

Problème 1 : Vérification de performances d'un hélicoptère

$$Q1 : \overrightarrow{dR_{air \rightarrow pale}} = f_x(r) \cdot dS \cdot \overrightarrow{x_r} + f_z(r) \cdot dS \cdot \vec{z} = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot (C_z(\alpha) \vec{z} + C_x(\alpha) \overrightarrow{x_r}) \cdot r^2 \cdot \omega^2 \cdot l \cdot dr$$

$$\begin{aligned} Q2 : \overrightarrow{R_{air \rightarrow pale}} &= \int \overrightarrow{dR_{air \rightarrow pale}} = \int_{r=0}^R \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot (C_z(\alpha) \vec{z} + C_x(\alpha) \overrightarrow{x_r}) \cdot r^2 \cdot \omega^2 \cdot l \cdot dr \\ &= \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot (C_z(\alpha) \vec{z} + C_x(\alpha) \overrightarrow{x_r}) \omega^2 \cdot l \cdot \int_{r=0}^R r^2 dr \\ &= \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot (C_z(\alpha) \vec{z} + C_x(\alpha) \overrightarrow{x_r}) \omega^2 \cdot l \cdot \frac{R^3}{3} = A \cdot (C_z(\alpha) \vec{z} + C_x(\alpha) \overrightarrow{x_r}) \end{aligned}$$

$$D'où : A = \frac{1}{6} \cdot \rho \cdot \omega^2 \cdot l \cdot R^3$$

Q3 : Comme les pales possèdent le même angle d'incidence, les normes des composantes de portance et de traînée sont identiques sur chacune. Par contre, par la symétrie axiale, les traînées s'annulent.

On a alors :

$$\overrightarrow{R_{air \rightarrow rp}} = \overrightarrow{R_{air \rightarrow pale1}} + \overrightarrow{R_{air \rightarrow pale2}} = 2 \cdot A \cdot C_z(\alpha) \vec{z}$$

Q4 : à la limite du décollage, l'appareil est en équilibre dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Soumis notamment aux actions de la pesanteur et de l'air, on peut alors écrire :

$$\overrightarrow{R_{air \rightarrow hélico}} + \overrightarrow{R_{pes \rightarrow hélico}} = \vec{0} \Rightarrow 2 \cdot A \cdot C_z(\alpha) = M_{totale} \cdot g$$

On en déduit :

$$M_{transportable} = \frac{2 \cdot A \cdot C_z(\alpha)}{g} - M_{vide}$$

Q5 : avec le coeff de sécurité :

$$M_{transportable \text{ réelle}} = \frac{1}{s} \left(\frac{2 \cdot A \cdot C_z(\alpha)}{g} - M_{vide} \right)$$

$$Q6 : \text{Changement de point : } \overrightarrow{V_{P \in pale / cabine}} = \overrightarrow{V_{O \in pale / cabine}} + \overrightarrow{PO} \wedge \overrightarrow{\Omega_{pale / cabine}} = -r \cdot \dot{\theta} \cdot \overrightarrow{x_r}$$

$$Q7 : \text{composition du mouvement : } \overrightarrow{V_{P \in air / pale}} = \overrightarrow{V_{P \in air / sol}} + \overrightarrow{V_{P \in sol / cabine}} + \overrightarrow{V_{P \in cabine / pale}}$$

Or $\overrightarrow{V_{P \in air / sol}} = \vec{0}$ car pas de vent et $\overrightarrow{V_{P \in sol / cabine}} = \vec{0}$ car limite décollage.

$$D'où \overrightarrow{V_{P \in air / pale}} = -\overrightarrow{V_{P \in pale / cabine}} = r \cdot \dot{\theta} \cdot \overrightarrow{x_r}$$

Q8 : On veut : $\|\overrightarrow{V_{P \in air / pale}}\| < 0,6 \cdot c$. Le cas le plus défavorable est pour P situé en bout de pale : $r = R$

$$D'où $r \cdot \omega < 0,6 \cdot c \Rightarrow \omega_{max} = \frac{0,6 \cdot c}{R}$$$

Q9 : Graphiquement : $C_z(\alpha)_{max} = 1.65$

$$Q10 : M_{transportable \text{ réelle}} = \frac{1}{s} \left(\frac{\rho \cdot (0,6 \cdot c)^2 \cdot l \cdot R \cdot C_z(\alpha)_{max}}{3 \cdot g} - M_{vide} \right) = 407.5 \text{ kg} > 400 \text{ kg}$$

le cahier des charges est vérifié.

$$\begin{aligned} Q11 : \overrightarrow{dM_{O, air \rightarrow pale}} &= \overrightarrow{OP} \wedge \overrightarrow{dR_{air \rightarrow pale}} = \overrightarrow{OP} \wedge \left(\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot (C_z(\alpha) \vec{z} + C_x(\alpha) \overrightarrow{x_r}) \cdot r^2 \cdot \omega^2 \cdot l \cdot dr \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot (-C_x(\alpha) \vec{z} + C_z(\alpha) \overrightarrow{x_r}) \cdot r^3 \cdot \omega^2 \cdot l \cdot dr \end{aligned}$$

$$Q12 : \overrightarrow{M_{O, air \rightarrow pale}} = \int \overrightarrow{dM_{O, air \rightarrow pale}} = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot (-C_x(\alpha) \vec{z} + C_z(\alpha) \overrightarrow{x_r}) \cdot \frac{R^4}{4} \cdot \omega^2 \cdot l = \frac{3 \cdot R}{4} A \cdot (C_z(\alpha) \overrightarrow{x_r} - C_x(\alpha) \vec{z})$$

Q13 : raisonnement analogue à Q3 : $\overrightarrow{M_{O,air \rightarrow rp}} = \overrightarrow{M_{O,air \rightarrow pale1}} + \overrightarrow{M_{O,air \rightarrow pale2}} = -\frac{3.R}{2} A. C_x(\alpha) \vec{z}$

Q14 : Ce résultat indique que l'action de l'air sur le rotor principal va appliquer à la cabine une rotation autour de l'axe $(O, \vec{z})$, c'est-à-dire l'axe du rotor principal. Cet effet est bien évidemment fort gênant !

$$Q15 : \|\overrightarrow{R_{air \rightarrow rac}}\| = \frac{1}{3} \cdot \rho \cdot \omega_{ac}^2 \cdot l_{ac} \cdot R_{ac}^3 \cdot C_z(\alpha_{ac})$$

Q16 : La résultante précédente est colinéaire à $\vec{y}$, donc le bras de levier permettant de connaître son effet en O est la longueur de queue, d_{ac} , plus courte distance entre O et le support de $\overrightarrow{R_{air \rightarrow rac}}$. On écrit donc :

$$\|\overrightarrow{M_{(O, R_{air \rightarrow rac})}}\| = \|\overrightarrow{R_{air \rightarrow rac}}\| \cdot d_{ac}$$

Q17 : Pour que le rotor anti-couple puisse compenser le couple indésirable créé par l'air sur le rotor principal, il faut qu'il y ait équilibre de l'hélicoptère sous l'action de ces deux moments. Cela entraîne :

$$-\frac{3.R}{2} A. C_x(\alpha) = \frac{1}{3} \cdot \rho \cdot \omega_{ac}^2 \cdot l_{ac} \cdot R_{ac}^3 \cdot C_z(\alpha_{ac}) \cdot d_{ac}$$

d'où

$$d_{ac} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{\lambda^2} \cdot \frac{l}{l_{ac}} \cdot \frac{R^4}{R_{ac}^3} \cdot \frac{C_x(\alpha)}{C_z(\alpha_{ac})}$$

Q18 : $d_{ac} = 5.76$ m. Cette valeur est conforme au choix fait par le constructeur car, en prenant une longueur de queue de 6m, celui-ci s'assure que le cas limite décrit n'est pas atteint.

Problème 2 : Doseur pondéral de granules plastiques (extrait Mines MP 08)

Q1 On suppose que les poids des éléments constitutifs du capteur sont négligés par rapport aux autres actions mécaniques exercées.

- Isolons $S=\{5\}$: soumis à 2 glisseurs donc ils ont même support (CD) soit $\boxed{D_Y = C_Y = 0}$
- Isolons $S=\{8\}$: soumis à 3 actions mécaniques en B, C et K donc le théorème de la résultante statique sur $\vec{y}$ donne : $-B_Y - C_Y - P = 0$ soit $\boxed{B_Y = -P}$
- Isolons $S=\{4\}$: soumis à 2 actions mécaniques en B et A donc le théorème du moment statique en A selon $\vec{z}$ donne : $C_{eA} + l \cdot B_Y = 0$ soit $\boxed{P = C_{eA} / l}$

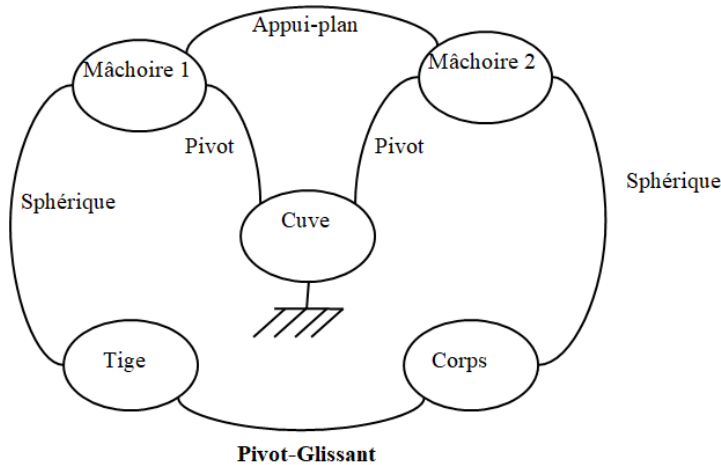
Q2

- Isolons $S=\{4\}$: soumis à 2 actions mécaniques donc le théorème du moment statique en A selon $\vec{z}$ donne : $2 \cdot C_e + l \cdot B_Y = 0$
- Isolons $S=\{5\}$: soumis à 2 actions mécaniques donc le théorème du moment statique en D selon $\vec{z}$ donne : $2 \cdot C_e + l \cdot C_Y = 0$
- Isolons $S=\{8\}$: soumis à 3 actions mécaniques donc le théorème de la résultante statique en $\vec{y}$ donne : $-B_Y - C_Y - P = 0$

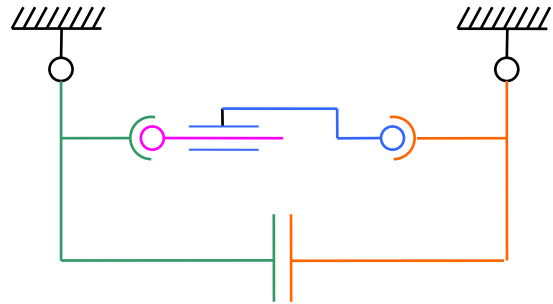
D'où : $\boxed{P = 4 \cdot C_e / l}$

Conclusion : la mesure du poids est donc indépendante de M_k et donc de la position du centre de gravité des granulés.

Q3 Le graphe des liaisons est le suivant :



Le schéma cinématique plan :



Problème 3 : Chargement/déchargement de cargos porte-conteneurs (extrait Centrale PSI 13)

Q1 : Soit $S = \{\text{Portique} + \text{Chariot} + \text{Spreader} + \text{Conteneur}\}$

Bilan des Actions Mécaniques Extérieures :

- Poids ($M_c + M_s$ en G_3 , M_{ch} en G_{ch} et M_p en G_p)
- Action du rail en A : glisseur en A
- Action du rail en B : glisseur en B

S'il y a basculement, il aura lieu lors du début de la phase de levage de la charge maxi (portique et chariot immobiles). On applique le TMS. en A selon la direction $\vec{x}$.

$$\begin{aligned}\vec{M}_A(\text{poids}/Rg). \vec{x} &= -[\vec{AG}_3 \wedge (M_c + M_s) \cdot g \cdot \vec{z} + \vec{AG}_{ch} \wedge M_{ch} \cdot g \cdot \vec{z} + \vec{AG}_p \wedge M_p \cdot g \cdot \vec{z}] \cdot \vec{x} \\ \Rightarrow \vec{M}_A(\text{poids}/Rg). \vec{x} &= \left[(M_c + M_s) \cdot D + M_{ch} \cdot D - M_p \cdot \frac{l_y}{2} \right] \cdot g \\ \vec{M}_A(\vec{A}/Rg). \vec{x} &= 0 \\ \vec{M}_A(\vec{B}/Rg). \vec{x} &= \vec{AB} \wedge Z_B \vec{z} \cdot \vec{x} = l_y \cdot Z_B\end{aligned}$$

Ainsi on obtient l'équation suivante :

$$0 = \left[(M_c + M_s) \cdot D + M_{ch} \cdot D - M_p \cdot \frac{l_y}{2} \right] \cdot g + l_y \cdot Z_B$$

$$\text{Soit } Z_B = \frac{(M_p \cdot \frac{l_y}{2} - (M_c + M_s) \cdot D - M_{ch} \cdot D) \cdot g}{l_y} = 3347 \text{ kN}$$

$$\text{TRS} \Rightarrow Z_A = (M_p + M_c + M_s + M_{ch}) \cdot g - Z_B = 8223 \text{ kN}$$

Le non basculement de la grue consiste à considérer $Z_B \geq 0$. Elle est donc vérifiée

Q1 bis : Dans le cas de la levée de la charge maxi à l'accélération maxi : à l'action de la pesanteur sur le conteneur et le spreader s'ajoute les effets dynamiques $(M_c + M_s) \cdot \gamma_{lm}$ (c'est le PFD). Cette force d'inertie contribue au basculement (s'il a lieu) du portique.

D'où $0 = \left[(M_c + M_s) \cdot D + M_{ch} \cdot D - M_p \cdot \frac{l_y}{2} \right] \cdot g + l_y \cdot Z_B + (M_c + M_s) \cdot D \cdot \gamma_{lm}$ cette équation est le TMS appliqué en A à l'ensemble S1-S. $(M_c + M_s) \cdot \gamma_{lm}$ est la tension supplémentaire dans les câbles de levage. D'où $Z_B = \frac{1}{l_y} (M_p \cdot \frac{l_y}{2} \cdot g - (M_c + M_s) \cdot D \cdot (g + \gamma_{lm}) - M_{ch} \cdot D \cdot g) = 3216 \text{ kN} > 0$. Il ya toujours non basculement.

L'accélération maxi conduisant au basculement est : $\gamma_{lm} = g \left[\frac{-M_{ch} \cdot D + M_p \cdot \frac{l_y}{2}}{(M_c + M_s) \cdot D} - 1 \right] = 24.7 m/s^2 \gg 0.5 m/s^2$

Q2 :

Par hypothèse :

- Tous les éléments sont immobiles
- Les masses des poutres supérieures, inférieures et des supports de galets sont négligeables devant M_p .
- Le problème est supposé plan ($\vec{x}, \vec{z}$).

Ainsi on se place dans le cadre d'une étude de statique :

- Système isolé : {portique + poutres inf & sup + supports de galets + galets + chariot + spreader + conteneur}
- Bilan des Actions Mécaniques Extérieures :
 - Poids : $M_c + M_s$ en G_3 ; M_{ch} en G_{ch} et M_p en G_p
 - Action du rail en A : ponctuelle de normale ($A, \vec{z}$) avec frottement ($Z_{fA}\vec{z} - X_{fA}\vec{x}$)
 - Action du rail en D : ponctuelle de normale ($D, \vec{z}$) avec frottement ($Z_{fD}\vec{z} - X_{fD}\vec{x}$)
 - Force du vent en K : $\vec{F}_V = \frac{1}{2} \cdot \lambda \cdot V^2 \cdot \vec{x}$
- Théorème du moment statique en A projeté sur $\vec{y}$ permet de déterminer Z_{fD} :

$$\begin{aligned}
 & -[\overrightarrow{AG_3} \wedge (M_c + M_s) \cdot g \cdot \vec{z} + \overrightarrow{AG_{ch}} \wedge M_{ch} \cdot g \cdot \vec{z} + \overrightarrow{AG_p} \wedge M_p \cdot g \cdot \vec{z}] \cdot \vec{y} + \overrightarrow{AK} \wedge \vec{F}_V \cdot \vec{x} + \overrightarrow{AD} \\
 & \quad \wedge (Z_{fD}\vec{z} + X_{fD}\vec{x}) \cdot \vec{y} \\
 & \overrightarrow{AD} = -l_x \vec{x} ; \overrightarrow{AG_3} = -\frac{l_x}{2} \vec{x} + ??? \vec{z} ; \overrightarrow{AG_{ch}} = -\frac{l_x}{2} \vec{x} + ??? \vec{z} ; \overrightarrow{AG_p} = -\frac{l_x}{2} \vec{x} + h \vec{z} ; \overrightarrow{AK} \\
 & \quad = -\frac{l_x}{2} \vec{x} + H \vec{z}
 \end{aligned}$$

Toutes les dimensions selon $\vec{z}$ n'intervenant pas dans le résultat final, il importe peu que certaines ne soient pas définies. Ainsi nous obtenons l'équation suivante :

$$-(M_c + M_s + M_{ch} + M_p) \cdot g \cdot \frac{l_x}{2} + H \cdot F_V + l_x \cdot Z_{fD} = 0$$

On en déduit alors $Z_{fD} = \frac{1}{2} \cdot (M_c + M_s + M_{ch} + M_p) \cdot g - H \cdot \frac{F_V}{l_x}$

- Théorème de la résultante statique selon $\vec{z}$:

$$Z_{fA} + Z_{fD} - (M_c + M_s + M_{ch} + M_p) \cdot g = 0 \quad \text{Soit : } Z_{fA} = \frac{1}{2} \cdot (M_c + M_s + M_{ch} + M_p) \cdot g + H \cdot \frac{F_V}{l_x}$$

Q3 :

- Il y a basculement ssi, $Z_{fD} = 0 = \frac{1}{2} \cdot (M_c + M_s + M_{ch} + M_p) \cdot g - H \cdot \frac{F_V}{l_x}$, car d'après le sens du vent le basculement s'effectuera autour de A.

Soit la vitesse du vent minimale causant le basculement :

$$V^2 = \frac{l_x \cdot (M_c + M_s + M_{ch} + M_p) \cdot g}{H \cdot \lambda} \Rightarrow V = 312 \text{ km/h } (> 300 \text{ km/h Cdcf})$$

NB : En observant l'équation de Z_{fD} on peut remarquer que le cas le plus défavorable est celui sans conteneur. Dans ce cas la vitesse du vent vaudra :

$$V = 307 \text{ km/h } (> 300 \text{ km/h Cdcf})$$

- Pour étudier le glissement on se place à l'équilibre à la limite du glissement : $X_{fA} = f \cdot Z_{fA}$
D'après le Th. de la résultante selon $\vec{x}$ on trouve :

$$-X_{fA} - X_{fD} + F_V = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \lambda \cdot V_2^2 - f \cdot (M_c + M_s + M_{ch} + M_p) \cdot g = 0$$

Comme précédemment, on peut remarquer que le cas le plus défavorable est celui sans conteneur. Dans ce cas la vitesse du vent vaudra :

$$V_2^2 = \frac{2}{\lambda} \cdot f \cdot (M_c + M_s + M_{ch} + M_p) \cdot g \text{ soit } V_2 = 266 \text{ km/h } (> 120 \text{ km/h Cdcf})$$

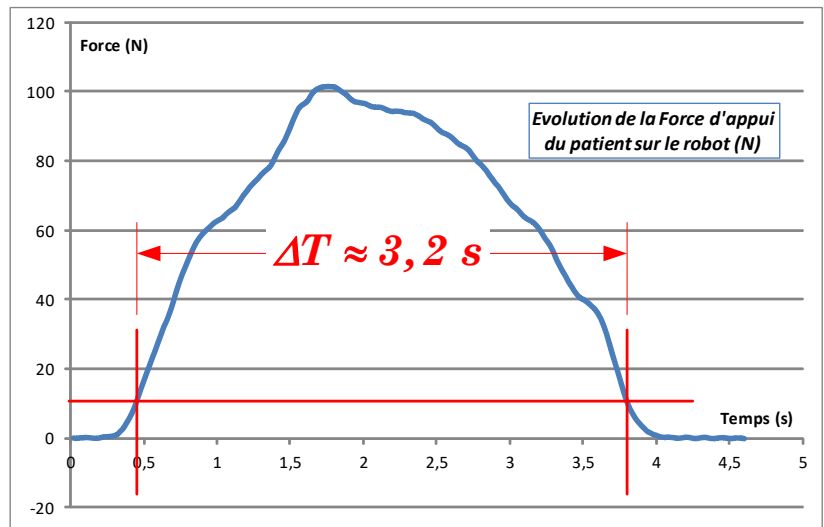
Le cahier des charges n'est pas respecté. Il existe un risque de glissement en cas de vent violent mais pas de basculement. Il faudra donc prévoir un système de blocage des roues.

Problème 4 : Robot Romeo (extrait e3A MP 14)

Q1 : Pour réaliser ces essais, il n'est pas nécessaire d'avoir une grande précision. Ces mesures ont pour seul but d'avoir une idée de l'effort que peut exercer une personne âgée. L'effort maximum toléré sur le cahier des charges est de 100N. Un capteur avec une étendue de 150N et une précision de $\pm 5\text{N}$ suffit par exemple.

Q2 : Le temps de maintien est d'environ 3,3 secondes.

Le cahier des charges précise qu'on peut attendre un temps de maintien jusqu'à 10 s. Le cahier des charges est donc cohérent au regard de cet enregistrement, avec une prise de sécurité importante.



Q3 : C'est le pied droit qui est susceptible de décoller : l'appui de la personne crée un moment de basculement sur le pied gauche.

Q4 :

$$\mathcal{T}\{\text{pes} \rightarrow E\} = \left\{ \begin{array}{c} -M \cdot g \cdot \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_G \quad \mathcal{T}\{\text{hum} \rightarrow E\} = \left\{ \begin{array}{c} -F \cdot \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_D \quad \mathcal{T}\{\text{solD} \rightarrow E\} = \left\{ \begin{array}{c} Z_{01} \cdot \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{O_D}$$

$$\mathcal{T}\{\text{solG} \rightarrow E\} = \left\{ \begin{array}{c} Z'_{01} \cdot \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{O_G}$$

Q5 : En isolant (E) en équilibre dans le référentiel galiléen du sol, le principe fondamental de la statique s'applique.

L'équation de résultante suivant $\vec{z}_0$ donne :

$$-F - M \cdot g + Z_{01} + Z'_{01} = 0$$

Q6 : L'équation du moment en O_D suivant $\vec{x}_0$ s'écrit :

$$-M \cdot g \cdot d - F \cdot (e + d) + Z'_{01} \cdot 2d = 0$$

Ainsi :

$$Z'_{01} = \frac{M \cdot g \cdot d + F \cdot (e + d)}{2d}$$

Q7 : En injectant ce résultat dans l'équation issue du TRS :

$$Z_{01} = F + M \cdot g - Z'_{01} = \frac{M \cdot g \cdot d + F \cdot (d - e)}{2d}$$

Finalement :

$$T\{solG \rightarrow E\} = \left\{ \begin{array}{c} F \left(\frac{d+e}{2d} \right) + \frac{M \cdot g}{2} \cdot \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{O_G} \quad T\{solD \rightarrow E\} = \left\{ \begin{array}{c} F \left(\frac{d-e}{2d} \right) + \frac{M \cdot g}{2} \cdot \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{O_D}$$

Q8 : D'après son expression, Z'_{01} reste forcément positif (cohérent avec Q4) donc la condition est :

$$Z_{01} \geq 0$$

soit :

$$F \left(\frac{d-e}{2d} \right) + \frac{M \cdot g}{2} \geq 0$$

Q9 : En exerçant l'effort au point D , le basculement ferait perdre le contact au point O_D , d'où $Z_{01} = 0$

$$0 = \frac{M \cdot g \cdot d + F \cdot (d-e)}{2d} \Rightarrow F = -\frac{M \cdot g \cdot d}{d-e}$$

L'application numérique nous donne :

$$F = 900\text{N} > 100\text{N}$$

Le cahier des charges stipule un effort maximum de 100N, la condition de non-basculement n'est donc pas limitante au vu de ce critère.

Q10 : On isole donc $E_{12} = \{1, 2\}$, cet ensemble est soumis à 4 actions mécaniques extérieures :

- le poids représentable par un glisseur en G_{12} , $\vec{P}_{12} = -M_{12} \cdot g \cdot \vec{z}_0$,
- l'effort du patient représentable par un glisseur en D , $\vec{F} = -F \cdot \vec{z}_0$,
- le couple moteur C_{32} au niveau du genou,
- l'action de la liaison pivot d'axe $(B, \vec{y}_0)$ de 3 sur 2 modélisable par un glisseur au vue de l'hypothèse de problème plan $(O, \vec{x}_0, \vec{z}_0)$.

Afin de s'abstenir de calculer les inconnues de liaison de 3 sur 2, il suffit d'appliquer le théorème du moment suivant l'axe $(B, \vec{y}_0)$

$$-l_3 \cdot \sin \theta_{43} \cdot M_{12} \cdot g - l_3 \cdot \sin \theta_{43} \cdot F + C_{32} + 0 = 0$$

D'où :

$$C_{32} = l_3 \cdot \sin \theta_{43} \cdot (F + M_{12} \cdot g)$$

Résolution avec Torseur (c'est la même chose mais présentée différemment)

Bilan des efforts extérieurs qui s'appliquent sur l'ensemble isolé $E_{12} = \{1, 2\}$:

$$\begin{aligned} T\{patient \rightarrow 1\} &= \left\{ \begin{array}{c} -F \cdot \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_D & T\{poids \rightarrow E_{12}\} &= \left\{ \begin{array}{c} -M_{12} \cdot g \cdot \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{G_{12}} \\ T\{moteur \rightarrow 2\} &= \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ C_{32} \cdot \vec{y}_0 \end{array} \right\}_B & T\{3 \rightarrow 2\} &= \left\{ \begin{array}{c} X_{32} \cdot \vec{x}_0 + Z_{32} \cdot \vec{z}_0 \\ 0 \cdot \vec{y}_0 \end{array} \right\}_B \end{aligned}$$

(Torseur des efforts transmissibles de la liaison pivot, exprimé dans le plan sagittal.)

Puisqu'on cherche à déterminer le couple C_{32} , on va utiliser le théorème du moment statique au point B :

$$\begin{aligned} \vec{M}(B, patient \rightarrow 1) &= \vec{M}(D, patient \rightarrow 1) + \overrightarrow{BD} \wedge -F \cdot \vec{z}_0 \\ \overrightarrow{BD} &= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OD} = -l_3 \cdot \vec{z}_3 + (Z_D - l_4) \cdot \vec{z}_0 \\ \overrightarrow{BD} \wedge -F \cdot \vec{z}_0 &= (-l_3 \cdot \vec{z}_3 + (Z_D - l_4) \cdot \vec{z}_0) \wedge -F \cdot \vec{z}_0 = -F(l_3 \cdot \sin \theta_{43}) \vec{y}_0 \end{aligned}$$

$$\vec{M}(B, patient \rightarrow 1) = -F(l_3 \cdot \sin \theta_{43}) \vec{y}_0$$

$$\begin{aligned} \vec{M}(B, poids \rightarrow 1) &= \vec{M}(G_{12}, poids \rightarrow 1) + \overrightarrow{BG_{12}} \wedge -M_{12} \cdot g \cdot \vec{z}_0 \\ \overrightarrow{BG_{12}} &= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AG_{12}} = -l_3 \cdot \vec{z}_3 + Z_{G_{12}} \cdot \vec{z}_0 \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{BG_{12}} \wedge -F \cdot \overrightarrow{z_0} = (-l_3 \cdot \overrightarrow{z_3} + \mathbf{Z}_{G12} \cdot \overrightarrow{z_0}) \wedge -M_{12} \cdot g \cdot \overrightarrow{z_0} = M_{12} \cdot g \cdot l_3 \cdot \sin \theta_{43} \cdot \overrightarrow{y_0}$$

$$\vec{M}(B, \text{poids} \rightarrow 1) = M_{12} \cdot g \cdot l_3 \cdot \sin \theta_{43} \cdot \overrightarrow{y_0}$$

D'où l'équation de moment :

$$C_{32} + M_{12} \cdot g \cdot l_3 \cdot \sin \theta_{43} + F(l_3 \cdot \sin \theta_{43}) = 0$$

$$C_{32} = -(M_{12} \cdot g + F) \cdot (l_3 \cdot \sin \theta_{43})$$

$$\text{A.N. : } C_{32} = 83,4 \text{ N}$$

Q11 : Puisque le rendement du réducteur est égal à 1, on a :

$$C_{32} \cdot \omega_{32} = C_m \cdot \omega_m \Rightarrow C_m = C_{32}/r_{32} = 0,88 \text{ Nm} < 2,5 \text{ Nm}$$

Le moteur est donc en mesure de rester en position de genuflexion pendant que le patient est en appui sur l'épaule du robot.

Il faudra cependant prendre garde que cette position ne perdure pas trop dans le temps au risque d'un échauffement exagéré des bobinages du moteur.

Q12 :

$$\begin{aligned} d(t) &: \text{tension moteur en } V \\ e(t) &: \text{courant moteur en } A \\ f(t) &: \text{couple moteur en } N \cdot m \\ g(t) &: \text{vitesse moteur en } rad \cdot s^{-1} \end{aligned}$$

Q13 :

$$\theta_{32}(p) = \frac{1}{r_{32} \cdot J \cdot p^2} \cdot (F(p) - C_r(p)) \quad (1)$$

$$F(p) = \frac{K_m}{R} \cdot (D(p) - K_m \cdot G(p)) = \frac{K_m}{R} \cdot (D(p) - K_m \cdot r_{32} \cdot p \cdot \theta_{32}(p)) \quad (2)$$

$$D(p) = K_3 \cdot (B(p) - E(p)) = K_3 \cdot \left(B(p) - \frac{F(p)}{K_m} \right) \quad (3)$$

Q14 :

$$B(p) = K_2 \cdot (A(p) - G(p)) = K_2 \cdot (A(p) - r_{32} \cdot p \cdot \theta_{32}(p)) \quad (4)$$

$$A(p) = K_1 \cdot (\theta_{32c}(p) - \theta_{32}(p)) \quad (5)$$

Q15 : $\theta_{32p}(t)$ représente la variation de position angulaire réelle du genou sous l'action uniquement de la perturbation, relativement à une position initiale de référence θ_{32-0}

$$A(p) = -K_1 \cdot \theta_{32p}(p) \quad (5)$$

$$\text{Q16 : } B(p) = K_2 \cdot (-K_1 \cdot \theta_{32p}(p) - r_{32} \cdot p \cdot \theta_{32p}(p)) = (-K_1 \cdot K_2 - r_{32} \cdot K_2 \cdot p) \cdot \theta_{32p}(p) \quad (6)$$

$$\text{Q17 : } D(p) = K_3 \cdot \left((-K_1 \cdot K_2 - r_{32} \cdot K_2 \cdot p) \cdot \theta_{32p}(p) - \frac{F(p)}{K_m} \right)$$

$$D(p) = (-K_1 \cdot K_2 \cdot K_3 - r_{32} \cdot K_2 \cdot K_3 \cdot p) \cdot \theta_{32p}(p) - \frac{K_3}{K_m} \cdot F(p) \quad (7)$$

$$\text{Q18 : } F(p) = \frac{K_m}{R} \cdot [(-K_1 \cdot K_2 \cdot K_3 - r_{32} \cdot K_2 \cdot K_3 \cdot p) \cdot \theta_{32p}(p) - \frac{K_3}{K_m} \cdot F(p) - K_m \cdot r_{32} \cdot p \cdot \theta_{32}(p)]$$

$$F(p) \cdot \left(1 + \frac{K_3}{R} \right) = \frac{1}{R} \cdot [-K_1 \cdot K_2 \cdot K_3 \cdot K_m - r_{32} \cdot K_m \cdot (K_2 \cdot K_3 + K_m) \cdot p] \cdot \theta_{32p}(p)$$

$$F(p) = \frac{1}{K_3 + R} \cdot [-K_1 \cdot K_2 \cdot K_3 \cdot K_m - r_{32} \cdot K_m \cdot (K_2 \cdot K_3 + K_m) \cdot p] \cdot \theta_{32p}(p) \quad (8)$$

$$\text{Q19:} \quad \theta_{32p}(p) = \frac{1}{r_{32 \cdot j} \cdot p^2} \cdot (F(p) - C_r(p))$$

En remplaçant l'expression de $F(p)$ trouvée :

$$\theta_{32p}(p) = \frac{\left(-\frac{K_3 + R}{K_1 \cdot K_2 \cdot K_3 \cdot K_m}\right)}{1 + \frac{r_{32} \cdot (K_2 \cdot K_3 + K_m)}{K_1 \cdot K_2 \cdot K_3} \cdot p + \frac{r_{32} \cdot J \cdot (K_3 + R)}{K_1 \cdot K_2 \cdot K_3 \cdot K_m} \cdot p^2} C_{rp}(p)$$

$$\alpha = \left(-\frac{K_3 + R}{K_1 \cdot K_2 \cdot K_3 \cdot K_m} \right) \quad \beta = \frac{r_{32} \cdot (K_2 \cdot K_3 + K_m)}{K_1 \cdot K_2 \cdot K_3} \quad \gamma = \frac{r_{32} \cdot J \cdot (K_3 + R)}{K_1 \cdot K_2 \cdot K_3 \cdot K_m}$$

Q20 : $\alpha = -1,69 \cdot 10^{-3} \text{ rad/(Nm)}$

Q21 :

$$\frac{1}{\omega_0^2} = 2,25 \cdot 10^{-6}$$
$$\frac{2 \cdot z}{\omega_0} = 0,960$$

Ainsi :

$$z = \frac{1}{2} \cdot 0,960 \cdot \sqrt{\frac{1}{2,25 \cdot 10^{-6}}} = 320$$

Le système est donc très amorti vis-à-vis d'une sollicitation en effort d'un patient. Il n'y aura pas de dépassement ($z > 1$), c'est donc conforme au cahier des charges qui demandait un dépassement inférieur de 5%.

Q22 : $\delta\theta_{32} = \alpha \cdot C_{r0}$ avec $C_{r0} = -1 \text{ Nm}$
 $\delta\theta_{32} = 1,7 \cdot 10^{-3} \text{ rad} = 0,1^\circ$

Q23 : Si on considère toutes les autres articulations bloquées, le point B reste immobile et l'inclinaison de la cuisse par rapport à la verticale augmente très légèrement de $0,1^\circ$.

Ainsi :

$$\delta Z_c = l_2 \cdot (\cos 63 - \cos 63,1) = -0,48 \text{ mm} < 5 \text{ mm}$$

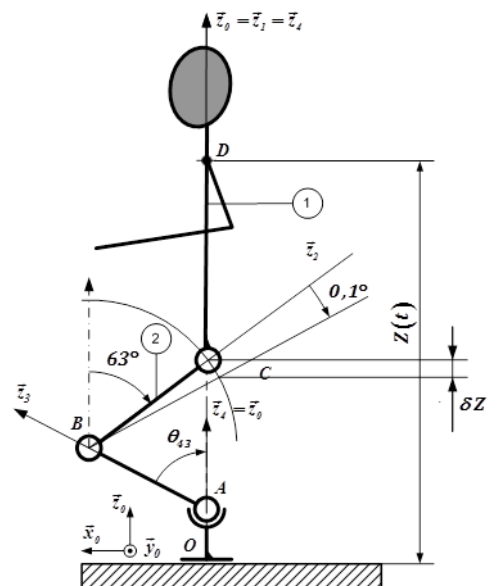
Si on veut éventuellement annuler cette erreur qui est tout de même très petite vis-à-vis du cahier des charges, il suffit par exemple d'ajouter une action intégrale dans la correction. Il faudrait vérifier la stabilité du système pour que ce soit compatible.

Q24 :

$$\ddot{\theta}_m(t) = -\frac{8 \cdot \omega_0}{t_1^2} \cdot \left(t - \frac{t_1}{2}\right)$$

$$\ddot{\theta}_{\text{MAX}} = \frac{8 \cdot |\omega_0|}{t_1^2} \cdot \frac{t_1}{2} = \frac{4 \cdot |\omega_0|}{t_1}$$

Q25 :



$$\theta_m = -\frac{4 \cdot \omega_0}{3 \cdot t_1^2} \cdot \left(t - \frac{t_1}{2}\right)^3 + \omega_0 \cdot t + c$$

$$\theta_m(t=0) = 0 = \frac{4 \cdot \omega_0}{3 \cdot t_1^2} \cdot \frac{t_1^3}{8} + c$$

$$c = -\frac{\omega_0 \cdot t_1}{6}$$

$$\Delta\theta_m = -\frac{4 \cdot \omega_0}{3 \cdot t_1^2} \cdot \left(t_1 - \frac{t_1}{2}\right)^3 + \omega_0 \cdot t_1 - \frac{\omega_0 \cdot t_1}{6} = \frac{2 \cdot \omega_0 \cdot t_1}{3}$$

Q26 :
$$r_{32} = \frac{\theta_m}{\theta_{32}} = \frac{\Delta\theta_m}{\Delta\theta_{32}}$$

Ainsi :

$$\omega_0 = \frac{3}{2} \cdot \frac{r_{32}}{t_1} \cdot \Delta\theta_{32}$$

Q27 :

$$\Omega_0 = 10 \text{ rad.s}^{-1} = 95 \text{ tr/min} < 7000 \text{ tr/min}$$

Q28 : L'accélération angulaire maximale du moteur est

$$\ddot{\theta}_{\text{Max}} = \frac{4 \cdot |\omega_0|}{t_1} = \frac{4 \times 10}{10} = 4 \text{ rad.s}^{-2}$$

Et au niveau de l'articulation

$$\ddot{\theta}_{32\text{Maxi}} = 4/95,91 = 0,042 \text{ rad.s}^{-2}$$

Q29 : Il faut isoler le solide 1 (on utilise alors le principe des actions réciproques $C_{12} = -C_{21}$) et écrire le TMS en C projeté sur $\vec{y}_0$.

Q30 : Bilan des moments en C suivant $\vec{y}_0$:

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}(C, \text{patient} \rightarrow 1) \cdot \vec{y}_0 + \overrightarrow{\mathcal{M}}(C, \text{pes} \rightarrow 1) \cdot \vec{y}_0 + \overrightarrow{\mathcal{M}}(C, 2 \rightarrow 1) \cdot \vec{y}_0$$

Ainsi :

$$= (F + M_1 \cdot g) \cdot l_1 \cdot \sin \theta_{10} + C_{21}$$

Q31 : On a $C_{21} = -M_1 \cdot l_1 \cdot \ddot{Z}_D \cdot \sin \theta_{10} - (F + M_1 \cdot g) \cdot l_1 \cdot \sin \theta_{10}$

D'où $M_1 \cdot \dot{Z}_D \cdot \ddot{Z}_D = -(M_1 \cdot g + F) \cdot \dot{Z}_D + l_1 \cdot \sin \theta_{10} \cdot (F + M_1 \cdot (g + \ddot{Z}_D)) \cdot \dot{\theta}_{21} - C_{32} \cdot \dot{\theta}_{32}$

Q32 : En simplifiant par $\dot{Z}_D$: $M_1 \cdot \ddot{Z}_D = -(M_1 \cdot g + F) + l_1 \cdot \sin \theta_{10} \cdot (F + M_1 \cdot g + M_1 \cdot \ddot{Z}_D) \cdot 2,5 + C_{32} \cdot 5$

Enfin :

$$\ddot{Z}_D = -\frac{\ddot{\theta}_{32}}{5}$$

D'où : $M_1 \cdot \left(-\frac{\ddot{\theta}_{32}}{5}\right) = -(M_1 \cdot g + F) + l_1 \cdot \sin \theta_{10} \cdot \left(F + M_1 \cdot g - M_1 \cdot \frac{\ddot{\theta}_{32}}{5}\right) \cdot 2,5 + C_{32} \cdot 5$

$$C_{32} = \frac{1}{5} \cdot (F + M_1 \cdot g) \cdot (1 - 2,5 \cdot l_1 \cdot \sin \theta_{10}) + \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot l_1 \cdot \sin \theta_{10} - \frac{M_1}{5}\right) \cdot \ddot{\theta}_{32}$$

D'où :

$$A = \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot l_1 \cdot \sin \theta_{10} \cdot M_1 - \frac{M_1}{5}\right) \text{ et } B = \frac{1}{5} \cdot (F + M_1 \cdot g) \cdot (1 - 2,5 \cdot l_1 \cdot \sin \theta_{10})$$

Q33 :

$$C_{32} = 55 \text{ Nm}$$

D'où, si on suppose un rendement de 1 :

$$C_m = \frac{C_{32}}{r_{32}} = 0,57 \text{ Nm} < 2500 \text{ mNm}$$

Le couple de démarrage est 2500 mN.m ce qui est largement suffisant pour le scénario envisagé.

On remarque que les effets dynamiques sont négligeables par rapport aux efforts.

Problème 5 : Contrôle d'une machine de forage (extrait CCinp MP 2023)

Q1 : En supposant la liaison L2-3 parfaite, glissière de direction $\vec{z}$, la résultante de l'action de liaison vérifie $\vec{R}_{2 \rightarrow 3} \cdot \vec{z} = 0$. *

En isolant S3, le théorème de la résultante statique (applicable en quasi-statique), en projection sur $\vec{z}$, donne alors : $2F_w + F_{sol} - mg = 0$, soit $F_{sol} = mg - 2F_w$.

Sous ces hypothèses, la mesure de F_w permet de déterminer F_{sol} si m est connu.

* en un point P , $\{T_{2 \rightarrow 3}\} = \begin{Bmatrix} X_{23} & L_{23} \\ Y_{23} & M_{23} \\ 0 & N_{23} \end{Bmatrix}_{P,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$.

Q2 : Isolons Σ , soumis aux actions mécaniques extérieures

- du sol sur (3),
- du poids sur Σ en G,
- des actions de contact en I et en J.

Le théorème du moment statique en O, projeté sur $\vec{y}$ donne : $\overrightarrow{M_{O,sol \rightarrow 3}} \cdot \vec{y} + \overrightarrow{M_{O,pes \rightarrow \Sigma}} \cdot \vec{y} + a F_g - a F_d = 0$

avec $\overrightarrow{M_{O,sol \rightarrow 3}} = \vec{0} + (\overrightarrow{OF} \wedge F_{sol} \vec{z}) = F_{sol} (R \vec{x}_2) \wedge \vec{z} = -F_{sol} R \vec{y}_2$

soit $\overrightarrow{M_{O,sol \rightarrow 3}} \cdot \vec{y} = -F_{sol} R \cos \theta$

et $\overrightarrow{M_{O,pes \rightarrow \Sigma}} \cdot \vec{y} = 0 + (\overrightarrow{OG} \wedge (-Mg) \vec{z}) \cdot \vec{y} = Mg r \cos \theta$

D'où : $-F_{sol} R \cos \theta + Mg r \cos \theta + a F_g - a F_d = 0$ (i).

Le théorème de la résultante statique en projection sur $\vec{z}$ donne : $F_g + F_d + F_{sol} - Mg = 0$ (ii).

a(ii)+(i) donne $F_{sol}(a - R \cos \theta) - Mg(a - r \cos \theta) + 2a F_g = 0$,

soit $F_g = F_{sol} \frac{R \cos \theta - a}{2a} + Mg \frac{a - r \cos \theta}{2a}$

a(ii) - (i) donne aussi : $F_d = -F_{sol} \frac{R \cos \theta + a}{2a} + Mg \frac{a + r \cos \theta}{2a}$.

Q3 : Par hypothèse, F_{sol} est nul et $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$.

Le basculement induit une perte de contact en I (chenille gauche). Il y a basculement si : $F_g = 0$.

La condition de non basculement s'écrit alors : $F_g > 0$, soit $Mg \frac{a - r \cos \theta}{2a} > 0$, soit : $r \cos \theta < a$.

La projection sur le sol de G, centre de gravité de l'ensemble porté par le châssis, doit être situé entre les 2 chenilles.

$b_{\%}$ est la distance de G au plan médian $(O, \vec{y}, \vec{z})$, $|r \cos \theta|$, en proportion de la distance au plan médian de la chenille, a . D'où le résultat $b_{\%} = 100 \frac{|r \cos \theta|}{a}$.

Q4 : L'exigence 1.2 impose $b_{\%} < 0,5$, outil levé ($F_{sol} = 0$) et dans le cas le plus défavorable, soit pour $\theta = 0$ ou π .

On obtient : $r < 0,5a$.

G est le barycentre du système $\{(G_t, m_t), (G_e, m_e), (G_c, m_c)\}$ et vérifie $(m_t + m_e + m_c)\overrightarrow{OG} = m_t\overrightarrow{OG_t} + m_e\overrightarrow{OG_e} + m_c\overrightarrow{OG_c}$.

En projection sur $\vec{x}$: $(m_c + m_e + m_t)r = 4,4m_e - 4,3m_c$ soit $r = \frac{4,4m_e - 4,3m_c}{m_c + m_e + m_t}$

En en déduit : $m_c = \frac{4,4m_e - (m_e + m_t)r}{r + 4,3}$, avec $m_c = n_{cp} \times m_1$ et n_{cp} valeur entière et $r < 0,5a$.

D'où la condition : $n_{cp} \geq \frac{4,4m_e - (m_e + m_t)0,5a}{(0,5a + 4,3)m_1}$. Application numérique : $n_{cp} \geq 2,7$, soit $n_{cp} = 3$.

Q5 : Par définition, F_{eq} vérifie : $F_{eq}\vec{z} = F_{sol}\vec{z} - Mg\vec{z}$, d'où $F_{eq} = F_{sol} - Mg$ avec $F_{sol} = mg - 2F_w$.

On obtient : $F_{eq} = -(M - m)g - 2F_w$.

La position de E vérifie : $\overrightarrow{M_{E,eq \rightarrow f}(E)} = \overrightarrow{M_{E,sol \rightarrow 3}(E)} + \overrightarrow{M_{E,pes \rightarrow \Sigma}(E)} = \vec{0}$.

avec : $\overrightarrow{M_{E,sol \rightarrow 3}(E)} = -(R - e)F_{sol} \vec{y}_2$ et $\overrightarrow{M_{E,pes \rightarrow \Sigma}(E)} = -(e - r)Mg \vec{y}_2$.

En projection sur $\vec{y}_2$, on obtient : $e = \frac{RF_{sol} - rMg}{F_{sol} - Mg}$, soit $e = \frac{R(mg - 2F_w) - rMg}{-(M - m)g - 2F_w}$

Q6 : L'action élémentaire est un glisseur qui passe par P. $\overrightarrow{dF_{0 \rightarrow cg}(P)} = \left(A \frac{y}{L} + B\right) dx dy \vec{z}$

Et : $\overrightarrow{dM_{0,0 \rightarrow cg}(P)} = \vec{0} + \overrightarrow{OP} \wedge \overrightarrow{dF_{0 \rightarrow cg}(P)} = (x \vec{x} + y \vec{y}) \wedge \left(A \frac{y}{L} + B\right) dx dy \vec{z}$. On obtient :

$$\overrightarrow{dM_{0,0 \rightarrow cg}(P)} = \left(A \frac{y}{L} + B\right) (y \vec{x} - x \vec{y}) dx dy$$

Q7 : Par intégration sur la surface de contact sol / chenille gauche :

$$\overrightarrow{F_{0 \rightarrow cg}} = \iint \overrightarrow{dF_{0 \rightarrow cg}(P)} = \vec{z} \int_{-L/2}^{L/2} \int_{a-l/2}^{a+l/2} \left(\frac{A}{L}y + B\right) dx dy = \vec{z} \int_{-L/2}^{L/2} \left(\frac{A}{L}y + B\right) dy \int_{-a-l/2}^{-a+l/2} dx$$

$$\text{D'où } \overrightarrow{F_{0 \rightarrow cg}} = \vec{z} l \left[\frac{A}{2L}y^2 + By \right]_{-L/2}^{L/2} \Rightarrow : \overrightarrow{F_{0 \rightarrow cg}} = Ll B \vec{z}$$

Pour le moment en O :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M_{0,0 \rightarrow cg}} &= \iint \overrightarrow{dM_{0,0 \rightarrow cg}(P)} = \vec{x} \int_{-L/2}^{L/2} \int_{a-l/2}^{a+l/2} \left(\frac{A}{L}y + B\right) y dx dy - \vec{y} \int_{-L/2}^{L/2} \int_{a-l/2}^{a+l/2} \left(\frac{A}{L}y + B\right) x dx dy \\ &= \vec{x} \int_{-L/2}^{L/2} \left(\frac{A}{L}y + B\right) y dy \int_{-a-l/2}^{-a+l/2} dx - \vec{y} \int_{-L/2}^{L/2} \left(\frac{A}{L}y + B\right) dy \int_{-a-l/2}^{-a+l/2} x dx \\ &= \vec{x} l \left[\frac{A}{3L}y^3 + \frac{B}{2}y^2 \right]_{-L/2}^{L/2} - \vec{y} \left[\frac{A}{2L}y^2 + By \right]_{-L/2}^{L/2} \times \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-a-l/2}^{-a+l/2} \end{aligned}$$

$$\text{On obtient : } \overrightarrow{M_{0,0 \rightarrow cg}} = \frac{lL^2}{12} A \vec{x} + alL B \vec{y}$$

Q8 : Dans l'ordre :

- théorème de la résultante statique en projection sur $\vec{z}$;
- théorème du moment statique en O, en projection sur $\vec{x}$;
- théorème du moment statique en O, en projection sur $\vec{y}$

appliqués à l'ensemble Σ .

Q9 : En notant (i), (ii) et (iii) les 3 équations (1).

- avec $A = C$, (ii) donne : $A = \frac{-F_{eq}}{lL} \frac{6e \sin \theta}{L}$,

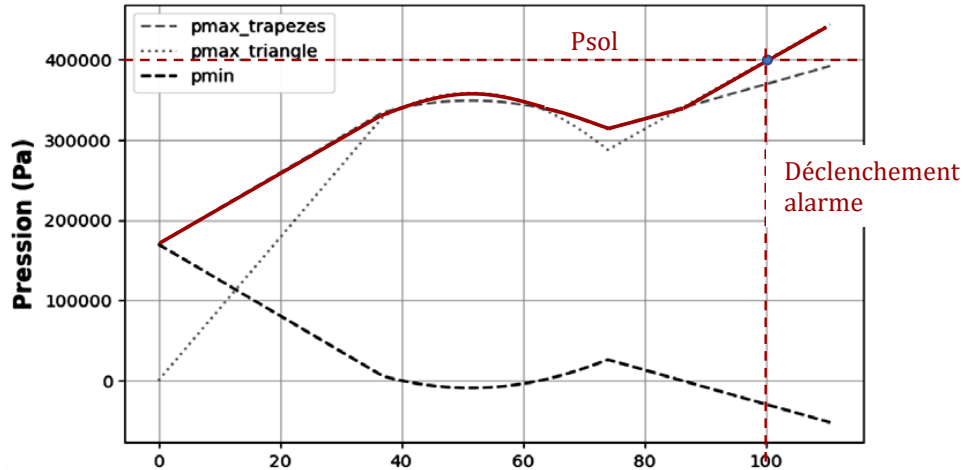
- (i)+(iii) donne : $D = \frac{-F_{eq}}{2lL} \left(1 + \frac{e \cos \theta}{a}\right)$,
- (i)-(iii) donne : $B = \frac{-F_{eq}}{2lL} \left(1 - \frac{e \cos \theta}{a}\right)$.

Si $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$, $p_{max} = D + |A/2|$, sinon $p_{max} = B + |A/2|$. Dans les deux cas, on trouve la relation demandée : $p_{max} = \frac{-F_{eq}}{2lL} \left(1 + \frac{e|\cos \theta|}{a} + \frac{6e|\sin \theta|}{L}\right)$.

Q10 : La pression maximale admissible pour le gravier compact est de 400 kPa.

L'indicateur b% reste en dessous la valeur de déclenchement de l'alarme.

L'alarme se déclenche lorsque la pression calculée atteint 400 000 Pa, soit à l'instant 100 s.



Q11 : Les indicateurs contrôlent indépendamment le risque de basculement et le risque d'enfoncement dans le sol.

$$\text{Q12 : } \overrightarrow{V(I, 4/0)} = \overrightarrow{V(I, 4/3)} + \overrightarrow{V(I, 3/cable)} + \overrightarrow{V(I, cable/0)}$$

Avec

- mouvement de rotation de 4 par rapport à 3 d'axe $(C, \vec{y})$,

$$\overrightarrow{V(I, 4/3)} = \overrightarrow{V(C, 4/3)} + \vec{IC} \wedge \omega_{4/3} \vec{y} = \vec{0} - R_3 \vec{x} \wedge (-\omega_3 \vec{y}) = R_3 \omega_3 \vec{z}$$
- non glissement du câble sur la poulie, $\overrightarrow{V(I, 3/cable)} = \vec{0}$
- câble attaché en O, donc fixe par rapport à 0, $\overrightarrow{V(I, cable/0)} = \vec{0}$

D'où : $\overrightarrow{V(I, 4/0)} \cdot \vec{z} = R_3 \omega_3$.

De plus, le mouvement de 4 par rapport à 0 est une translation : $\overrightarrow{V(I, 4/0)} \cdot \vec{z} = \overrightarrow{V(D, 4/0)} \cdot \vec{z} = V$.

Q13 : on a $V = -R_3 \omega_3 + R_1 \omega_1$ et $V = R_3 \omega_3$. En remplaçant, on obtient : $V = \frac{R_1}{2} \omega_1$, soit : $R_{eq} = \frac{R_1}{2}$

$$\text{Q14 : } H_9 = k_r \quad H_{10} = \frac{2}{R_2} \quad H_{11} = K_{gen}$$

Bonus : la vitesse de translation de la table (V) est la moitié de celle du câble par rapport à 0 (notons-là Vc). Vu en Q13. Au niveau de la poulie 2, on traduit le RSG (« V=R.ω ») : $Vc = R_2 \cdot \omega_2 = 2 \cdot V$ d'où $\omega_2 = \frac{2}{R_2} V$ et l'expression de H_{10} .

Q15 : Les ressorts étant en parallèle, les allongements sont tous identiques. L'action du ressort équivalent est la somme des actions de chacun des ressorts : $\vec{F}_{nr} = \sum_{i=1}^n k(\Delta z_0 - \Delta z) \vec{z} = n k(\Delta z_0 - \Delta z) \vec{z}$.

Par identification on trouve $k_T = n k$. De même, pour les amortisseurs : $\lambda_T = n \lambda$.

Q16 : Isolons (5), soumis aux actions mécaniques extérieures du poids $M_K g$, des ressorts et amortisseurs et de la liaison glissière 4-5.

A l'équilibre, le théorème de la résultante statique en projection sur $\vec{z}$ donne :

$-M_K g - k_T(\Delta z_0 - \Delta z_e) + \lambda_T \Delta \dot{z} + F_{sol} = 0$, avec $\Delta \dot{z} = 0$ à l'équilibre et $F_{sol} = 0$ car le système est suspendu.

D'où : $-M_K g - k_T(\Delta z_0 - \Delta z_e) = 0$

Isolons (4+5), soumis aux actions mécaniques extérieures des poids sur (4) et (5), des câbles et de la liaison glissière 4-0.

A l'équilibre, le théorème de la résultante statique en projection sur $\vec{z}$ donne : $2F_{we} - (M_T + M_K)g = 0$

Q17 : Les actions mécaniques extérieures à 4 proviennent des câbles, de son poids, des ressorts et amortisseurs et des liaisons glissières avec 0 et 5.

Le théorème de la résultante dynamique, en projection sur $\vec{z}$ donne :

$$M_T \ddot{z}_4 = 2F_w - M_T g + k_T(\Delta z_0 - \Delta z) - \lambda_T \Delta \dot{z}$$

Q18 : Avec le changement de variable proposé : $\Delta z = z_4 - z_5 = \hat{z}_4 - \hat{z}_5 + \Delta z_e$.

L'équation de la question précédente devient :

$$\begin{aligned} M_T \ddot{\hat{z}}_4 &= 2F_{we} + \delta F_w - M_T g + k_T(\Delta z_0 - \hat{z}_4 + \hat{z}_5 - \Delta z_e) - \lambda_T(\dot{\hat{z}}_4 - \dot{\hat{z}}_5) \\ \Leftrightarrow M_T \ddot{\hat{z}}_4 &= 2F_{we} - M_T g + k_T(\Delta z_0 - \Delta z_e) + \delta F_w + k_T(-\hat{z}_4 + \hat{z}_5) - \lambda_T(\dot{\hat{z}}_4 - \dot{\hat{z}}_5) \end{aligned}$$

Avec, à l'équilibre : $2F_{we} - M_T g = M_K g$, soit $2F_{we} - M_T g + k_T(\Delta z_0 - \Delta z_e) = M_K g + k_T(\Delta z_0 - \Delta z_e) = 0$.

D'où, par rapport à la position d'équilibre : $M_T \ddot{\hat{z}}_4 = \delta F_w + k_T(-\hat{z}_4 + \hat{z}_5) - \lambda_T(\dot{\hat{z}}_4 - \dot{\hat{z}}_5)$.

En regroupant les termes, on obtient la première équation recherchée : $M_T \ddot{\hat{z}}_4 + \lambda_T \dot{\hat{z}}_4 + k_T \hat{z}_4 = \lambda_T \dot{\hat{z}}_5 + k_T \hat{z}_5 + \delta F_w$.

Q19 : L'équation donnée dans le sujet, s'écrit, après changement de variables :

$$\begin{aligned} M_K \ddot{\hat{z}}_5 &= F_{sol} - k_T(\Delta z_0 - \hat{z}_4 + \hat{z}_5 - \Delta z_e) + \lambda_T(\dot{\hat{z}}_4 - \dot{\hat{z}}_5) - M_K g \\ \Leftrightarrow M_K \ddot{\hat{z}}_5 &= 2F_{sol} - k_T(\Delta z_0 - \Delta z_e) - M_K g - k_T(\hat{z}_5 - \hat{z}_4) + \lambda_T(\dot{\hat{z}}_4 - \dot{\hat{z}}_5) \end{aligned}$$

A l'équilibre, $-k_T(\Delta z_0 - \Delta z_e) - M_K g = 0$, d'où $M_K \ddot{\hat{z}}_5 = 2F_{sol} - k_T(\hat{z}_5 - \hat{z}_4) + \lambda_T(\dot{\hat{z}}_4 - \dot{\hat{z}}_5)$.

En regroupant les termes, on obtient la deuxième équation recherchée.

La première équation donne : $Z_4(p)(M_T p^2 + \lambda_T p + k_T) = (k_T + \lambda_T p)Z_5(p) + \Delta F_w(p)$.

De plus, $v(t) = \frac{dz_4(t)}{dt}$, soit $Z_4(p) = \frac{V(p)}{p}$.

On obtient $\Delta F_w(p) = \frac{k_T + \lambda_T p + M_T p^2}{p} V(p) - (k_T + \lambda_T p)Z_5(p)$ (i)

On en déduit $H_8(p) = \frac{k_T + \lambda_T p + M_T p^2}{p}$

La deuxième équation donne : $Z_5(p) = \frac{1}{k_T + \lambda_T p + M_K p^2} \left[(k_T + \lambda_T p) \frac{V(p)}{p} + F_{sol}(p) \right]$.

On en déduit $H_6(p) = \frac{k_T + \lambda_T p}{p}$ Et, en remplaçant $Z_5(p)$ dans (i) : $H_7(p) = \frac{k_T + \lambda_T p}{k_T + \lambda_T p + M_K p^2}$

Q20 : On obtient :

$$\begin{aligned} Q_p(p) &= K_s U_s(p) & H_1(p) &= K_s \\ \frac{V_0}{B} p \Delta P(p) &= Q_p(p) - Q_m(p) & H_2(p) &= \frac{B}{V_0 p} \\ Q_m(p) &= C_Y \Omega_m(p) & H_3(p) &= C_Y \\ C_m(p) &= C_Y \Delta P(p) & H_4(p) &= C_Y \\ (a + J_{eq} p) \Omega_m(p) &= C_m(p) - C_r(p) & H_5(p) &= \frac{1}{a + J_{eq} p} \end{aligned} \quad \Rightarrow$$

Q21 : K_{ihm} permet de s'assurer qu'en régime permanent, l'image de l'erreur ϵ_V est nulle lorsque l'erreur est nulle, qu'elle que soit la consigne.

Condition vérifiée si $\boxed{K_{ihm} = K_{gen} \frac{2}{R_2}}$.

Q22 :

$$\frac{\Omega_m(p)}{U_s(p)} = H_1(p) \frac{H_2(p) H_3(p) H_5(p)}{1 + H_2(p) H_3(p) H_4(p) H_5(p)}$$

Q23 :

$$G_{BO}(p) = \frac{K_0 K_p K_h}{1 + \frac{2z_h}{\omega_h} p + \frac{p^2}{\omega_h^2}}$$

Q24 : La fonction de transfert en boucle ouverte est d'ordre 2 et de classe 0.

Le modèle est stable, mais l'erreur statique n'est pas nulle. L'exigence 2.1.1 ne peut être satisfaite.

$$Q25 : C(p) = K_p \frac{1+T_i p}{p} \quad \text{et} \quad G_{BO}(p) = \frac{K_0 K_p K_h (1+T_i p)}{p \left(1 + \frac{2z_h}{\omega_h} p + \frac{p^2}{\omega_h^2} \right)}, \text{ d'ordre 3 et de classe 1.}$$

Si le modèle est stable, l'erreur statique sera nulle. L'exigence de précision est satisfaite.

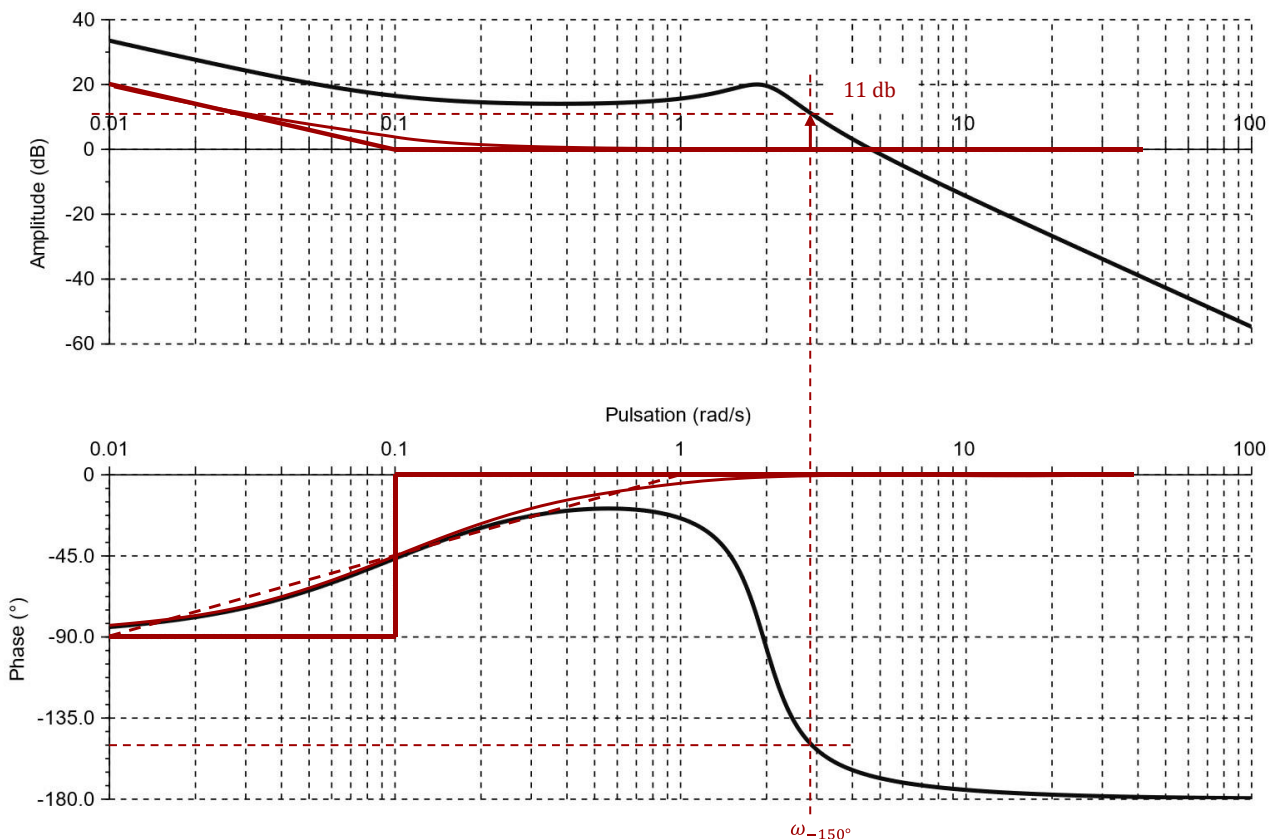
Justification par le calcul :

$$\begin{aligned} \text{Ecart statique : } \varepsilon_s &= \lim_{t \rightarrow \infty} (V_c(t) - V(t)) = \lim_{p \rightarrow 0} p(V_c(p) - V(p)) = \lim_{p \rightarrow 0} p \left(\frac{1}{p} - F t b f(p) \frac{1}{p} \right) \\ &= \lim_{p \rightarrow 0} \left(1 - \frac{G_{BO}(p)}{1 + G_{BO}(p)} \right) = \lim_{p \rightarrow 0} \left(\frac{1}{1 + G_{BO}(p)} \right) = 0 \text{ si classe } G_{BO} \geq 1, \neq 0 \text{ sinon} \end{aligned}$$

Q26 : Avec $K_p = 1$ et $T_i = 10$ s, $C(p) = \frac{1}{10p} (1 + 10p)$.

Comportement asymptotique :

- aux basses fréquences : asymptote du gain de pente -20 dB/décade passant par le point (1/10 rad/s, 0dB) ; phase à -90° ;
- pulsation de cassure à 0,1 rad/s. A cette valeur, le gain réel est 3dB au-dessus du point de cassure, la phase vaut -45° ;
- aux hautes fréquences : asymptote horizontale pour le gain à 0 dB ; phase à 0° .

La courbe réelle de phase passe aussi à -84° pour 0,01 rad/s et à 6° pour 1 rad/s.

Q27 : La marge de phase attendue est de 30° , correspondant à une phase de -150° . Pour la pulsation ω_{-150° correspondante, le gain est de 11 dB.

Pour obtenir la marge de phase demandée, il faut descendre la courbe de gain de 11 dB correspondant à un correcteur de gain $K_p = 10^{-11/20} \approx 0,28$.

La phase n'atteignant pas -180° , l'exigence sur la marge de gain est vérifiée.

Q28 : La présence d'un amortisseur a une influence positive sur la stabilité du système (la phase en pointillés est sensiblement plus élevée à haute fréquence) mais négative sur le temps de réponse (réduction sensible de la bande passante à 0 dB sur le gain en pointillés).

Le correcteur est bien choisi car il assure la précision statique en portant à 1 la classe de la FTBO (effet de l'intégrateur) tout en ne diminuant pas la phase en haute fréquence (effet du premier ordre au numérateur)