

Programme de colle - semaine 30 du 09/06/2025 au 15/06/2025 (dernière colle)

1 Espaces préhilbertiens réels et espaces euclidiens

Les démonstrations à savoir sont marquées d'un (*)

- Produit scalaire dans un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. Norme associée.
Espace préhilbertien : $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ où E est un $\mathbb{R}$ -EV et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire sur E .
Espace euclidien : espace préhilbertien de dimension finie.
- **Exemples au programme** : à connaître, y compris la justification du fait que ce sont des produits scalaires :
Produit scalaire canonique dans $\mathbb{R}^n$.
Produit scalaire canonique dans $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{R})$: $\langle A, B \rangle = \text{tr}(A^\top B)$.
Produit scalaire intégral dans $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ ($a < b$) : $\langle f, g \rangle = \int_a^b fg$.
- Inégalité de Cauchy-Schwarz et cas d'égalité (*). Inégalité triangulaire (*) et cas d'égalité.
- Orthogonalité. Définition de l'orthogonal d'une partie A de E . $A^\perp$ est un SEV de E (*).
- Famille orthogonale, orthonormée. Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre (*). Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt (à partir d'une famille libre, construire une famille orthonormée qui engendre le même SEV).
- Calculs dans une base orthonormée : expression des coordonnées d'un vecteur, du produit scalaire (*).
- Si F est un SEV de dimension finie de E , alors $E = F \oplus F^\perp$. Projection orthogonale sur un SEV de dimension finie. Expression à partir d'une base orthonormée de F (*).
Si E est de dimension finie, alors $(F^\perp)^\perp = F$ (*).
- Distance d'un élément à une partie non vide de E : définition.
La distance de u à F (SEV de dimension finie) est atteinte en unique point : le projeté orthogonal de u sur F . (Ne pas hésiter à guider pour les questions de calcul d'inf).
- La notion d'isométrie n'est plus au programme en sup.
- Commencer par un exercice basique : reconnaissance d'un produit scalaire, recherche d'une base orthonormée d'un plan, inégalité de type Cauchy-Schwarz.

2 Exercices faits

Il est bien sûr possible de changer légèrement les données, si ça n'alourdit pas les calculs.

1. Soit $u_1 = (1, 1, 1)$, $u_2 = (1, -1, 1)$ et $u_3 = (1, 0, 0)$.
Vérifier que (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$, et l'orthonormaliser (pour le produit scalaire canonique).
On n'est pas obligé de finir complètement les calculs
2. Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y - z = 0\}$.
Donner une base orthonormée de F , puis la matrice dans la base canonique de p , la projection orthogonale sur F .
On n'est pas obligé de finir complètement les calculs
3. **CCINP exo 76**
Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel muni d'un produit scalaire $(|)$.
On pose $\forall x \in E$, $\|x\| = \sqrt{(x|x)}$
 - a) i) Énoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

- ii) Dans quel cas a-t-on égalité? Le démontrer.
- b) Soit $E = \{f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}) / \forall x \in [a, b], f(x) > 0\}$.

Prouver que l'ensemble $\left\{ \int_a^b f(t) dt \times \int_a^b \frac{1}{f(t)} dt / f \in E \right\}$ admet une borne inférieure m et déterminer la valeur de m .

4. CCINP exo 81

On définit dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'application φ par $\varphi(A, A') = \text{tr}(A^\top A')$, où $\text{tr}(A^\top A')$ désigne la trace du produit de la matrice $A^\top$ par la matrice A' .

On admet que φ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

On note $\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

- Démontrer que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
- Déterminer une base de $\mathcal{F}^\perp$.
- Déterminer la projection orthogonale de $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sur $\mathcal{F}^\perp$.
- Calculer la distance de J à $\mathcal{F}$.