MPSI

Programme de colle - semaine 29 du 02/06/2025 au 08/06/2025 (avant-dernière)

1 Variables aléatoires réelles

- En MPSI, toutes les VA ne prennent qu'un nombre fini de valeurs.
- Loi de probabilité d'une VA. La fonction de répartition n'est pas au programme.
- Espérance. La définition que nous avons prise est $\mathbf{E}(X) = \sum\limits_{\omega\in\Omega} \mathbf{P}(\{\omega\})X(\omega)$ (formule jamais utilisée en pratique mais a l'avantage de rendre évidente la linéarité).
  Formule de transfert : $\mathbf{E}(f(X)) = \sum\limits_{x\in X(\Omega)} f(x)\mathbf{P}(X = x)$, en particulier $\mathbf{E}(X) = \sum\limits_{x\in X(\Omega)} x\mathbf{P}(X = x)$.
- Variance, écart-type. Cas où $\mathbf{V}(X) = 0$.
  Formule de Huygens : $\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}(X^2) - \big(\mathbf{E}(X)\big)^2$.
  Variance de aX, de $X + b$.
  Les inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev n'ont pas été vues (seront vues avec les couples de VA).
- Loi uniforme sur E (partie finie non vide de $\mathbb{R}$), sur $[\![1, n]\!]$ ou sur $[\![a, b]\!]$. Espérance.
- Loi de Bernoulli. Espérance, variance.
- Loi binomiale. Situation type : loi du nombre de succès après n tentatives indépendantes et dans des conditions similaires. Expression de la loi (brève explication), espérance, variance.

2 Exercices

Ne pas passer trop de temps sur les exercices déjà faits, donner à tout le monde un nouvel exercice de recherche de loi simple.

1. **CCINP exo 95**
   Une urne contient deux boules blanches et huit boules noires.
   a) Un joueur tire successivement, avec remise, cinq boules dans cette urne.
      Pour chaque boule blanche tirée, il gagne 2 points et pour chaque boule noire tirée, il perd 3 points.
      On note X la variable aléatoire représentant le nombre de boules blanches tirées.
      On note Y le nombre de points obtenus par le joueur sur une partie.
      i) Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.
      ii) Déterminer la loi de Y, son espérance et sa variance.
   b) Dans cette question, on suppose que les cinq tirages successifs se font sans remise.
      i) Déterminer la loi de X.
      ii) Déterminer la loi de Y.

2. **CCINP exo 109**
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient n boules blanches numérotées de 1 à n et deux boules noires numérotées 1 et 2.
   On effectue le tirage une à une, sans remise, de toutes les boules de l'urne.
   On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule blanche.
   On note Y la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule numérotée 1.
   a) Déterminer la loi de X.
   b) Déterminer la loi de Y.

3. **CCINP exo 104**

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.

On dispose de n boules numérotées de 1 à n et d'une boîte formée de trois compartiments identiques également numérotés de 1 à 3.

On lance simultanément les n boules.

Elles viennent toutes se ranger aléatoirement dans les 3 compartiments.

Chaque compartiment peut éventuellement contenir les n boules.

On note X la variable aléatoire qui à chaque expérience aléatoire fait correspondre le nombre de compartiments restés vides.

a) Préciser les valeurs prises par X.

b) i) Déterminer la probabilité $\mathbf{P}(X = 2)$.

ii) Finir de déterminer la loi de probabilité de X.

c) i) Calculer $\mathbf{E}(X)$.

ii) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbf{E}(X)$. Interpréter ce résultat.