

DS N°6

Aucun document autorisé

Calculatrices autorisées

Le devoir comporte 1 problème

Durée 4 heures

Quille Pendulaire (extrait de Mines ponts MP 2014)

1 Mise en situation

1.1 Contexte

La conception des voiliers de course, dans un contexte de forte compétitivité sportive et technique, utilise toutes les évolutions récentes afin d'améliorer performances et sécurité. Dès les premiers stades de la conception du navire, l'architecte naval intègre les exigences des différents spécialistes qui collaborent au projet. À ce titre, la conception d'un voilier de course océanique est analogue à la conduite d'un projet industriel classique où les intervenants s'inscrivent dans une démarche collaborative pilotée par un coordonnateur de projet.

1.2 Fonction de la quille dans la dynamique des voiliers

Le comportement dynamique d'un voilier est conditionné par ses interactions avec les deux fluides avec lesquels il entre en contact : l'air et l'eau. Il reçoit de l'énergie sous la forme des actions aérodynamiques dues au mouvement relatif air/voiles. Ces actions mécaniques le font avancer et provoquent son inclinaison autour de son axe longitudinal (axe de direction $\vec{z}_N$ sur la figure 1). C'est le phénomène de gîte. Pour contrebalancer ce mouvement et éviter que le voilier ne se couche sur l'eau, la quille joue le rôle de contre-poids. Cette quille est généralement constituée d'un voile immergé dans l'eau à l'extrémité duquel se trouve un lest profilé. L'efficacité de la quille dépend de la masse du lest et de la longueur du voile.

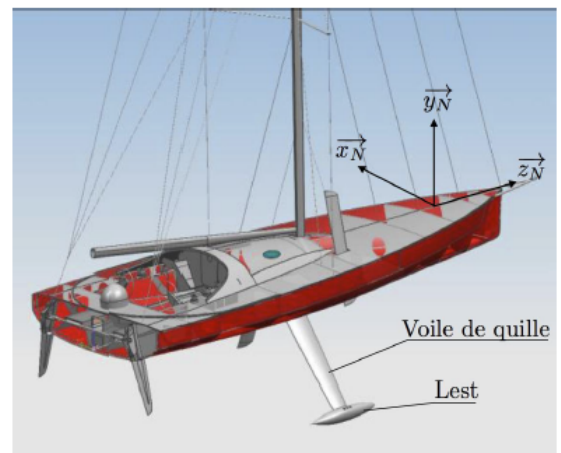


FIGURE 1 – Voilier 60' IMOCA

Ces deux paramètres présentent des limitations : le lest ne peut être trop important sous peine de solliciter dangereusement la quille et la longueur de quille est limitée par le tirant d'eau maximal admissible (il faut permettre l'entrée dans les ports sans toucher le fond!).

2 Mise en évidence de l'intérêt d'une pendulation

2.1 Étude de la stabilité « de formes » d'un voilier doté d'une quille non pendulaire (voir figure 2)

On considère le navire à l'arrêt et en équilibre sur un plan d'eau au repos (figure 2, à gauche). Il est soumis :

- aux effets de pesanteur, représentés par le torseur $\{\mathcal{T}_{pes \rightarrow nav}\} = \left\{ \begin{matrix} -Mg\vec{y} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_G$ où G désigne le centre de gravité du navire, M sa masse, g l'accélération de pesanteur et $\vec{y}$ oriente la verticale ascendante du lieu ;

- aux actions de l'eau sur la coque ou « Poussée d'Archimède » représentées par le torseur

$$\{\mathcal{T}_{eau \rightarrow nav}\} = \left\{ \begin{matrix} R_D\vec{y} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_C \quad \text{où } C \text{ désigne le centre de carène et } R_D, \text{ exprimée en Newton, l'intensité de la résultante des actions de l'eau sur la coque, que l'on nomme « déplacement » en construction navale. À l'équilibre : } R_D = Mg.$$

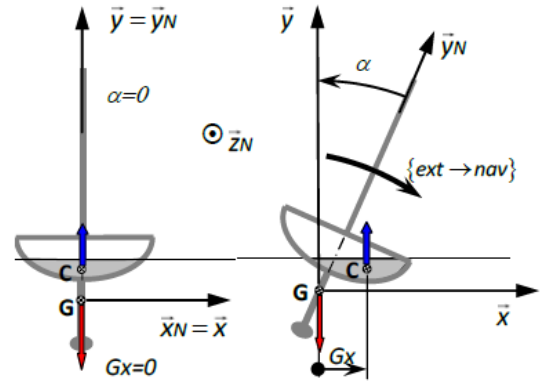


FIGURE 2 – Coque en équilibre (à gauche) et sous gîte (à droite)

Une cause extérieure représentée par le torseur $\{\mathcal{T}_{ext \rightarrow nav}\}$, comme l'effet du vent sur les voiles ou des vagues sur la coque, provoque la gîte du navire caractérisée par l'angle de gîte α (figure 2, à droite). Un nouvel équilibre est alors obtenu sous l'effet des deux actions mécaniques précédentes, le poids et la poussée d'Archimède, ainsi que l'action mécanique extérieure cause de gîte. L'équation de moment en G selon $\vec{z}$ se traduit par : $\vec{M}_{G,ext \rightarrow nav} \cdot \vec{z} + R_D \cdot Gx = 0$ où Gx désigne la longueur mesurée algébriquement selon $\vec{x}$ entre le centre de gravité et le centre de carène. La quantité $R_D \cdot Gx$ est appelée :

- *moment de redressement* si $R_D \cdot Gx > 0$ et $\alpha > 0$ ou $R_D \cdot Gx < 0$ et $\alpha < 0$;
- *moment de chavirage* si $R_D \cdot Gx < 0$ et $\alpha > 0$ ou $R_D \cdot Gx > 0$ et $\alpha < 0$.



FIGURE 3 – Modèle numérique d'une coque de 60' IMOCA

Dans son avant-projet, l'architecte naval étudie cette stabilité du navire à l'aide d'outils de simulation numérique. À partir du modèle numérique des formes de la coque (exemple figure 3) et d'une répartition des masses aussi proche que possible de la répartition finale, les différentes positions d'équilibre du navire sont recherchées en fonction de l'angle de gîte. Cette étude fournit une courbe de stabilité théorique où apparaît en abscisse l'angle de gîte α et en ordonnée le paramètre G_x (voir courbe de la figure R1 sur le document réponses ou la figure 4).

Q1. La figure R1 du document réponses donne la courbe de stabilité théorique d'un voilier à quille non pendulaire (quille fixe par rapport à la coque).

- Expliquer pourquoi G_x suffit à caractériser le moment de redressement ou de chavirage.
- Pour chacune des six positions (numérotées de 1 à 6) de la figure R2 du document réponses, associer le point d'équilibre A, B, C, D, E ou F repéré sur la courbe de la figure R1. Par exemple, le point A correspond à la position 4; on a donc inscrit la lettre A dans la case 4.

La figure 4 représente l'évolution, pour un navire 60' IMOCA à quille fixe, de G_x en fonction de l'angle de gîte α , pour α variant de 0 à 180°. Sur cette courbe, les quantités $S_{01} = \int_0^{\alpha_1} G_x(\alpha) d\alpha$ et $S_{12} = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} G_x(\alpha) d\alpha$ sont représentées par les « aires » comprises entre la courbe et l'axe des abscisses. On montre que $S_{ij} = \int_{\alpha_i}^{\alpha_j} G_x(\alpha) d\alpha$, lorsque l'angle de gîte passe de la valeur α_i à la valeur α_j , est proportionnel au travail des actions de pesanteur développées par le mouvement du navire.

La réglementation impose à l'architecte naval de créer des formes de coque pour lesquelles :

- l'angle de gîte provoquant la mise en situation de chavirage du voilier (changement de signe de G_x) soit au minimum de 120° (point D de la figure R1) ;
- le rapport des « aires » soit tel que $\frac{S_{01}}{S_{12}} = 5$. Le travail du poids est ainsi cinq fois plus grand dans la zone de redressement que dans la zone de chavirage : le bateau est cinq fois plus difficile à faire chavirer qu'à redresser.

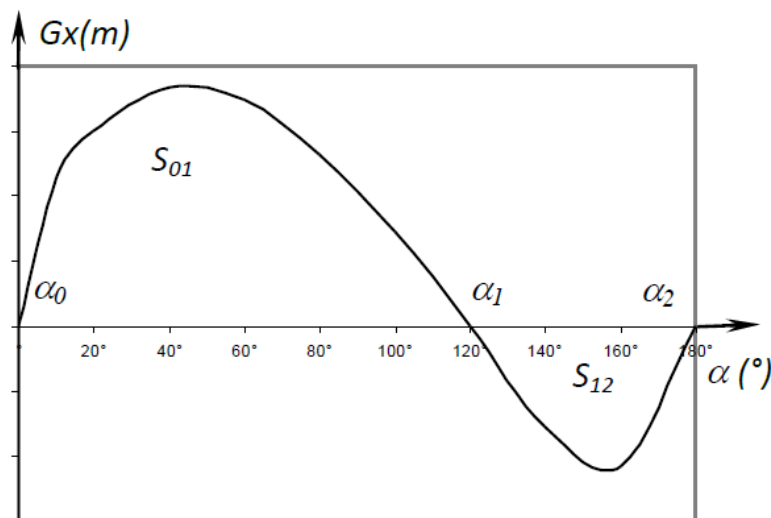


FIGURE 4 – Courbe de stabilité théorique : définition des « aires » S_{01} et S_{12}

2.2 Présentation du système

Une évolution récente des voiliers de course océanique a été de les doter d'une quille pendulaire (figures 5 et 6). Cette quille est en liaison pivot d'axe $(O, \vec{z}_N)$ avec la coque du navire et peut être orientée d'un côté ou de l'autre du navire. Une fois l'orientation désirée obtenue, tout mouvement dans la liaison pivot est supprimé par le blocage en rotation de celle-ci. La mise en mouvement et le blocage en position de la quille sont réalisés par une chaîne d'énergie étudiée dans la suite du sujet.



FIGURE 5 – Voilier avec sa quille pendulaire écartée au maximum sur « bâbord »

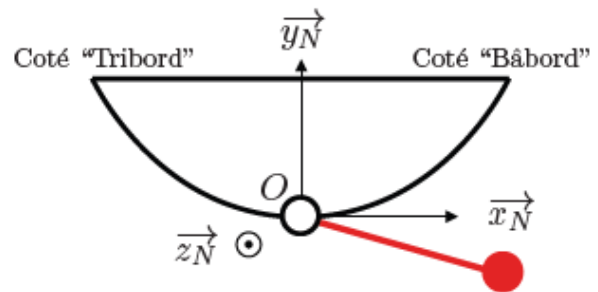


FIGURE 6 – Modèle cinématique élémentaire de la quille pendulaire

Q2. La figure R3 du document réponses donne les courbes de stabilité théorique d'un voilier dont la quille pendulaire est inclinée :

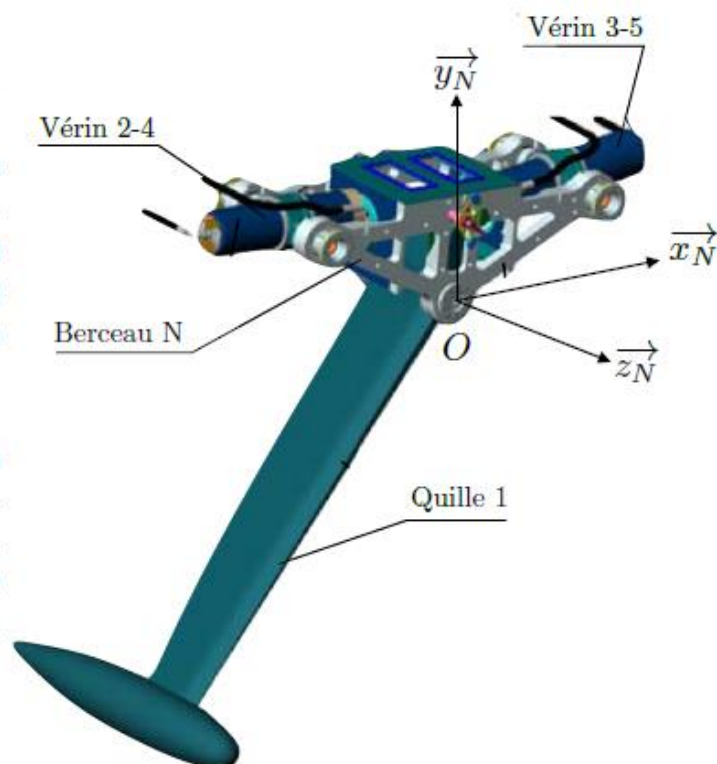
- au maximum sur « tribord » (à droite dans le sens de la marche) (courbe 1) ;
- d'un angle nul (courbe 2).

- a - Au vu de ces courbes, quels avantages procure la quille pendulaire au comportement du navire lorsqu'il gîte avec un angle α positif ?
- b - Pour un angle de gîte α négatif, quel est l'apport de la quille pendulaire ?
- c - Dans la situation de navigation où le vent vient de tribord et où la gîte ne doit pas être trop importante malgré la grande surface de voile déployée, quelle doit être la configuration de navigation à adopter ? Répondre par un dessin reproduisant la figure 6 et justifier le choix.

3 Éléments et fonctionnement

La quille pendulaire constitue un système dont l'exigence principale est « Orienter la quille ». Pour cela, elle utilise des vérins hydrauliques mettant en mouvement la quille via une chaîne de solides présentée figure ci-contre.

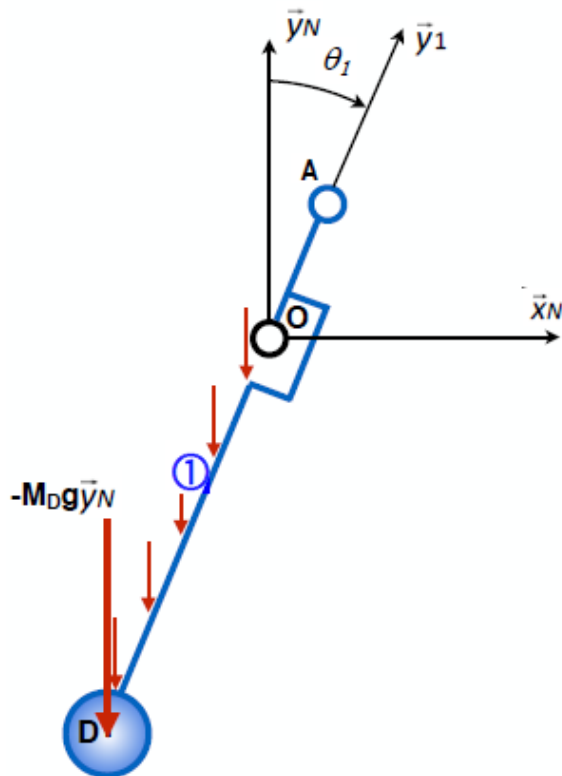
L'énergie hydraulique alimentant les vérins est créée par une centrale hydraulique et distribuée par des servo-valves. Des bloqueurs hydrauliques à pilotage électrique permettent de maintenir la position des vérins et donc de la quille.



4 Modélisation de l'action de la pesanteur sur la quille

Objectif

Modéliser l'action mécanique exercée par la pesanteur sur la quille afin de valider le modèle proposé dans la partie 5.1.



Dans cette partie, on ne s'intéresse qu'à la quille modélisable dans le plan $(\vec{x}_N, \vec{y}_N)$ par le schéma de la figure 7. On note $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ l'accélération de la pesanteur.

Hypothèses :

- L'action de la gravité sur la quille est modélisée par :
 - un glisseur en D , modélisant le poids exercé sur le lest de masse M_D ;
 - une densité linéique d'effort $\rho_l \cdot g$ (en N/m) s'exerçant sur le segment $[OD]$ de longueur ℓ_q , modélisant l'action de la pesanteur sur le voile de la quille. Entre les points O et A , la masse est négligeable.
- Le référentiel $\mathcal{R}_N = (O, \mathcal{B}_N)$ est supposé galiléen pour l'étude.
- La quille est immobile dans le référentiel $\mathcal{R}_N$.

FIGURE 7 – Répartition du poids sur la quille ($\theta_1 < 0$ ici)

Q3. Exprimer le torseur d'action mécanique en D de l'action du poids sur le lest noté $\{\mathcal{T}_{pes \rightarrow lest}\}$. Le transposer en O .

Q4. Soit M un point appartenant au segment $[OD]$ tel que $\overrightarrow{OM} = y\vec{y}_1$ (avec $y < 0$). Exprimer la résultante élémentaire, notée $d\vec{R}_{pes \rightarrow voile}(M)$, de l'action de la pesanteur sur un élément dy du segment $[OD]$ centré sur M . En déduire l'expression du moment élémentaire calculé en O , noté $d\vec{M}_{O, pes \rightarrow voile}(M)$, de l'action de la pesanteur sur un élément dy du segment $[OD]$ centré sur M .

Q5. Exprimer alors le torseur d'action mécanique en O de l'action de la pesanteur sur le segment $[OD]$ de la quille, noté $\{\mathcal{T}_{pes \rightarrow voile}\}$.

Q6. En déduire le torseur modélisant l'action mécanique de la pesanteur sur l'ensemble de la quille (voile et lest), noté $\{\mathcal{T}_{pes \rightarrow quille}\}$, exprimé en O .

Q7. Montrer que le torseur $\{\mathcal{T}_{pes \rightarrow quille}\}$ peut se mettre sous la forme d'un torseur glisseur au centre de poussée P de l'action de la pesanteur sur la quille tel que $\overrightarrow{OP} = y_p \vec{y}_1$. On précisera l'expression de y_p .

5 Validation des vérins

Objectif

Valider le choix des vérins retenus par le constructeur pour la quille pendulaire : course c de 2 m, diamètre D du piston de 182 mm.

La chaîne d'énergie permettant la mise en position de la quille est représentée et modélisée sur la figure 8. Cette chaîne est composée :

- du berceau N encastré sur la coque du navire et dont le repère associé est $\mathcal{R}_N : (O; \vec{x}_N, \vec{y}_N, \vec{z}_N)$;
- de la quille 1 constituée du voile et du lest d'extrémité et dont le repère associé est $\mathcal{R}_1 : (O; \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ tel que $\theta_1 = (\vec{x}_N, \vec{x}_1) = (\vec{y}_N, \vec{y}_1)$;
- du vérin 2-4 constitué du piston 2 et du cylindre 4 et dont les repères associés sont respectivement $\mathcal{R}_2 : (A_2; \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ et $\mathcal{R}_4 : (C; \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ (la rotation relative 2-4 ne sera pas prise en compte dans l'étude et donc les bases de $\mathcal{R}_2$ et $\mathcal{R}_4$ seront confondues) avec $\theta_2 = (\vec{x}_N, \vec{x}_2) = (\vec{y}_N, \vec{y}_2)$;
- du vérin 3-5 constitué du piston 3 et du cylindre 5 et dont les repères associés sont respectivement $\mathcal{R}_3 : (A_3; \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ et $\mathcal{R}_5 : (B; \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ (la rotation relative 3-5 ne sera pas prise en compte dans l'étude et donc les bases de $\mathcal{R}_3$ et $\mathcal{R}_5$ seront confondues) avec $\theta_3 = (\vec{x}_N, \vec{x}_3) = (\vec{y}_N, \vec{y}_3)$.

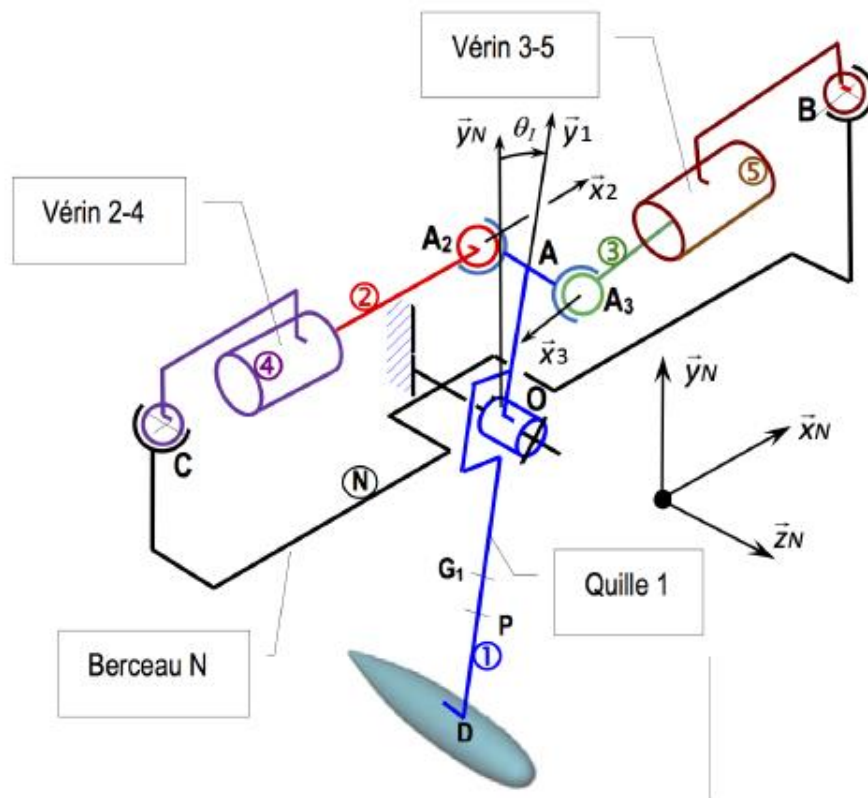


FIGURE 8 – Schéma cinématique du système d'orientation de la quille

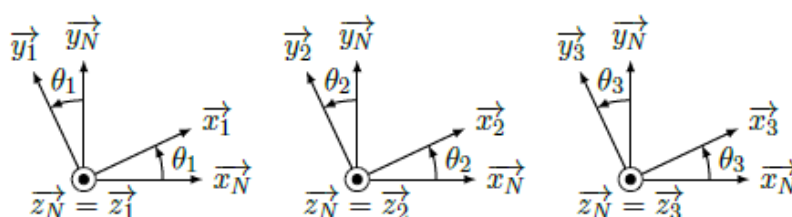


FIGURE 9 – Figures de projection

On pose le paramétrage suivant :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA} &= r\vec{y}_1; & \overrightarrow{AA_2} &= -d\vec{z}_N; & \overrightarrow{AA_3} &= d\vec{z}_N; & \overrightarrow{OC} &= -a\vec{x}_N + b\vec{y}_N - d\vec{z}_N; & \overrightarrow{DO} &= L_{t1}\vec{y}_1; \\ \overrightarrow{OG_1} &= -L_1\vec{y}_1; & \overrightarrow{CA_2} &= x_{24}\vec{x}_2; & \overrightarrow{BA_3} &= x_{35}\vec{x}_3; & \text{avec } r &= 1,1 \text{ m, } a = 2,3 \text{ m, } b = 1,4 \text{ m,} \\ & & & & & & d &= 0,2 \text{ m, } L_1 \text{ et } L_{t1} \text{ positifs.}\end{aligned}$$

5.1 Maintien d'une position de la quille

Objectif

Valider le diamètre D du vérin vis-à-vis d'une pression p_h disponible pour assurer le maintien d'une position angulaire de la quille.

Hypothèses

- Le référentiel $\mathcal{R}_N = (O, \mathcal{B}_N)$ est supposé galiléen pour l'étude.
- On suppose le problème plan $(O, \vec{x}_N, \vec{y}_N)$ pour cette partie de l'étude.
- Les liaisons sont toutes parfaites.
- Les vérins 2-4 et 3-5 sont moteurs et produisent une action combinée, de sorte que l'action mécanique motrice de la pression hydraulique est donnée par

$$\{\mathcal{T}_{ph \rightarrow 2}\} = \left\{ \begin{matrix} F_h \cdot \vec{x}_2 \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_C \quad \text{et} \quad \{\mathcal{T}_{ph \rightarrow 3}\} = \left\{ \begin{matrix} -F_h \cdot \vec{x}_3 \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_B$$

avec F_h une constante positive. On suppose ainsi que chaque vérin développe une force identique.

- On suppose que l'action de la pesanteur sur la quille peut se mettre sous la forme d'un glisseur en un point P tel que $\overrightarrow{OP} = y_p \vec{y}_1$ et l'on note cette action mécanique : $\{\mathcal{T}_{pes \rightarrow quille}\} = \left\{ \begin{matrix} -M_q g \vec{y}_N \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_P$ avec $y_p = -2$ m et $M_q = 4100$ kg. On gardera la notation y_p pour la suite du sujet sans la remplacer par l'expression trouvée à la question Q7.
- Les poids des éléments constitutifs des deux vérins sont négligés.
- Les actions hydrodynamiques sur le voile et le lest de quille sont également négligés.
- Les conditions de déplacement rendent négligeables les effets dynamiques. Les théorèmes de la statique seront donc utilisés dans la suite.

On résume alors les actions mécaniques considérées dans cette partie à l'aide de la figure suivante.

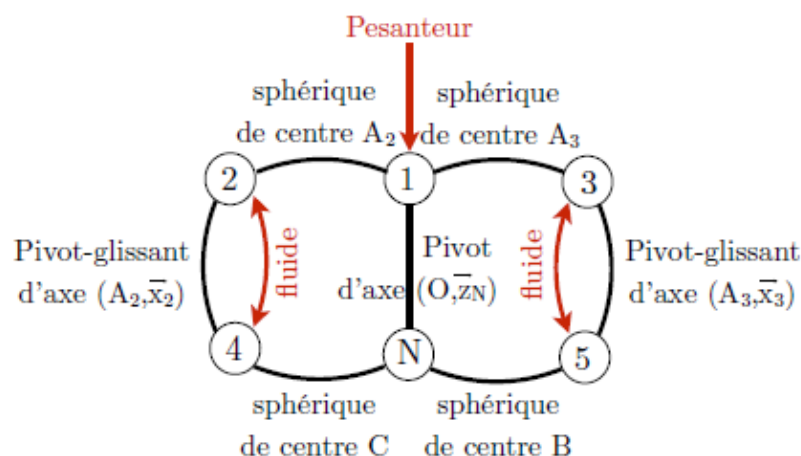


FIGURE 10 – Graphe de structure et actions mécaniques considérées

Notation

On notera le torseur d'une action mécanique transmise par la liaison $\mathcal{L}_{i/j}$ entre deux solides, exprimé en un point K dans la base $\mathcal{B}_\ell$:

$$\{\mathcal{T}_{i \rightarrow j}\} = \left\{ \begin{array}{cc} X_{ij} & L_{ij} \\ Y_{ij} & M_{ij} \\ Z_{ij} & N_{ij} \end{array} \right\}_{K, \mathcal{B}_\ell}$$

Q8. En choisissant judicieusement les points de réduction, donner la forme des torseurs d'actions mécaniques transmises par les liaisons :

- a - $\mathcal{L}_{N/4}$, $\mathcal{L}_{4/2}$ et $\mathcal{L}_{2/1}$ dans la base $\mathcal{B}_2$;
- b - $\mathcal{L}_{N/1}$ dans la base $\mathcal{B}_N$;
- c - $\mathcal{L}_{N/5}$, $\mathcal{L}_{5/3}$ et $\mathcal{L}_{3/1}$ dans la base $\mathcal{B}_3$.

Q9. Quels ensembles de solides sont soumis à exactement deux actions mécaniques extérieures modélisées par des glisseurs ? En isolant l'un d'eux, montrer que la résultante de l'action de **2** sur **1**, transmissible via la liaison $\mathcal{L}_{2/1}$, peut s'écrire $F_{21} \cdot \vec{x}_2$.

Q10. Isoler le solide **2**. Faire le bilan des actions mécaniques extérieures. Puis, en précisant le théorème utilisé, l'éventuel point d'application et la direction de projection, en déduire l'expression de F_{21} .

Q11. Par analogie, écrire le torseur modélisant l'action mécanique de **3** sur **1** en A_3 , noté $\{\mathcal{T}_{3 \rightarrow 1}\}$, en fonction de F_h .

Q12. En isolant un solide pertinent et en considérant son équilibre, déterminer l'expression de F_h en fonction de M_q , y_p , g et des différents paramètres géométriques du problème. On précisera le théorème utilisé, l'éventuel point d'application et la direction de projection.

Q13. Après avoir exprimé la surface S du piston en fonction de son diamètre D , écrire l'expression de la pression hydraulique p_h en fonction de M_q , y_p , g et des différents paramètres géométriques du problème.

On suppose que l'orientation limite de la quille, qui représente le cas le plus défavorable du point de vue de l'effort à fournir par les vérins pour maintenir la quille, est tel que :

$$\theta_1 = -70^\circ \text{ alors } \theta_2 = -20^\circ \text{ et } \theta_3 = 200^\circ$$

Q14. Vérifier que la pression hydraulique est suffisante pour satisfaire l'exigence de manœuvrabilité de la quille dans le cas le plus défavorable décrit ci-dessus, c'est-à-dire qu'elle reste inférieure à la pression hydraulique maximale disponible : $p_{h \text{ max}} = 6 \text{ MPa}$.

5.2 Réalisation d'une position de la quille

Objectif

Valider la course c du vérin retenu vis-à-vis de l'atteinte d'une position extrême de la quille.

Dans cette partie du sujet, on restreint l'étude à la partie du mécanisme pendulaire constituée des pièces N, 1, 2 et 4. Pour simplifier l'étude, on adoptera le schéma cinématique suivant.

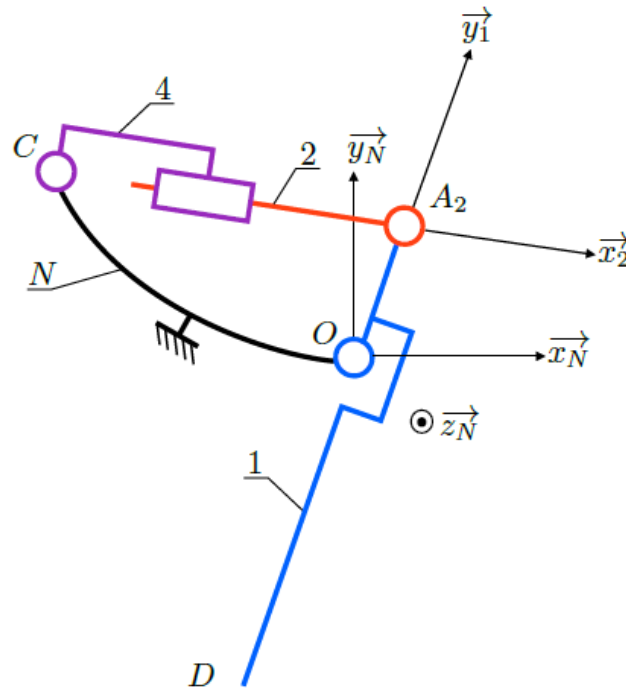


FIGURE 11 – Schéma cinématique simplifié du demi-mécanisme pendulaire

Q15. Quelle hypothèse de modélisation a été faite pour obtenir le schéma cinématique de la figure 11 ? En quoi est-elle justifiée ?

Q16. Réaliser le graphe de liaisons associé aux pièces N, 1, 2 et 4 correspondant au schéma cinématique proposé.

Q17. Par une méthode graphique (utilisant la figure R4 du document réponses) ou une méthode analytique (utilisant le paramétrage posé en début de partie 5), déterminer la course du vérin, c'est-à-dire la variation de la longueur entre les points C et A_2 entre les positions extrêmes de la quille : $\theta_1 = -70^\circ$ et $\theta_1 = +70^\circ$. Valider le choix du vérin.

6 Gestion de la limitation de la vitesse angulaire de la quille

Objectif

Limiter la vitesse de rotation de la quille à $\dot{\theta}_1_{max} = 8^\circ \cdot s^{-1}$ au maximum.

Q18. Expliquer qualitativement la nécessité de limiter la vitesse de rotation de la quille.

Sur un navire, l'énergie embarquée est limitée. La conception du système de pendulation de la quille doit donc prendre en compte cette contrainte importante. Pour actionner les vérins, la puissance motrice est fournie par une centrale hydraulique délivrant la pression p_h . La puissance mécanique fournie par le vérin va donc limiter le produit $p_h \cdot V$ où V est la vitesse de translation du vérin. La translation du vérin **2-4** génère le mouvement de rotation de la quille. On considère toujours le modèle simplifié de la figure 11.

Q19. Par une étude appropriée, déterminer la valeur maximale de la composante selon $\vec{x}_2$ du vecteur vitesse du point A dans le mouvement du solide **2** par rapport au solide **4**, $\max(\vec{V}_{A2/4} \cdot \vec{x}_2)$, permettant de respecter la limite de vitesse angulaire de $8^\circ \cdot s^{-1}$.

Cette limitation de vitesse de translation nécessite de programmer une saturation (cf. figure 13) dans l'algorithme de commande de la structure asservie de positionnement de la quille. Il est donc nécessaire de connaître la valeur maximale du débit d'huile fournie au vérin par l'intermédiaire de la servovalve.

Q20. En adoptant l'hypothèse d'incompressibilité de l'huile utilisée dans le vérin hydraulique, déterminer la valeur maximale du débit, notée q_{max} , en L/min.

On considère cette valeur affectée à une variable `q_max` définie dans l'en-tête d'un programme en langage Python. De même, la variable globale `v_max` est considérée définie.

Q21. Écrire une fonction `saturation` prenant comme argument une valeur de la tension `v` et renvoyant la valeur du débit `q` selon le comportement décrit par la figure 13. On utilisera le langage Python.



FIGURE 12 – Bloc de la servovalve

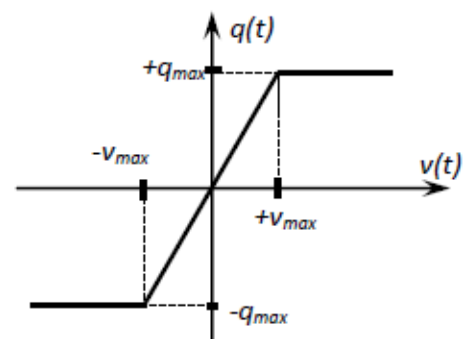


FIGURE 13 – Comportement souhaité de la servovalve selon la tension v imposée

Q22. Justifier la non-linéarité du système « servovalve ».

7 Étude du guidage de la quille par rapport à la coque

Objectif

L'objectif de cette partie est de valider la solution technologique de réalisation de la liaison pivot entre la quille et la coque.

La liaison pivot entre la quille 1 et le berceau N est réalisée par la mise en parallèle d'une liaison sphérique et d'une liaison sphère-cylindre (cf. figures 14 et 15) réalisées par deux coussinets (cf. figure 16).

On note $\{\mathcal{T}_{N \rightarrow 1}\}_{\text{sphère-cylindre}}$ le torseur de l'action mécanique transmise par la liaison sphère-cylindre, $\{\mathcal{T}_{N \rightarrow 1}\}_{\text{sphérique}}$ le torseur de l'action mécanique transmise par la liaison sphérique et $\{\mathcal{T}_{N \rightarrow 1}\}_{\text{pivot}}$ le torseur de l'action mécanique transmise par la liaison pivot.

Hypothèses :

- Les liaisons sont toutes parfaites.
- L'action mécanique exercée par le berceau N sur la quille 1 peut être représentée par le torseur simplifié suivant :

$$\{\mathcal{T}_{N \rightarrow 1}\}_{\text{pivot}} = \begin{Bmatrix} -2F_h \vec{x}_N + M_q g \vec{y}_N \\ 2dF_h \vec{y}_N \end{Bmatrix}_O$$
On considère le cas le plus défavorable où $F_h = 156 \text{ kN}$. On rappelle que $d = 0,2 \text{ m}$ et $M_q = 4 \text{ } 100 \text{ kg}$.
- Les conditions de déplacement rendent négligeables les effets dynamiques. Les théorèmes de la statique seront donc utilisés dans la suite.

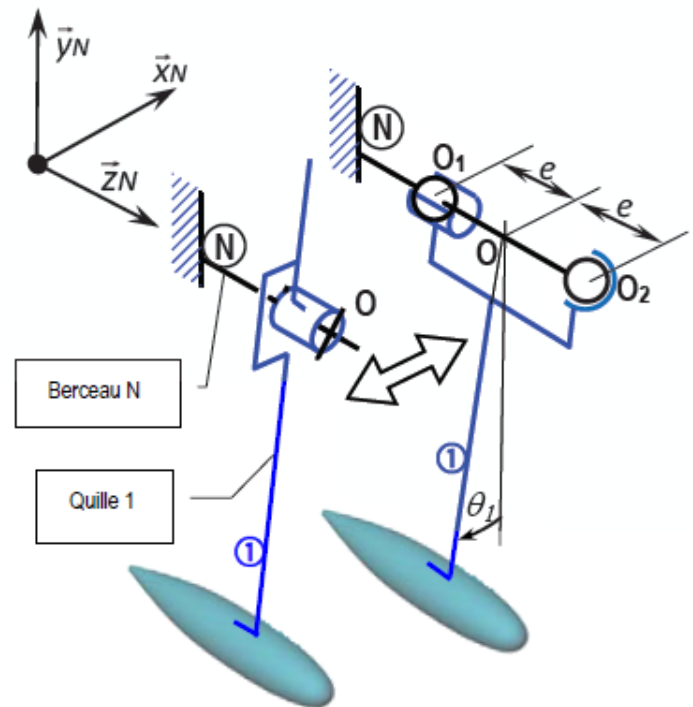


FIGURE 14 – Composition de la liaison pivot entre 1 et N

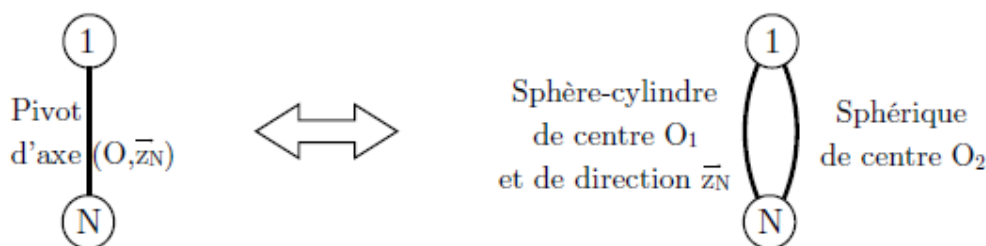


FIGURE 15 – Modèles cinématiquement équivalents

La géométrie de l'assemblage est telle que : $\overrightarrow{OO_2} = e.\vec{z}_N$; $\overrightarrow{OO_1} = -e.\vec{z}_N$ avec $e = 350 \text{ mm}$.

Q23. En choisissant judicieusement les points de réduction, donner la forme des torseurs d'action mécanique $\{\mathcal{T}_{N \rightarrow 1}\}_{\text{sphère-cylindre}}$ et $\{\mathcal{T}_{N \rightarrow 1}\}_{\text{sphérique}}$ dans la base $\mathcal{B}_N$. Les réduire au point O_2 .

Q24. Dans chacune des configurations de la figure 14, isoler le solide 1 et faire le bilan des actions mécaniques. Écrire ainsi la relation liant les torseurs d'action mécanique $\{\mathcal{T}_{N \rightarrow 1}\}_{\text{sphère-cylindre}}$, $\{\mathcal{T}_{N \rightarrow 1}\}_{\text{sphérique}}$ et $\{\mathcal{T}_{N \rightarrow 1}\}_{\text{pivot}}$.

Q25. En déduire les éléments de réduction en O_1 , dans la base $\mathcal{B}_N = (\vec{x}_N, \vec{y}_N, \vec{z}_N)$, du torseur d'action mécanique de **N** sur **1** transitant par la liaison sphère-cylindre, noté $\{\mathcal{T}_{N \rightarrow 1}\}_{\text{sphère-cylindre}}$, en fonction de d , g , e , M_q et F_h .

Les coussinets sont constitués de contacts cylindriques de diamètre $d_c = 80$ mm et de longueur $L_c = 50$ mm. Un coussinet en nylon sert d'interface entre la quille et le navire. Ce coussinet est caractérisé par sa pression de contact maximale admissible : $p_{adm} = 80$ N/mm².

On définit l'effort radial $\vec{F}$ comme l'effort perpendiculaire à l'axe géométrique du coussinet. Les figures 16 et 17 représentent le cas particulier dans lequel $\vec{F}$ est colinéaire à $\vec{x}_N$.

Q26. Exprimer la norme de ce vecteur, $\|\vec{F}\|$, lorsque : $\vec{F}$ est colinéaire à $\vec{x}_N$, $\vec{F}$ est colinéaire à $\vec{y}_N$, $\vec{F}$ est de direction quelconque. Réaliser les applications numériques.

Les coussinets utilisés sont identiques et décrits sur la figure 16 ci-contre. On suppose que le coussinet positionné en O_1 est soumis à une pression de contact supposée répartie uniformément sur le demi-cylindre intérieur du coussinet opposé à la charge radiale F . La figure 17 donne le paramétrage de cette répartition de pression.

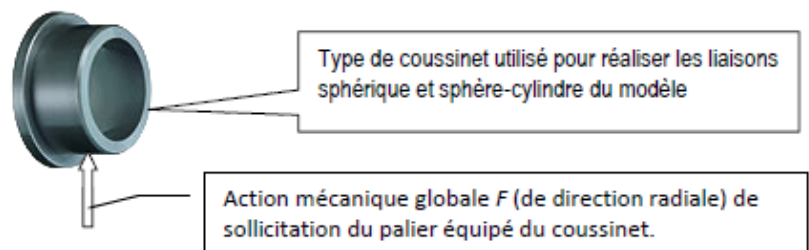


FIGURE 16 – Géométrie du coussinet utilisé

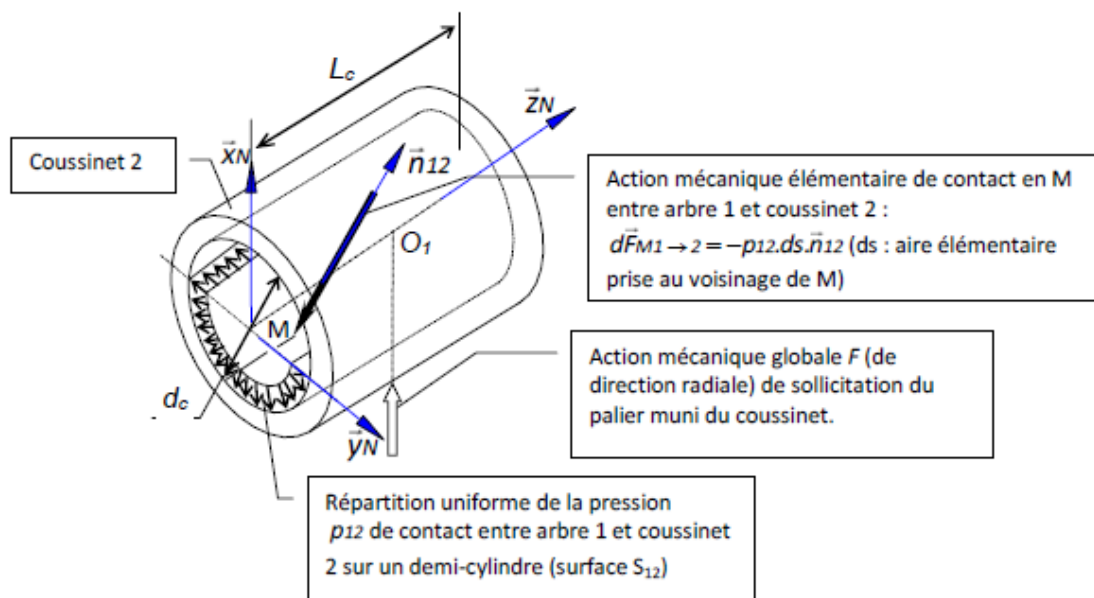


FIGURE 17 – Modélisation de la répartition d'effort sur le coussinet

Q27. En utilisant le paramétrage de la figure 17, montrer que l'action mécanique globale $\vec{F}$ s'écrit $\vec{F} = -p_{12}d_cL_c\vec{x}_N$, où d_c est le diamètre du coussinet et L_c sa longueur. On posera $\alpha = (\vec{x}_N, \vec{n}_{12})$.

Q28. Valider l'usage de ce coussinet de nylon vis-à-vis de la pression maximale admissible p_{adm} .

8 Etude de la commande en position angulaire de la quille

Objectifs

Assurer la mise en position précise de la quille et garantir sa répétabilité

La mise en position angulaire de la quille fait l'objet d'un contrôle par une boucle d'asservissement, dont le cahier des charges est donné ci-dessous.

Cahier des charges :

	Critères	niveau
Stabilité	C11 Marge de gain	10dB
	C12 Dépassement vis-à-vis d'une entrée en échelon	Aucun
Rapidité	C21 Temps de réponse à 5%	4s maxi
	C22 Vitesse angulaire de rotation de la quille	8°/s maxi
Précision	C3 Erreur statique vis-à-vis d'une entrée en échelon	nulle

La quille est manœuvrée par deux vérins hydrauliques. Chacun d'eux est piloté par une servovalve de débit. Ce composant délivre un débit $q(t)$ proportionnel à sa tension de commande $v(t)$. Lors d'une manœuvre de quille un seul de ces vérins est moteur et alimenté en pression via sa servovalve. L'autre est laissé dans une configuration où sa tige est libre de tout mouvement. Le déplacement terminé, la quille est verrouillée en position par un système de blocage non étudié dans ce sujet qui interdit toute circulation de fluide entre vérins et servovalves. L'angle de rotation de la quille par rapport au bâti est mesuré par un capteur potentiométrique.

8.1 Modélisation du vérin.

Lors d'un déplacement de la quille, les mouvements d'oscillation du cylindre de vérin par rapport à la coque étant de faible amplitude et s'effectuant à de faibles vitesses, on se place dans une situation où le corps de vérin est considéré comme fixe. La tige est alors considérée en mouvement de translation galiléen.

On considère également que les mouvements étudiés sont de petits mouvements autour d'une position moyenne et que l'hypothèse des conditions initiales nulles est valide. Dans ces conditions, le comportement du vérin est défini par le modèle continu ci-dessous figure 18 et les deux équations différentielles ((a) et (b)) ci-après.

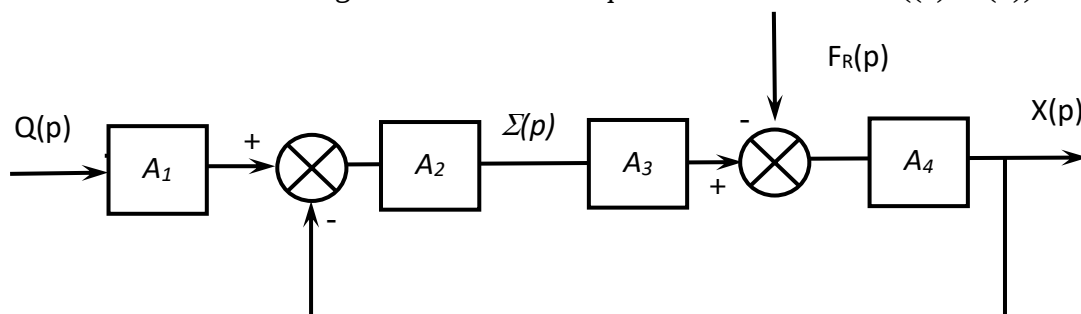


FIGURE 18 - Schéma-blocs du vérin.

$$(a) \quad q(t) = S \cdot \frac{dx(t)}{dt} + \frac{V}{2B} \cdot \frac{d\sigma(t)}{dt}$$

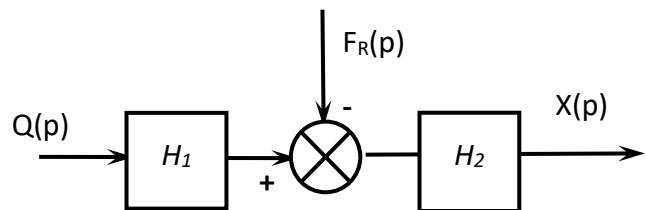
$$(b) \quad M \cdot \frac{d^2x(t)}{dt^2} = S \cdot \sigma(t) - k \cdot x(t) - \lambda \cdot \frac{dx(t)}{dt} - f_R(t)$$

1 : Variable temporelle ; **2** : Transformée de Laplace correspondante.

1	Définition (unité)	2	1	Définition (unité)	2
$q(t)$	Débit d'alimentation du vérin ($\text{m}^3.\text{s}^{-1}$)	$Q(p)$	$f_R(t)$	Composante selon l'axe de la tige de vérin de la résultante du torseur d'inter-effort de la liaison pivot entre tige et quille. (N)	$F_R(p)$
$\sigma(t)$	Différence de pression entre les deux chambres du vérin (Pa)	$\Sigma(p)$			
$x(t)$	Position de la tige du vérin (m)	$X(p)$			
Constantes : Définitions et unités (N.B. : toutes ces constantes sont positives)					
S	Section du vérin (m^2)	M		Masse équivalente à l'ensemble des éléments mobiles ramenée sur la tige de vérin (kg)	Coefficient de frottements visqueux ($\text{N}.\text{m}^{-1}.\text{s}$)
k	Raideur mécanique du vérin ($\text{N}.\text{m}^{-1}$)				
V	Volume d'huile de référence (m^3)	λ			
B	Coefficient de compressibilité de l'huile ($\text{N}.\text{m}^{-2}$)				

Q29. Donner les expressions des fonctions de transfert A_1 , A_2 , A_3 et A_4 en fonction de la variable de Laplace complexe p et des constantes.

Le schéma-bloc de la figure 18 peut se mettre sous la forme de la figure ci-contre.



Q30. Donner les expressions des fonctions de transfert H_1 et H_2 en fonction de A_1 , A_2 , A_3 et A_4 , puis de la variable p et des constantes.

Q31. Pour ce vérin non perturbé ($F_R = 0$), donner sa fonction de transfert $X(p)/Q(p)$ en fonction de la variable p et des constantes.

8.2 Modélisation de l'asservissement en position angulaire :

Le schéma d'asservissement de la position angulaire de la quille représenté figure 19 ci-dessous sera utilisé pour la suite des questions. La perturbation représentée par $F_R(p)$ ne sera pas prise en compte.

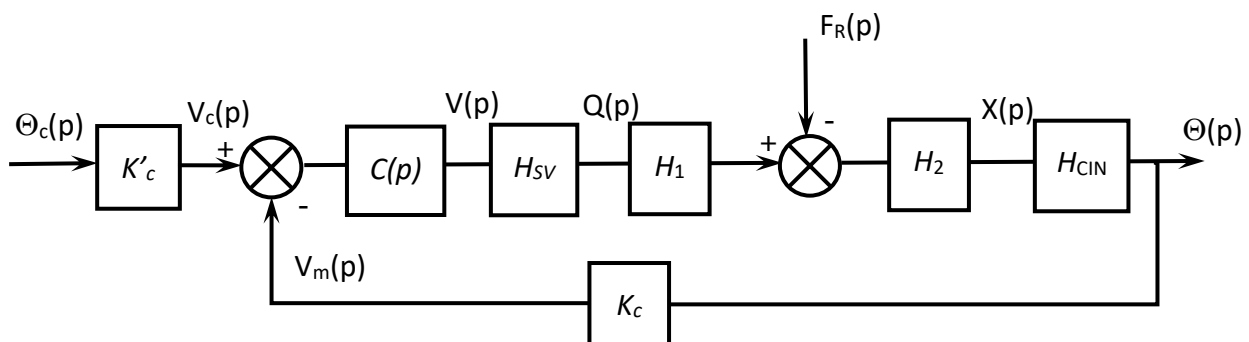


FIGURE 19 - Schéma-blocs de l'asservissement angulaire de la quille.

Variable temporelle	Définition (unité)	Transformée de Laplace
$\theta_c(t)$	Consigne de position angulaire (°)	$\Theta_c(p)$
$\theta(t)$	Position angulaire de la quille (°)	$\Theta(p)$
$v(t)$	Tension de commande de la servovalve (V)	$V(p)$
$v_c(t)$	Tension image de la consigne (V)	$V_c(p)$
$v_m(t)$	Tension image de la position. (V)	$V_m(p)$

Fonctions de transfert : définitions (unité)	
K_c	Gain du capteur angulaire potentiométrique (V/°)
$K'c$	Gain du bloc d'adaptation réglé tel que $K'c = K_c = 1,1 \text{ V/°}$
$C(p)$	Correcteur de position
H_{CIN}	Fonction de transfert de la chaine de transformation de mouvement dont la loi d'entrée/sortie est supposée linéaire dans le domaine d'utilisation. $H_{CIN} = K_\theta \text{ °.m}^{-1}$
H_{SV}	Fonction de transfert de la servovalve

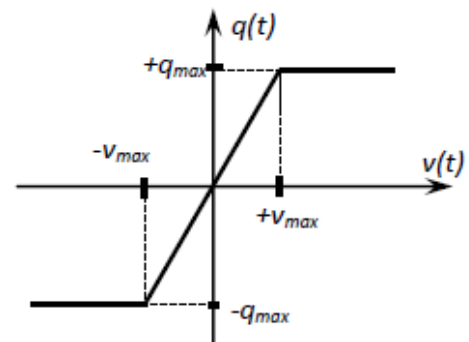
8.3 Modélisation de la servovalve : comportement pour une commande de grande amplitude.

La servovalve présente un fonctionnement non-linéaire provenant d'un phénomène de saturation qui est défini par la courbe de la figure 13 (redonnée ci-contre) donnant les évolutions du débit $q(t)$ fourni par la servovalve en fonction de sa tension de commande $v(t)$.

Pour $v(t) > -v_{\max}$ et $v(t) < v_{\max}$: $H_{SV} = K_{SV} \text{ (m}^3 \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{V}^{-1})$

Pour $v(t) < -v_{\max}$: $q(t) = -q_{\max}$

Pour $v(t) > v_{\max}$: $q(t) = +q_{\max}$, $v_{\max} = 10\text{V}$.



Le système n'est pas encore corrigé, $C(p) = 1$ et on souhaite simuler le fonctionnement où le navigateur veut déplacer la quille avec une consigne angulaire de position de 45° . Cette demande est modélisée par une consigne $q_c(t)$ en échelon, soit : $\theta_c(t) = \theta_0 \cdot u(t)$ avec $\theta_0 = 45^\circ$ et $u(t) = 0$ pour $t < 0$ et $u(t) = 1$ pour $t \geq 0$. La figure R5 du document réponse présente dans ces conditions les évolutions temporelles de deux grandeurs de la boucle d'asservissement, le débit sortant de la servovalve $q(t)$ et la position angulaire de la quille $\theta(t)$.

Q32. Sur cette figure R5, la courbe représentative de $q(t)$ présente un palier où $q(t)$ garde une valeur constante. A l'aide de la caractéristique de la servovalve :

- Donner la valeur numérique de K_{SV} .
- Indiquer sur la figure R5 l'intervalle de temps où le retour d'information a une influence sur la commande du vérin et celui où il n'en a pas. Associer à chacun de ces intervalles le modèle utile : modèle en « boucle fermée » ou en « boucle ouverte ».

Q33. A partir du document réponses figure R5, Montrer, en précisant les deux critères mis en défaut, que le cahier des charges n'est pas respecté.

8.4 Comportement pour une commande de faible amplitude

On étudie la réponse du système non corrigé ($C(p) = 1$) à une entrée échelon de 5° d'amplitude avec $F_R = 0$. Le modèle de travail qui a permis de tracer les courbes de la figure R5 est :

$$H_{BO}(p) = K_{sv}.H_1.H_2.K_\theta.K_c \qquad H_{BO}(p) = \frac{2,2}{p.(1 + 0,12.p + 0,04.p^2)}$$

Q34.

- Pour l'entrée définie ci-dessus, déterminer la valeur de la tension $v(t)$ à l'instant initial $t = 0^+$, $v(0^+)$.
- Montrer que tout au long de ce fonctionnement, la servovalve fonctionnera sans saturer.
- De quelle hypothèse générale d'étude des systèmes asservis ce constat participe-t-il ?

Une simulation de la réponse indicielle à cet échelon de 5° d'amplitude a permis de tracer les courbes de la figure 20, obtenues pour deux valeurs du correcteur proportionnel :

$C(p) = 1$: la courbe présente des dépassements, le critère C12 n'est pas validé.

$C(p) = 0,44$: tous les critères du domaine temporel sont vérifiés (C12, C21, C22, C3).

A l'utilisation, le correcteur proportionnel réglé à 0,44 n'a pas donné satisfaction car le mouvement saccadé de la quille dû aux fluctuations de sa vitesse de rotation générant dans certaines conditions de navigation des perturbations compromettant la stabilité de route du navire. L'examen attentif de cette réponse indicielle fait apparaître la persistance d'un phénomène oscillatoire dont l'origine supposée se trouve dans le caractère résonant du vérin.

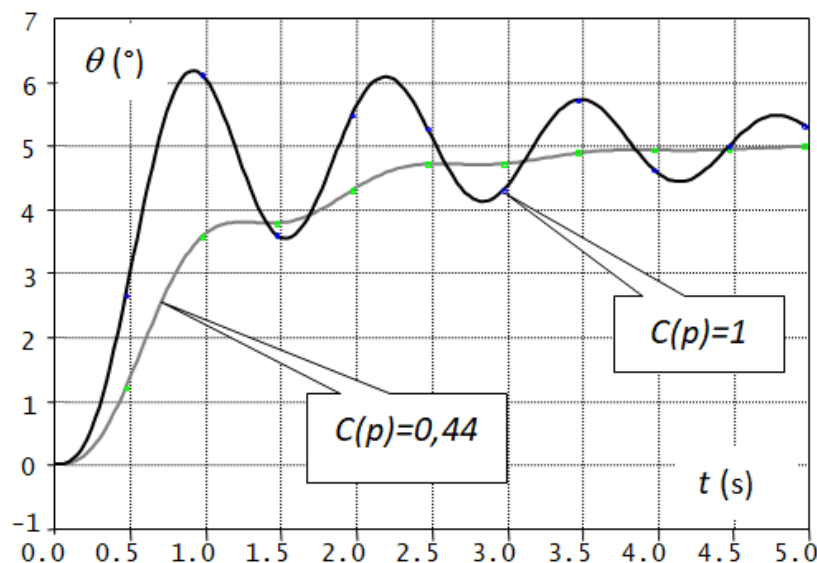


FIGURE 20 - Réponse indicielle à un échelon de 5° .

Q35.

- Tracer sur les figures R6 et R6' de la copie, les diagrammes d'amplitude asymptotiques de Bode de $H_{BO}(p)$ en indiquant les valeurs numériques associées aux points particuliers et la valeur des pentes.
- Déterminer par calcul la pulsation de résonance ω_r de cette fonction de transfert.
- Evaluer littéralement puis numériquement à cette pulsation ω_r la différence, notée ΔK et exprimée en dB, entre l'amplitude de résonance et l'amplitude évaluée par le diagramme asymptotique.
- A quelle valeur de pulsation correspond un déphasage de -180° ? En déduire la marge de gain. Justifier alors qualitativement le choix d'une correction moins forte (gain proportionnel de 0.44 plutôt que 1)

Pour éliminer le phénomène de résonance, on recherche l'expression de $C(p)$ permettant d'abaisser l'amplitude de ΔK à la pulsation ω_r . Le concepteur a choisi un correcteur à retard de phase de fonction de transfert

$$C(p) = K_{COR} \frac{1 + T.p}{1 + b.T.p} \text{ avec } b > 1.$$

Ce correcteur présente un extremum de la courbe de phase à la pulsation ω^* tel que :

$$\sin[\phi(\omega^*)] = \frac{1-b}{1+b} \text{ et } \omega^* = \frac{1}{T\sqrt{b}}.$$

L'étude consiste à déterminer les valeurs de T et b .

Q36.

- a- Tracer sur la figure R7 de la copie, les diagrammes d'amplitude et de phase (asymptotiques et allure de la courbe réelle) de Bode de ce correcteur pour $K_{COR} = 1$. Préciser les expressions littérales des pulsations caractéristiques.
- b- Déterminer alors en fonction de b , l'amplitude $|C(j.\omega^*)|_{dB}$ à la pulsation notée ω^* .

Q37. Pour $K_{COR} = 1$, en faisant correspondre la pulsation de résonance ω_r de H_{BO} à ω^* :

- a- Calculer b pour que « l'excès » de gain ΔK soit compensé par le correcteur et calculer la valeur de T .
- b- Calculer le supplément de déphasage introduit par le correcteur à la pulsation ω^* .

La réponse indicielle correspondant à ce réglage (entrée échelon de 5° d'amplitude) est donnée sur le document réponse figure R8. Le gain K_{COR} a été déterminé de façon à satisfaire les critères C11 et C12.

Q38.

- a- Déterminer la vitesse de rotation angulaire maximale de la quille obtenue avec ce réglage du correcteur.
- b- Validez les critères C21 et C22 en laissant vos constructions apparentes sur la figure R8.
- c- Compte tenu de la forme de la Fonction de transfert en boucle ouverte, pouvait-on prévoir le respect ou non du critère C3