - & 0 \\ 0 & - \\ Z_{14/12} & - \end{Bmatrix}_{M, \mathcal{B}_{13}} & \{\mathcal{T}_{ress \rightarrow 12}\} &= \begin{Bmatrix} - & 0 \\ 0 & - \\ -F_{ress/12} & - \end{Bmatrix}_{O, \mathcal{B}_{13}} \end{aligned}$$

On applique le théorème de la résultante statique à la pièce $\mathbf{12}$ en équilibre dans le référentiel $\mathcal{R}_0$ supposé galiléen en projection sur z_{13} :

$$\begin{aligned} 0 &= R_{11/12} + 0 + Z_{14/12} - F_{ress/12} \\ \Rightarrow Z_{14/12} &= F_{ress/12} - R_{11/12} \end{aligned}$$

Q9. On applique alors le théorème de la résultante statique à la pièce $\mathbf{14}$ en équilibre dans $\mathcal{R}_0$ galiléen en projection sur l'axe $\vec{z}_{13}$:

$$\begin{aligned} 0 &= Z_{12/14} + Z_{13/14} \Rightarrow Z_{14/13} = R_{11/12} - F_{ress/12} \\ \Rightarrow Z_{14/13} &= \frac{Z_{r \rightarrow 11} \cos \theta_{11} - Y_{r \rightarrow 11} \sin \theta_{11}}{\cos(\theta_{13} - \theta_{11})} - F_{ress/12} \end{aligned}$$

Q10. On isole **14** en équilibre dans $\mathcal{R}_0$ galiléen et on applique le théorème de la résultante statique selon l'axe $\vec{y}_{13} : 0 = 0 + Y_{13/14}$ donc on a $Y_{13/14} = 0$.

Les liaisons en J'_1 et J'_2 sont des liaisons ponctuelles avec frottement, de normale $\vec{x}_{13}$. On se considère à la limite du glissement, et on a $Y_{13/14} = 0$. Comme on possède deux contacts J'_1 et J'_2 , l'action à transmettre sur 1 seul contact est : $\frac{Z_{14 \rightarrow Cy}}{2}$. L'action tangentielle due aux frottements est donc portée selon l'axe $\vec{z}_{13}$ du plan tangent. On en déduit donc pour le contact en J'_1 par exemple :

$$f|X_{14 \rightarrow Cy}| = \left| \frac{Z_{14 \rightarrow Cy}}{2} \right|$$

Ainsi, on obtient les torseurs suivants :

$$\{\mathcal{T}_{Cy \rightarrow 14}^{J'_1}\} = \left\{ \begin{array}{cc} \frac{Z_{14 \rightarrow Cy}}{2f} & 0 \\ 0 & 0 \\ -\frac{Z_{14 \rightarrow Cy}}{2} & 0 \end{array} \right\}_{J'_1, B_{13}} \quad \{\mathcal{T}_{Cy \rightarrow 14}^{J'_2}\} = \left\{ \begin{array}{cc} \frac{Z_{14 \rightarrow Cy}}{2f} & 0 \\ 0 & 0 \\ -\frac{Z_{14 \rightarrow Cy}}{2} & 0 \end{array} \right\}_{J'_2, B_{13}}$$

Q11. On isole **B** en équilibre dans $\mathcal{R}_0$ galiléen et on applique le théorème du moment statique en B_2 , projeté sur $\vec{z}_{13}$:

$$\begin{aligned} \vec{M}_{B_2, Cy \rightarrow B} \cdot \vec{z}_{13} + \underbrace{\vec{M}_{B_2, 13 \rightarrow B} \cdot \vec{z}_{13}}_{=0} + \vec{M}_{B_2, P \rightarrow B} \cdot \vec{z}_{13} &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{B_2 J_1} \wedge \vec{R}_{Cy \rightarrow B} \right) \cdot \vec{z}_{13} + \left(\overrightarrow{B_2 B_1} \wedge \vec{R}_{P \rightarrow B} \right) \cdot \vec{z}_{13} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{l_b}{2} \frac{Z_{14 \rightarrow Cy}}{2f} - l_b \vec{R}_{P \rightarrow B} \cdot \vec{x}_{13} &= 0 \\ \Rightarrow \vec{R}_{P \rightarrow B} \cdot \vec{x}_{13} &= \frac{Z_{14 \rightarrow Cy}}{4f} \end{aligned}$$

On isole **P** en équilibre dans $\mathcal{R}_0$ galiléen et on applique le théorème de la résultante statique selon $\vec{x}_{13}$

$$\begin{aligned} R_{P_2 \rightarrow P} + R_{P_{atm} \rightarrow P} + R_{B \rightarrow P} \cdot \vec{x}_{13} &= 0 \\ \Leftrightarrow P_2 \cdot \pi(\phi_c^2 - \phi_p^2) - P_{atm} \pi \phi_c^2 - \frac{Z_{14 \rightarrow Cy}}{4f} &= 0 \\ \Leftrightarrow P_2 = P_{atm} \frac{\phi_c^2}{\phi_c^2 - \phi_p^2} + \frac{Z_{14 \rightarrow Cy}}{4f \pi(\phi_c^2 - \phi_p^2)} \end{aligned}$$

Application numérique : $P_2 \simeq 60 \text{ bar}$

Q12. On isole la pièce **4** en équilibre dans $\mathcal{R}_0$ galiléen et on applique le théorème de la résultante statique projeté sur l'axe $\vec{y}_0$:

$$\begin{aligned} \underbrace{\vec{R}_{0 \rightarrow 4} \cdot \vec{y}_0}_{=0} + \vec{R}_{3 \rightarrow 4} \cdot \vec{y}_0 + \vec{R}_{pres \rightarrow 4} \cdot \vec{y}_0 &= 0 \\ \Leftrightarrow Y_{34} \cos \theta_{30} + \vec{R}_{pres \rightarrow 4} \cdot \vec{y}_0 &= 0 \end{aligned}$$

On isole la pièce **2** en équilibre dans $\mathcal{R}_0$ galiléen et on applique le théorème du moment statique en B projeté sur l'axe $\vec{z}_0$:

$$\begin{aligned} \underbrace{\vec{M}_{B, 1 \rightarrow 2} \cdot \vec{z}_0}_{=0} + \underbrace{\vec{M}_{B, ress \rightarrow 2} \cdot \vec{z}_0}_{C_{ress \rightarrow 2}} + \vec{M}_{B, 3 \rightarrow 2} \cdot \vec{z}_0 &= 0 \\ \Leftrightarrow C_{ress \rightarrow 2} + r_2 Y_{32} \vec{y}_2 \cdot \vec{y}_3 &= 0 \end{aligned}$$

On isole alors **3** en équilibre dans $\mathcal{R}_0$ galiléen et on applique le théorème de la résultante statique selon $\vec{y}_3$:

$$\vec{R}_{2 \rightarrow 3} = Y_{23} \vec{y}_3 = -Y_{43} \vec{y}_3$$

On en déduit alors :

$$C_{ress \rightarrow 2} = r_2 \frac{\cos \theta_{32}}{\cos \theta_{30}} P_2 \pi \frac{\phi_{mc}^2}{4}$$

Application numérique : $C_{ress \rightarrow 2} = 126 Nm$.

Q13. On a F légèrement supérieur à 200N pour $\theta_{10} = 12^\circ$, donc $\theta_{10,Max} = 12^\circ$. Ainsi :

$$K_{res} = \frac{C_{ress \rightarrow 2}}{\theta_{10,Max} - \Delta \theta_{20,Max}}$$

Application numérique : $K_{res} = 21 Nm/deg$

Exercice : Suspension de voiture

Objectif :

L'objectif de cette étude est l'analyse des sollicitations dans le train avant d'un véhicule lors d'une phase de freinage en virage.

Notations :

Le torseur d'action de la pièce i sur la pièce j au point A , dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, sera noté de la manière suivante :

$$\{i \rightarrow j\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_{i \rightarrow j} = X_{ij}\vec{x} + Y_{ij}\vec{y} + Z_{ij}\vec{z} \\ \vec{M}_{/A \ i \rightarrow j} = L_{ij}\vec{x} + M_{ij}\vec{y} + N_{ij}\vec{z} \end{array} \right\}_A$$



Modélisation, hypothèses

- La cinématique du train avant est définie schématiquement par les figures 1 et 2 des annexes a et b. Le mécanisme comporte les pièces suivantes :
 - le châssis du véhicule, repéré **(0)** ;
 - le triangle supérieur **(1)** ;
 - la fusée **(2)** assurant le guidage de la roue au moyen d'une liaison pivot sur roulements. **Dans l'étude proposée, les freins sont considérés bloqués, c'est-à-dire que la liaison pivot entre la roue et la fusée (2) est bloquée** (= encastrement : même sous-ensemble cinématique (2)) ;
 - le levier de suspension **(3)** ;
 - le bras de suspension **(4)**.

- Un combiné ressort-amortisseur (**r**), visible sur l'illustration 3D mais non représenté sur les schémas des figures (1) et (2), assure la suspension du véhicule et l'amortissement de ses oscillations. Son action est

inconnue, modélisée par le glisseur suivant : $\{r \rightarrow 3\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_{r \rightarrow 3} = -F_r \vec{z} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_P$

- Le pivotement de l'ensemble {fusée, roue} pour assurer la fonction de direction est réalisé par une biellette de direction (**d**), visible sur l'illustration 3D mais non représentée sur les schémas des figures (1) et (2).

Son action est **inconnue**, modélisée par le glisseur suivant : $\{d \rightarrow 2\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_{d \rightarrow 2} = F_d \vec{x} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_T$

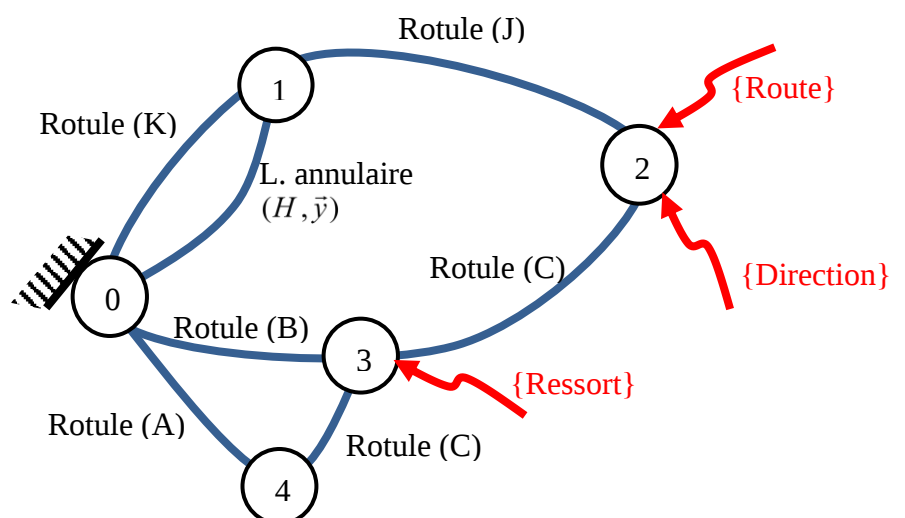
- Les actions du sol sur la roue (2) sont **connues**, modélisées par le glisseur suivant :

$$\{Sol \rightarrow 2\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_{sol \rightarrow 2} = F_{Ix}\vec{x} + F_{Iy}\vec{y} + F_{Iz}\vec{z} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_I$$

- Le paramétrage géométrique et la modélisation des efforts extérieurs sont très simplifiés pour permettre une étude « à la main ». Cependant, les conclusions gardent un caractère général.

La phase étudiée suppose qu'il n'existe aucun mouvement, ni du train avant (suspension), ni de la direction.

Le graphe de structure où sont modélisées les actions mécaniques extérieures est donné ci-contre :



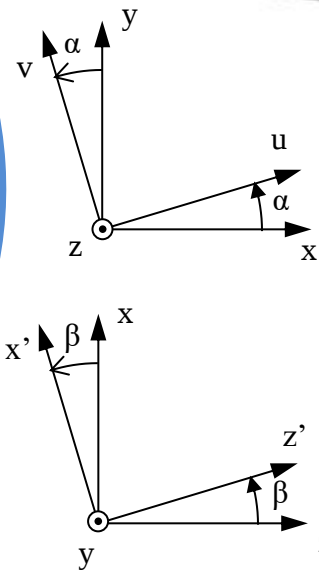
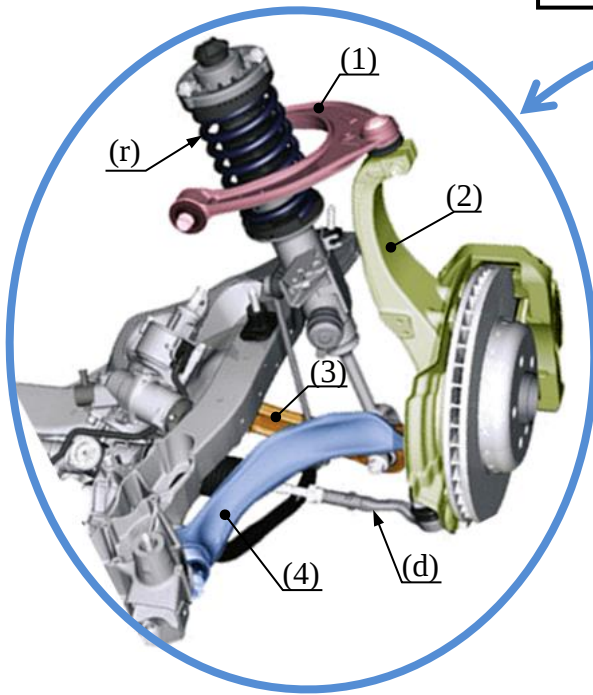
Étude statique

L'objectif de cette partie est double :

- déterminer les actions dans les liaisons du train avant, autres que les liaisons avec le châssis (**0**) ;
- déterminer les actions du combiné ressort amortisseur (**r**), et de la bielle de direction (**d**).

- Q1 - Isoler le bras de suspension (4), et en déduire l'équation utile à la réalisation de l'objectif fixé en introduction de l'étude statique.**
- Q2 - Isoler le levier de suspension (3), et en déduire les deux équations utiles à la réalisation de l'objectif fixé en introduction de l'étude statique.**
- Q3 - Isoler le triangle (1), et en déduire l'équation utile à la réalisation de l'objectif fixé en introduction de l'étude statique.**
- Q4 - Isoler et étudier statiquement l'ensemble fusée-roue (2). Déterminer, en privilégiant dans les calculs le point C, toutes les inconnues des liaisons relatives à cette pièce, ainsi que l'action de la biellette de direction (**d**) en fonction de F_{Ix} , F_{Iy} , F_{Iz} et des données géométriques. En déduire également l'action du combiné ressort-amortisseur (F_r).**
- Q5 - À partir d'une analyse géométrique du train avant, commenter le résultat de l'effort de la biellette de direction (**d**) sur la fusée (2). Commenter l'intérêt pratique de ce résultat et estimer les causes d'écarts possibles par rapport à la réalité.**

ANNEXE a



$$\begin{aligned}\overline{AC} &= L_4 \vec{u} \\ \overline{BC} &= L_3 \vec{x} \\ \overline{BP} &= d_3 \vec{x} \\ \overline{SJ} &= L_1 \vec{x} \\ \overline{HJ} &= a_1 \vec{u} \\ \overline{HK} &= b_1 \vec{y} \\ \overline{CJ} &= L_2 \vec{z}' \\ \overline{TC} &= d_2 \vec{y} \\ (\vec{x}, \vec{u}) &= (\vec{y}, \vec{v}) = \alpha \\ (\vec{z}, \vec{z}') &= (\vec{x}, \vec{x}') = \beta \\ \text{Rayon de la roue : } R\end{aligned}$$

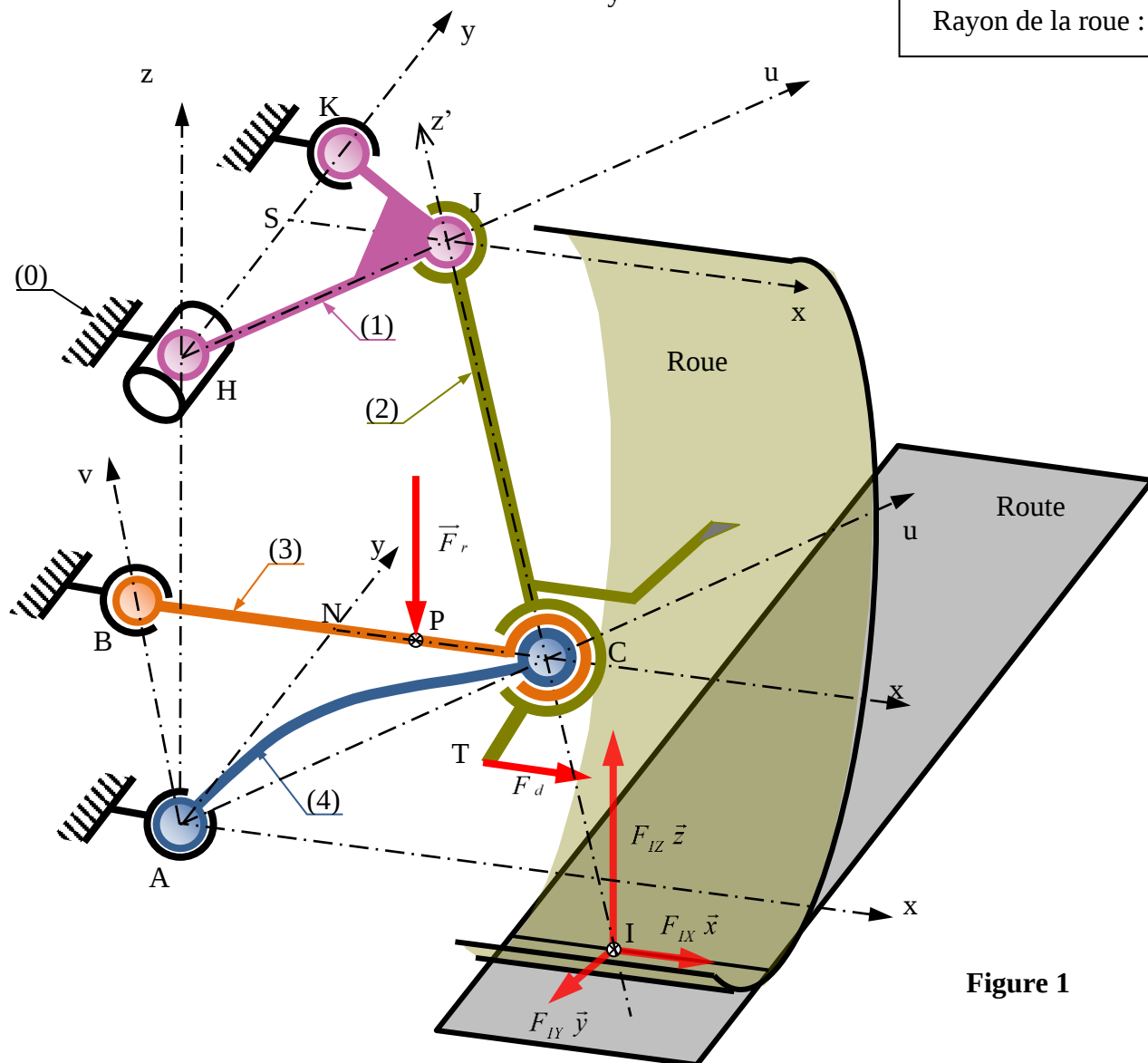


Figure 1

ANNEXE b

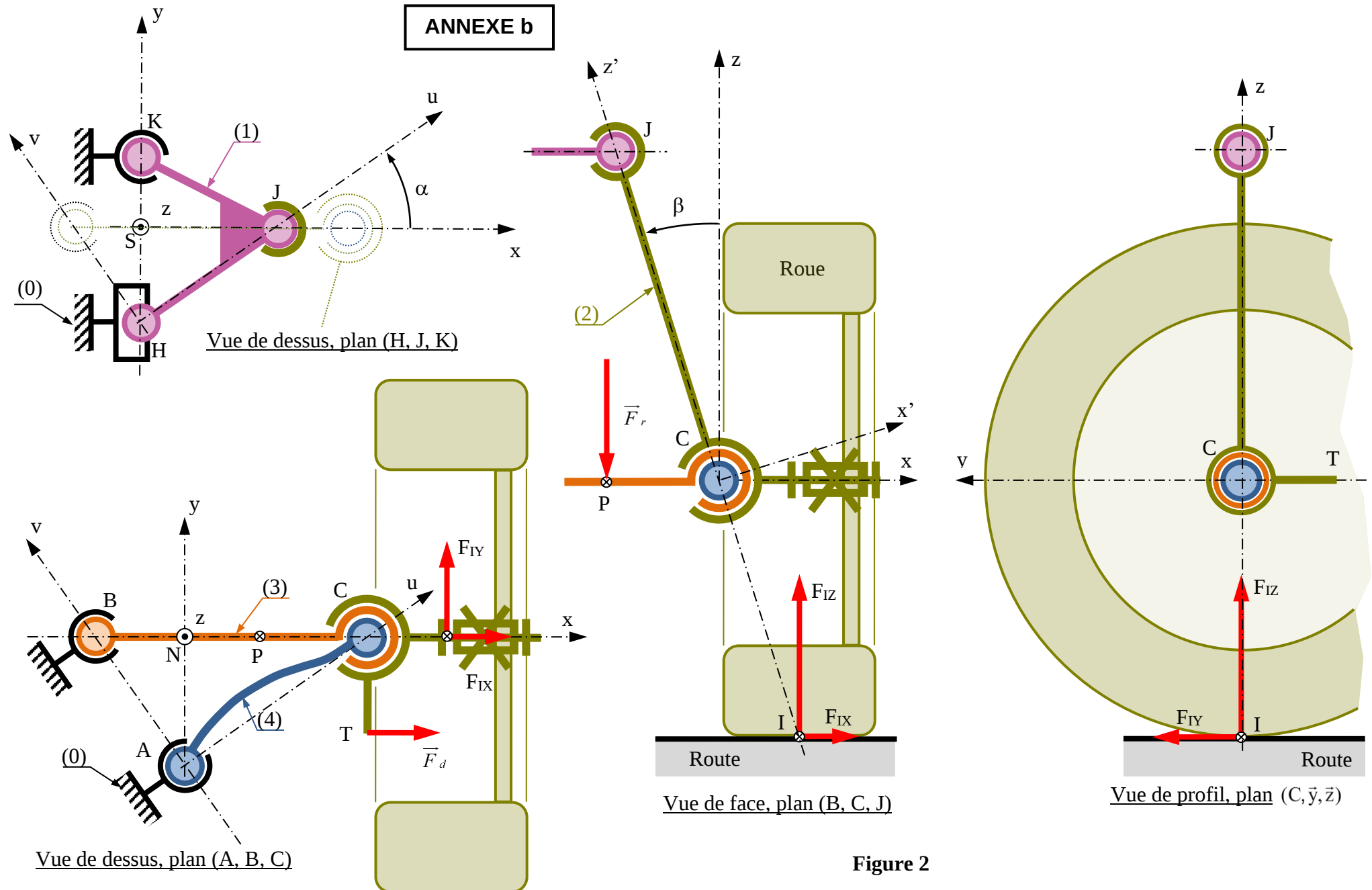


Figure 2

Corrigé

- Q1-** Le bras de suspension (4) est en **équilibre sous deux actions de types glisseurs** : rotules en A avec (0) et en C avec (3). Ces glisseurs sont directement opposés, portés par la droite (A, C) :

$$\begin{cases} \vec{F}_{A04} = F_{A04} \vec{u} \\ \vec{F}_{C34} = F_{C34} \vec{u} \end{cases}$$

Équation de la résultante en projection sur $\vec{u}$:

$$F_{A04} + F_{C34} = 0$$

- Q2-** Le levier de suspension (3) est en équilibre sous quatre actions de types glisseurs (BAME) :

- rotule en B avec (0),
- rotule en C avec (4),
- rotule en C avec (2), et
- action du ressort.

Si on considère la somme des deux actions dans les rotules en C, l'équilibre est réalisé sous l'effet de 3 actions modélisées par des glisseurs.

Ils sont donc coplanaires et concourants ; puisque l'action du ressort est supposée verticale, les trois efforts sont donc dans le plan vertical $(B, \vec{z}, \vec{x})$ contenant les points B, C et P :

$$\text{Notations : } \begin{cases} \vec{F}_{B03} = X_{03} \vec{x} + Z_{03} \vec{z} \\ \vec{F}_{C23} = X_{23} \vec{x} + Y_{23} \vec{y} + Z_{23} \vec{z} \\ \vec{F}_{C43} = -F_{C34} \vec{u} \\ \vec{F}_r = -F_r \vec{z} \end{cases}$$

Équation du moment en B, en projection sur $\vec{y}$: $(\vec{BC} \wedge \vec{F}_{C23} + \vec{BC} \wedge \vec{F}_{C43} + \vec{BP} \wedge \vec{F}_r) \cdot \vec{y} = 0$

$$(L_3 \vec{x} \wedge [X_{23} \vec{x} + Y_{23} \vec{y} + Z_{23} \vec{z}] + L_3 \vec{x} \wedge -F_{C34} \vec{u} + d_3 \vec{x} \wedge -F_r \vec{z}) \cdot \vec{y} = 0 \rightarrow \boxed{-Z_{23} L_3 + F_r d_3 = 0} \quad (1)$$

Équation du moment en B, en projection sur $\vec{z}$: $(\vec{BC} \wedge \vec{F}_{C23} + \vec{BC} \wedge \vec{F}_{C43} + \vec{BP} \wedge \vec{F}_r) \cdot \vec{z} = 0$

$$(L_3 \vec{x} \wedge [X_{23} \vec{x} + Y_{23} \vec{y} + Z_{23} \vec{z}] + L_3 \vec{x} \wedge -F_{C34} \vec{u} + d_3 \vec{x} \wedge -F_r \vec{z}) \cdot \vec{z} = 0 \rightarrow \boxed{(Y_{23} - F_{C34} \sin \alpha) L_3 = 0} \quad (2)$$

- Q3-** On isole (1). L'action dans la rotule en J avec (2) est modélisée par un glisseur : $\vec{F}_{J21} = X_{21} \vec{x} + Y_{21} \vec{y} + Z_{21} \vec{z}$

Le système est donc en équilibre sous l'action de 3 glisseurs en H, K et J qui sont donc coplanaires (plan $(\vec{x}, \vec{y})$) et concourants. $\rightarrow \boxed{Z_{21} = 0} \quad (4)$

- Q4-** La fusée (2) est soumise à quatre actions (BAME) : $(3 \rightarrow 2)_C$, $(1 \rightarrow 2)_I$, $(d \rightarrow 2)_T$ et $(\text{Sol} \rightarrow 2)_I$

$$\begin{cases} -X_{23} - X_{21} + F_d + F_{IX} = 0 & (5) \\ -Y_{23} - Y_{21} + F_{IY} = 0 & (6) \\ -Z_{23} + F_{IZ} = 0 & (7) \end{cases}$$

Équations du moment en C, en projection sur $\vec{x}'$, $\vec{y}$ et $\vec{z}'$:

$$\vec{0} + \vec{CJ} \wedge \vec{F}_{J21} + \vec{CT} \wedge \vec{F}_d + \vec{CI} \wedge \vec{F}_I = \vec{0}$$

$$L_2 \vec{z}' \wedge (X_{21} \vec{x} + Y_{21} \vec{y}) - d_2 \vec{y} \wedge F_d \vec{x} - \frac{R}{\cos \beta} \vec{z}' \wedge (F_{IX} \vec{x} + F_{IY} \vec{y} + F_{IZ} \vec{z}) = \vec{0}$$

$$L_2 (X_{21} \cos \beta \vec{y} + Y_{21} \vec{x}') + d_2 F_d (-\sin \beta \vec{x}' + \cos \beta \vec{z}') - \frac{R}{\cos \beta} (F_{IX} \cos \beta \vec{y} + F_{IY} \vec{x}' - F_{IZ} \sin \beta \vec{y}) = \vec{0}$$

$$\begin{cases} L_2 Y_{21} - d_2 \sin \beta F_d - \frac{R}{\cos \beta} F_{IY} = 0 & (8) \\ L_2 X_{21} \cos \beta - R(F_{IX} - F_{IZ} \tan \beta) = 0 & (9) \\ d_2 \cos \beta F_d = 0 & (10) \end{cases}$$

Résultats :

$$\begin{cases} F_d = 0 & Z_{21} = 0 \\ Y_{21} = \frac{R}{L_2 \cos \beta} F_{IY} \\ X_{21} = \frac{R}{L_2 \cos \beta} (F_{IX} - F_{IZ} \tan \beta) \\ X_{23} = -\frac{R}{L_2 \cos \beta} (F_{IX} - F_{IZ} \tan \beta) + F_{IX} \\ Y_{23} = -\frac{R}{L_2 \cos \beta} F_{IY} + F_{IY} \\ Z_{23} = F_{IZ} \quad \text{et} \quad F_r = F_{IZ} \frac{L_3}{d_3} \end{cases}$$

Q5- L'équation (10) correspond au moment en C, en projection sur $\vec{z}'$:

$$F_d \cdot d_2 = 0$$

L'action de la biellette de direction est nulle... L'effort à exercer au niveau du volant est donc théoriquement nul. Cette propriété est due au fait que le « point de contact » de la roue sur la route se trouve sur l'axe de pivotement de la roue, matérialisé par la ligne des centres des deux rotules en C et J.

Dans la réalité, même en admettant que l'action de la route sur la roue est un glisseur, il ne s'applique pas au point I situé sur la droite (B, C). Il existe un déport de cet effort, qui se traduira par un effort F_d non nul.

Cet effort est généralement souhaitable pour améliorer la stabilité du véhicule en ligne droite.

Il existe également des composantes de moment dans l'action du sol sur la roue, du fait de l'étendue (surface) non négligeable du contact (environ 200 à 300 cm² selon le poids du véhicule). Ces composantes constituent la résistance au pivotement et la résistance au roulement.