Durin Paule
6 Allée des Lauriers
71250 CLUNY.
Tél: 03.85.59.16.48.

Corrigé de l'épreuve commune du concours 2002 des Ecoles des Mines d'Albi, Ales, Douai, Nantes.

Problème d'analyse

1°) Soit $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ telle que $f(0)=1$ et $\forall t\neq 0$, $f(t)=\dfrac{Arctan(t)}{t}$.

1-1) Continuité et parité de f.

La fonction $Arctan$ est continue sur $\mathbf{R}$.

La fonction $t\to\dfrac{1}{t}$ est définie et continue sur chacun des intervalles $]-\infty,0[$ et $]0,+\infty[$.

Donc f est continue sur $]-\infty,0[$ et $]0,+\infty[$ comme produit de fonctions continues.

Au voisinage de 0, $Arctan(t)\sim t$ et donc $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{Arctan(t)}{t}=1=f(0)$, ce qui traduit que f est continue en 0.

Conclusion : f est continue sur $\mathbf{R}$.

La fonction $Arc\tan$ est impaire, donc $\forall t\neq 0$, $f(-t)=\dfrac{Arctan(-t)}{-t}=f(t)$ et f est paire.

1-2) Développement limité à l'ordre 1 en 0

$Arc\tan$ est dérivable sur $\mathbf{R}$ et $\forall t\in\mathbf{R}$, $Arctan'(t)=\dfrac{1}{1+t^2}$.

Donc, $Arctan'$ a un développement limité à l'ordre 2 en 0 qui est :

$Arctan'(t)=1-t^2+t^2\varepsilon_1(t)$ avec $\lim\limits_{t\to 0}\varepsilon_1(t)=0$.

Alors $Arctan$ a un développement limité à l' ordre 3 en 0 qui est :

$Arctan(t)=t-\dfrac{t^3}{3}+t^3\varepsilon_2(t)$ avec $\lim\limits_{t\to 0}\varepsilon_2(t)=0$. (sachant que $Arc\tan(0)=0$)

Par suite, f a un développement limité à l' ordre 2 en 0 qui est :

$f(t)=1-\dfrac{t^2}{3}+t^2\varepsilon_2(t)$ et par troncature, a un développement limité à l' ordre 1 en 0 qui est :

$f(t)=1+t\varepsilon(t)$ avec $\lim\limits_{t\to 0}\varepsilon(t)=0$.

Conclusion f est donc dérivable en 0 et on a : $f'(0)=0$.

1-3) Dérivabilité de f.

$Arctan$ et $t\to\dfrac{1}{t}$ sont dérivables sur $]-\infty,0[$ et $]0,+\infty[$. Donc sur chacun de ces intervalles, f est dérivable comme produit de deux fonctions dérivables.

Comme elle est dérivable en 0 elle est dérivable sur $\mathbf{R}$.

Conclusion $\forall t \in \mathbf{R}^*$, $f'(t) = \dfrac{1}{t(1+t^2)} - \dfrac{Arctan(t)}{t^2}$, $f'(0) = 0$.

1-4) Signe de f' .

Soit $t \in \mathbf{R}^*$ et $I(t) = \int_0^t \dfrac{w^2}{(1+w^2)^2}\,dw$. Effectuons une intégration par parties :

On pose $\begin{cases} u(w) = w & u'(w) = 1 \\ v'(w) = \dfrac{w}{(1+w^2)^2} & v(w) = -\dfrac{1}{2(1+w^2)} \end{cases}$

u, v sont des fonctions rationnelles de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$, on a donc :

$I(t) = \left[\dfrac{-w}{2(1+w^2)}\right]_0^t + \dfrac{1}{2}\int_0^t \dfrac{dw}{1+w^2} = \dfrac{-t}{2(1+t^2)} + \dfrac{1}{2}Arctan(t)$ soit :

$I(t) = \dfrac{-t^2}{2}\left(\dfrac{1}{t(1+t^2)} - \dfrac{Arctan(t)}{t}\right) = \dfrac{-t^2}{2} f'(t)$.

Vu la parité de f , il suffit de l' étudier sur $]0,+\infty[$. On a alors $\forall t > 0$, $I(t) > 0$ car intégrale sur $[0,t]$ d' une fonction continue, strictement positive sur $]0,t]$.

Conclusion : $\forall t \in]0,+\infty[$, $f'(t) < 0$ et donc f est décroissante sur $]0,+\infty[$.

1-5) Courbe représentative de f .

$\lim\limits_{t\to+\infty} Arctan(t) = \dfrac{\pi}{2}$, donc $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 0$, d' où le tableau de variations.

t	0	$+\infty$
f	1 $\searrow$	0

$f(1) = Arctan(1) = \dfrac{\pi}{4}$. Pour le graphe, voir graphe commun avec celui de ϕ .

2°) Soit $\phi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ telle que $\phi(0) = 1$ et $\forall x \neq 0$, $\phi(x) = \dfrac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt$.

2-1) Continuité de ϕ

f est continue sur $\mathbf{R}$. Donc elle admet des primitives sur $\mathbf{R}$, soit F celle qui s' annule en 0 .

Alors $\forall x \neq 0$, $\phi(x) = \dfrac{1}{x}F(x)$.

F est dérivable donc continue sur $\mathbf{R}$. ϕ est donc continue sur $]-\infty,0[$ et $]0,+\infty[$ comme produit de fonctions continues.

$F(0)=0$ donc $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{F(x)}{x}=F'(0)=f(0)=1=\phi(0)$ donc ϕ est continue en 0.

Conclusion : ϕ est continue sur $\mathbf{R}$.

$\forall x\neq 0,\quad \phi(-x)=\dfrac{1}{-x}\displaystyle\int_0^{-x} f(t)\,dt$. On fait le changement de variable $t=-u$.

$\displaystyle\int_0^{-x} f(t)\,dt=\int_0^{x} f(-u)\,(-du)=-\int_0^{x} f(u)\,du$ car f est paire. On a donc :

Conclusion : $\forall x\neq 0,\quad \phi(-x)=\phi(x)$. Donc ϕ est paire.

2-2) Encadrement de ϕ.

- Soit $x>0$. Sur $[0,x]$, f est décroissante, d'où $\forall t\in[0,x],\quad f(x)\le f(t)\le f(0)=1$.

  Par positivité de l'intégrale on a : $\displaystyle\int_0^x f(x)\,dt\le\int_0^x f(t)\,dt\le\int_0^x dt$ soit :

  $xf(x)\le x\phi(x)\le x$ et enfin puisque $x>0,\quad f(x)\le\phi(x)\le 1$.
- Soit $x<0$, alors $-x>0$ et donc $f(-x)\le\phi(-x)\le 1$. Or f et ϕ sont paires, donc on a encore : $f(x)\le\phi(x)\le 1$.

  On a donc : $\forall x\neq 0,\quad f(x)\le\phi(x)\le 1$, et comme $f(0)=\phi(0)=1$, on a :

Conclusion : $\forall x\in\mathbf{R},\quad f(x)\le\phi(x)\le 1$.

2-3) Dérivée de ϕ.

On a vu que $\forall x\neq 0,\quad \phi(x)=\dfrac{1}{x}F(x)$ avec F dérivable et $F'=f$.

Dès lors, ϕ est dérivable sur $]-\infty,0[$ et $]0,+\infty[$ comme produit de deux fonctions dérivables.

On a alors : $\phi'(x)=\dfrac{F'(x)}{x}-\dfrac{F(x)}{x^2}$ soit $\phi'(x)=\dfrac{1}{x}[f(x)-\phi(x)]$.

Dérivabilité de ϕ en 0.

On connait le développement limité de f à l'ordre en 0.

On en déduit celui de F, puis celui de ϕ.

$f(x)=1+x\varepsilon(x)\qquad \lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x)=0$.

$F(x)=x+x^2\varepsilon_3(x)\qquad \lim\limits_{x\to 0}\varepsilon_3(x)=0\qquad F(0)=0$.

$\phi(x)=1+x\varepsilon_3(x)\qquad \lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x)=0$.

ϕ admet un développement limité à l'ordre 1 en 0, donc ϕ est dérivable en 0 et $\phi'(0)=0$.

D'après la question 2-2 $\phi'(x)<0$ sur $]0,+\infty[$ et $\phi'(x)>0$ sur $]-\infty,0[$.

ϕ est donc croissante sur $]-\infty,0[$ et décroissante sur $]0,+\infty[$.

2-4) Etude de ϕ au voisinage de $+\infty$.

$\forall t\in\mathbf{R},\quad Arctan(t)<\dfrac{\pi}{2}$. Soit alors $x>1$. $\forall t\in[1,x],\quad 0<f(t)<\dfrac{\pi}{2t}$ d'où :

$0\le\displaystyle\int_1^x f(t)\,dt\le\frac{\pi}{2}\int_1^x\frac{dt}{t}$ soit $0\le\displaystyle\int_1^x f(t)\,dt\le\frac{\pi}{2}\ln x$. On en déduit :

pour $x>1$, $0 \le \frac{1}{x}\int_1^x f(t)\,dt \le \frac{\pi}{2x}\ln x$ et comme $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_1^x f(t)\,dt = 0$.

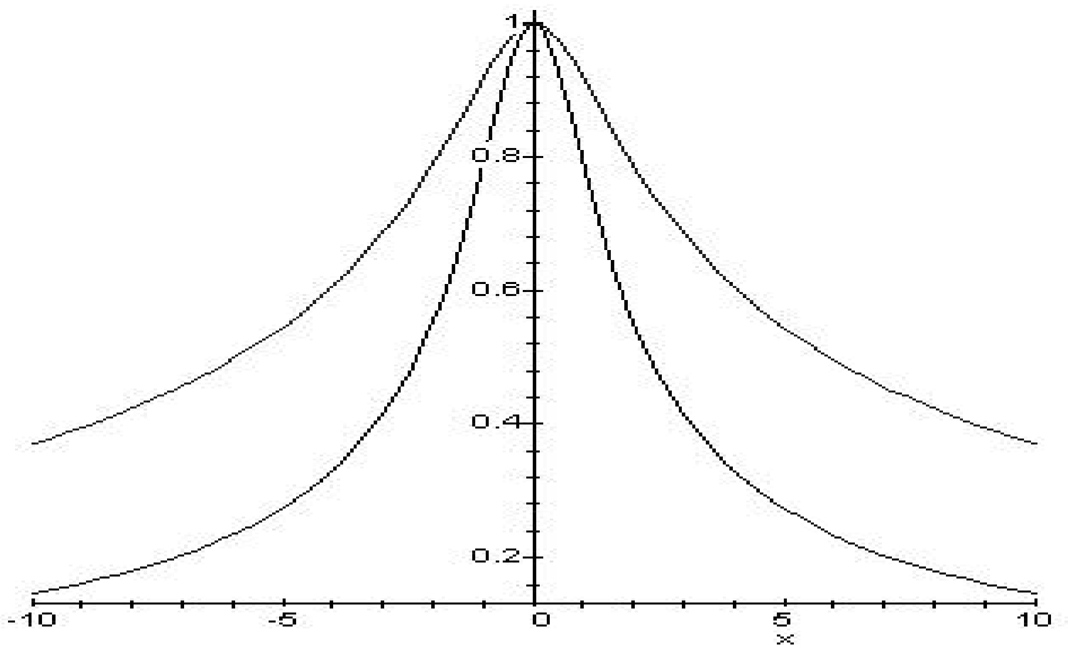
Or $\phi(x) = \frac{1}{x}\int_0^1 f(t)\,dt + \frac{1}{x}\int_1^x f(t)\,dt$.

Sur $[0,1]$, $0 < f(t) \le 1$ et donc $0 \le \frac{1}{x}\int_0^1 f(t)\,dt \le \frac{1}{x}$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^1 f(t)\,dt = 0$.

Conclusion : $\lim_{x\to+\infty} \phi(x) = 0$.

2-5) Courbe représentative de ϕ.

Le tableau de variation de ϕ est le même que celui de f.



3°) Soit la suite $(u_n)_{n\in N}$ définie par $u_0 \in \mathbf{R}$, $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = \phi(u_n)$

3-1) Soit $u : t \mapsto \frac{t}{1+t^2}$. Etudions cette fonction sur l' intervalle $[0,+\infty[$.

$u'(t) = \frac{1-t^2}{(1+t^2)^2}$ d' où le tableau de variation :

t	0		1		$+\infty$
$u'(t)$		$+$	0	$-$	
$u(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0

Conclusion : On a donc bien $\forall t \geq 0$, $\quad 0 \leq \dfrac{t}{1+t^2} \leq \dfrac{1}{2}$.

3-2) • Montrons que $\forall x > 0$, $|\phi'(x)| \leq \dfrac{1}{x}(1-f(x)) = \dfrac{1}{x^2}\int_0^x \dfrac{t^2}{1+t^2}\,dt$.

Pour $x > 0$, $\phi'(x) < 0$ et on a $|\phi'(x)| = \dfrac{1}{x}(\phi(x) - f(x))$ d' après 2-3.

Or $\forall x \in \mathbf{R}$, $\quad 0 \leq \phi(x) \leq 1$, d' où $|\phi'(x)| \leq \dfrac{1}{x}(1-f(x)) = \dfrac{1}{x}\left(1 - \dfrac{Arctan(x)}{x}\right)$ que l' on peut écrire : $\dfrac{1}{x^2}(x - Arctan(x))$ soit encore : $\dfrac{1}{x^2}\int_0^x \left(1 - \dfrac{1}{1+t^2}\right)dt$, c' est à dire :

$$\frac{1}{x^2}\int_0^x \frac{t^2}{1+t^2}\,dt .$$

Conclusion : $\forall x > 0$, $|\phi'(x)| \leq \dfrac{1}{x}(1-f(x)) = \dfrac{1}{x^2}\int_0^x \dfrac{t^2}{1+t^2}\,dt$.

• On a, pour tout $x > 0$ et tout $t \in [0, x]$, $0 \leq t\dfrac{t}{1+t^2} \leq \dfrac{t}{2}$ d' après 3-1.

D' où, $\dfrac{1}{x^2}\int_0^x \dfrac{t^2}{1+t^2}\,dt \leq \dfrac{1}{x^2}\int_0^x \dfrac{t}{2}\,dt = \dfrac{1}{4}$ et finalement pour $x > 0$, $|\phi'(x)| \leq \dfrac{1}{4}$.

On a par ailleurs que $\phi'(0) = 0$ et que ϕ est paire donc ϕ' impaire. Par suite :

Conclusion : $\forall x \in \mathbf{R}$, $|\phi'(x)| \leq \dfrac{1}{4}$.

3-3) Equation $\phi(x) = x$.

Soit $\psi(x) = \phi(x) - x$, $\quad \psi'(x) = \phi'(x) - 1 < 0$ d' après ce qui précède.

ψ est donc décroissante sur $\mathbf{R}$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} \psi(x) = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to-\infty} \phi(x) = 0$, $\quad \lim\limits_{x\to+\infty} \psi(x) = -\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} \phi(x) = 0$.

ψ étant continue, elle réalise une bijection de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}$ et ceci assure l' existence d' un unique réel α tel que $\psi(\alpha) = 0$, c' est à dire $\phi(\alpha) = \alpha$.

Conclusion : L' équation $\phi(x) = x$ admet une unique solution notée α.

Encadrement de α.

$\psi(0) = \phi(0) - 0 = 1$, $\psi(1) = \phi(1) - 1 < 0$ car $\forall x \neq 0$, $\phi(x) < 1$ et donc $\alpha \in \left]0,1\right[$.

3-4) ϕ est dérivable sur $\mathbf{R}$ et $|\phi'(x)| \leq \dfrac{1}{4}$. L' inégalité des accroissements finis appliquée sur l' intervalle d' extrémités α et u_n s' écrit $|\phi(u_n) - \phi(\alpha)| \leq \dfrac{1}{4}|u_n - \alpha|$ soit :

$|u_{n+1} - \alpha| \leq \dfrac{1}{4}|u_n - \alpha|$ et par suite on a :

$\forall n \in \mathbf{N}$, $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n |u_0 - \alpha|$ (récurrence immédiate!). Dès lors, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{4^n} = 0$

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$. **Conclusion** : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$.

4°) Résolution de l'équation différentielle $x^2 y' + xy = Arc\tan(x)$.

4-1) Sur chacun des intervalles $]-\infty,0[$ et $]0,+\infty[$, l'équation différentielle s'écrit $xy' + y = f(x)$.

Or $xy' + y$ est la dérivée de $x \mapsto xy(x)$, d'où $xy(x) = \int_0^x f(t)\,dt + \lambda$.

Conclusion : Sur chacun des deux intervalles les solutions sont de la forme : $y(x) = \phi(x) + \frac{\lambda}{x}$.

4-2) Solution de l'équation différentielle sur $\mathbf{R}$.

Une telle solution doit s'écrire : $y(x) = \begin{cases} \phi(x) + \frac{\lambda_1}{x} & \text{pour } x < 0 \\ \phi(x) + \frac{\lambda_2}{x} & \text{pour } x > 0 \end{cases}$ et il faut trouver

λ_1 et λ_2 pour que l'on puisse prolonger cette fonction en 0 en une fonction dérivable en 0.

La possibilité de prolonger par continuité en 0 nécessite $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ et alors $y(x) = \phi(x)$, dont on a vu qu'elle était bien une fonction dérivable sur $\mathbf{R}$.

Conclusion : ϕ est la seule solution de l'équation différentielle sur $\mathbf{R}$.

Problème d'algèbre

1°) Soit ψ l'endomorphisme de E de matrice $A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ relativement à la base B.

1-1) $\psi' = \frac{4}{3}\psi$ est l'endomorphisme de matrice $A' = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. ψ' est une isométrie:

En effet, $B = (e_1, e_2, e_3)$ étant une base orthonormée, on a :

$\|\psi'(e_1)\| = \|\psi'(e_2)\| = \|\psi'(e_3)\| = \frac{1}{3}\sqrt{1+4+4} = 1$ et

$\langle \psi'(e_1), \psi'(e_2) \rangle = \langle \psi'(e_1), \psi'(e_3) \rangle = \langle \psi'(e_2), \psi'(e_3) \rangle = \frac{1}{9}(-2-2+4) = 0$ ce qui fait que ψ' transforme une base orthonormée en une base orthonormée. cqfd.

Ensemble des vecteurs invariants.

Soit $u = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$ un vecteur invariant par ψ', on doit avoir :

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1 & 2 & 2\\ 2 & -1 & 2\\ 2 & 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$$ soit le système : $\begin{cases}-4x_1+2x_2+2x_3=0\\ 2x_1-4x_2+2x_3=0\\ 2x_1+2x_2-4x_3=0\end{cases}$. Celui-ci est

équivalent à : $\begin{cases}-2x_1+x_2+x_3=0\\ -3x_2+3x_3=0\\ 3x_2-3x_3=0\end{cases}$ soit finalement $x_1=x_2=x_3$.

L'ensemble des vecteurs invariants est la droite vectorielle D engendrée par $u_0=e_1+e_2+e_3$.

Cette isométrie vectorielle est donc une rotation vectorielle d'axe D et on a :

$\forall v\in D^{\perp}$, $\psi'(v)=\cos\theta\, v+\sin\theta\,\dfrac{u_0}{\|u_0\|}\wedge v$, θ étant une mesure de l'angle de la rotation.

$e_1-e_2\in D^{\perp}$ et $\psi'(e_1-e_2)=-e_1+e_2$ donc $\cos\theta=-1$ et $\sin\theta=0$ et donc $\theta=\pi$.

Conclusion : $\dfrac{4}{3}\psi$ est le demi tour d'axe dirigé par $u_0=e_1+e_2+e_3$.

1-2) $\psi=\dfrac{3}{4}\psi'=\dfrac{3}{4}Id\circ\psi'=\psi'\circ\dfrac{3}{4}Id$ et donc ψ est le produit de l'homothétie vectorielle de rapport $\dfrac{3}{4}$ et du demi tour précédent..

2°) Soit $S=\{\varphi\in L(E);\ \exists k\in[0,1[;\ \forall x\in E,\ \|\varphi(x)\|\le k\|x\|\}$.

2-1) Montrons que $\psi\in S\cap GL(E)$.

On a que $\psi\in GL(E)$ comme produit de deux automorphismes de E. (à savoir $\dfrac{3}{4}Id$ et l'isométrie ψ').

Par ailleurs, $\forall x\in E$, $\|\psi(x)\|=\dfrac{3}{4}\|x\|$ et donc $\psi\in S$. ($k=\dfrac{3}{4}$ convient)

Conclusion : $\psi\in S\cap GL(E)$.

2-2) $Id_E\notin S$ car $\forall x\in E$, $\|Id_E(x)\|=\|x\|$ et donc $\forall k\in[0,1[$, $\|Id_E(x)\|>k\|x\|$.

2-3) Soit φ_1 et φ_2 deux éléments de S. Alors, $\exists k_1$ et $k_2\in[0,1[$ tel que :
$\forall x\in E$, $\|\varphi_1(x)\|\le k_1\|x\|$ et $\forall x\in E$, $\|\varphi_2(x)\|\le k_2\|x\|$.

On a alors : $\forall x\in E$, $\|\varphi_1\circ\varphi_2(x)\|\le k_1\|\varphi_2(x)\|\le k_1k_2\|x\|$ avec $k_1k_2\in[0,1[$ et donc $\varphi_1\circ\varphi_2\in S$. **Conclusion** : S est stable pour $\circ$.

$S\cap GL(E)$ n'est pas un sous groupe de $GL(E)$ car tout sous groupe de $GL(E)$ contient Id_E. Or si $Id_E\notin S\cap GL(E)$. **Conclusion** : $S\cap GL(E)$ n'est pas un sous groupe de $GL(E)$

2-4) Soit $\varphi \in S$ et $x \in Ker(\varphi - Id_E)$. Alors, $\varphi(x) = x$ donc $\|\varphi(x)\| = \|x\|$, or par ailleurs $\|\varphi(x)\| \le k\|x\|$ avec $k \in [0,1[$. On devrait donc avoir $\|x\| \le k\|x\|$ ce qui n' est possible que si $\|x\| = 0$ soit $x = 0_E$.

On en déduit que $\varphi - Id_E$ est un endomorphisme injectif, et comme E est de dimension finie, $\varphi - Id_E$ est en fait bijectif, autrement dit $\varphi - Id_E \in GL(E)$.

2-5) Soit $\varphi \in S$, donc $\exists k \in [0,1[,\ \ \|\varphi(x)\| \le k\|x\|$. Mais alors, $\forall x \in E$, $\|x\| = 1 \Rightarrow \|\varphi(x)\| \le k$.

Réciproquement, soit $\varphi \in \mathscr{L}(E)$, tel que $\exists k \in [0,1[;\ \|x\| = 1 \Rightarrow \|\varphi(x)\| \le k$.

On a évidemment $\varphi(0_E) = 0_E$ et donc $0 = \|\varphi(0_E)\| \le k\|0_E\| = 0$.

Soit maintenant $x \in E$; $x \ne 0_E$. $\varphi(x) = \|x\|\varphi(\frac{x}{\|x\|})$ avec $\left\|\frac{x}{\|x\|}\right\| = 1$ donc :

$\|\varphi(x)\| = \|x\|\left\|\varphi(\frac{x}{\|x\|})\right\| \le k\|x\|$ et donc $\varphi \in S$.

<u>**Conclusion**</u> : $\varphi \in S$ si et seulement si $\exists k \in [0,1[;\ \forall x \in E$, $\|x\| = 1 \Rightarrow \|\varphi(x)\| \le k$.

2-6) Soit $\varphi \in L(E)$ et (e_1', e_2', e_3') une base orthonormée dans laquelle la matrice de φ est :

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \text{avec } \forall i \in \{1,2,3\},\ \ |\lambda_i| < 1.$$

On a alors pour $x = x_1e_1' + x_2e_2' + x_3e_3'$, $\varphi(x) = \lambda_1x_1e_1' + \lambda_2x_2e_2' + \lambda_3x_3e_3'$.

D' où $\|\varphi(x)\|^2 = \lambda_1^2x_1^2 + \lambda_2^2x_2^2 + \lambda_3^2x_3^2 \le [\max(\lambda_1^2, \lambda_2^2, \lambda_3^2)]\,(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$ soit, en posant $k = \sqrt{\max(\lambda_1^2, \lambda_2^2, \lambda_3^2)} < 1$, $\|\varphi(\mathrm{x})\| \le k\|x\|$. Rq: $k = \max(|\lambda_1|, |\lambda_2|, |\lambda_3|)$.

<u>**Conclusion**</u> : $\varphi \in S$.

3°) Soit μ l' endomorphisme de E dont la matrice relativement à B est $M = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

3-1) On définit $e_1' = \frac{1}{\sqrt{3}}(e_1 - e_2 - e_3)$, $e_2' = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + e_2)$, $e_3' = \frac{1}{\sqrt{6}}(e_1 - e_2 + 2e_3)$.

Il est clair que ces trois vecteurs sont normés.

On a aussi, de manière évidente, que $e_1' \perp e_2'$ et l' on constate que $e_3' = e_1' \wedge e_2'$.

(e_1', e_2', e_3') est donc bien une base B' orthonormée de E.

3-2) <u>Matrice de μ dans B'</u>.

Si on note P la matrice de passage de B à B', on pourrait utiliser la formule $M' = P^{-1}MP$, soit ici $M'={}^tPMP$ puisque $P^{-1}={}^tP$. On peut procéder directement en calculant :

$$\mu(e_1^{'})=\frac{1}{6\sqrt{3}}\left[(3e_1+e_2-e_3)-(e_1+3e_2+e_3)-(-e_1+e_2+e_3)\right]=\frac{1}{2\sqrt{3}}(e_1-e_2-e_3).$$

D' où : $\mu(e_1^{'})=\frac{1}{2}e_1^{'}$.

$$\mu(e_2^{'})=\frac{1}{6\sqrt{2}}\left[(3e_1+e_2-e_3)+(e_1+3e_2+e_3)\right]=\frac{1}{6\sqrt{2}}(4e_1+4e_2)=\frac{\sqrt{2}}{3}(e_1+e_2).$$

D' où : $\mu(e_2^{'})=\frac{2}{3}e_2^{'}$.

$$\mu(e_1^{'})=\frac{1}{6\sqrt{6}}\left[(3e_1+e_2-e_3)-(e_1+3e_2+e_3)+2(-e_1+e_2+e_3)\right]=0_E.$$

La matrice de μ dans B' est donc $M'=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0 & 0\\ 0 & \frac{2}{3} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$. D' après 2-6 $\mu\in S$.

4°) Soit φ_α l' endomorphisme de E dont la matrice relativement à B est $M_\alpha=\alpha\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}$.

4-1) Soit $x=x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3$, $x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$.

$\varphi_\alpha(x)=\alpha\left[(x_1-x_2)e_1+(x_2+x_3)e_2+(x_1-x_3)e_3\right]$.

$\|\varphi_\alpha(x)\|^2=\alpha^2\left[(x_1-x_2)^2+(x_2+x_3)^2+(x_1-x_3)^2\right]$ soit :

$\|\varphi_\alpha(x)\|^2=\alpha^2\left[2x_1^2+2x_2^2+2x_3^2-2x_1x_2+2x_2x_3-2x_1x_3\right]=\alpha^2\left[1+(x_1-x_2-x_3)^2\right]$

4-2) Soit $x=x_1^{'}e_1^{'}+x_2^{'}e_2^{'}+x_3^{'}e_3^{'}$ on a : $\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}\sqrt{2} & \sqrt{3} & 1\\ -\sqrt{2} & \sqrt{3} & -1\\ -\sqrt{2} & 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1^{'}\\ x_2^{'}\\ x_3^{'}\end{pmatrix}$ de sorte que

$x_1-x_2-x_3=\frac{1}{\sqrt{6}}\left[(\sqrt{2}x_1^{'}+\sqrt{3}x_2^{'}+x_3^{'})-(-\sqrt{2}x_1^{'}+\sqrt{3}x_2^{'}-x_3^{'})-(-\sqrt{2}x_1^{'}+2x_3^{'})\right]$ soit :

$x_1-x_2-x_3=\frac{1}{\sqrt{6}}\left[3\sqrt{2}x_1^{'}\right]=\sqrt{3}x_1^{'}$. Par suite : $\|\varphi_\alpha(x)\|^2=\alpha^2(1+3x_1^{'2})$.

Comme on a toujours $x_1^{'2}+x_2^{'2}+x_3^{'2}=1$, $x_1^{'2}\le 1$ et donc $\|\varphi_\alpha(x)\|^2\le 4\alpha^2$ soit :

<u>Conclusion</u> : $\|\varphi_\alpha(x)\|\le 2|\alpha|$.

L' inégalité précédente devient une égalité si le vecteur unitaire x a sa composante $x_1^{'}$ qui vérifie $x_1^{'2}=1$. On obtient donc deux vecteurs réalisant l' égalité : $x=\pm e_1^{'}$.

4-3) D' après 2-5 $\varphi_\alpha \in S$ si et seulement si $\exists k \in [0,1[;\ \forall x \in E,\ \|x\| = 1 \Rightarrow \|\varphi_\alpha(x)\| \le k$.

Donc • si $|\alpha| < \dfrac{1}{2}$, on a $\forall x \in E,\ \|x\| = 1 \Rightarrow \|\varphi_\alpha(x)\| \le 2|\alpha| = k < 1$ et $\varphi_\alpha \in S$.

• si $|\alpha| \ge \dfrac{1}{2}$, alors il existe x unitaire ($x = e_1'$) tel que $\|\varphi_\alpha(x)\| = 2|\alpha| \ge 1$ et $\varphi_\alpha \notin S$.

<u>Conclusion</u> : $\varphi_\alpha \in S$ si et seulement si $|\alpha| < \dfrac{1}{2}$.

5°) <u>Application affine</u> f <u>associée à un endomorphisme</u> φ <u>élément de</u> S.

$\forall M \in \mathscr{E},\ \overrightarrow{f(O).f(M)} = \varphi(\overrightarrow{OM})$

5-1) <u>Points invariants par</u> f.

$f(M) = M \Leftrightarrow \overrightarrow{f(O).M} = \varphi(\overrightarrow{OM})$ soit $\overrightarrow{f(O).O} + \overrightarrow{OM} = \varphi(\overrightarrow{OM})$ c' est à dire :

$\overrightarrow{f(O).O} = \varphi(\overrightarrow{OM}) - \overrightarrow{OM}$ et enfin $\overrightarrow{f(O).O} = (\varphi - Id_E)(\overrightarrow{OM})$.

5-2) On a vu en 2-4 que pour tout $\varphi \in S$, $\varphi - Id_E$ est bijective. Donc il existe un seul vecteur $\vec{u}$ tel que $(\varphi - Id_E)(\vec{u}) = \overrightarrow{f(O).O}$ et un seul point Ω tel que $\overrightarrow{O\Omega} = \vec{u}$.

<u>Conclusion</u> : f a un seul point invariant.

5-3) $\forall (A,B) \in \mathscr{E}^2$, $\overrightarrow{f(A).f(B)} = \varphi(\overrightarrow{AB})$, donc en particulier, comme $f(\Omega) = \Omega$ on a :

$$\forall M \in \mathscr{E},\ \overrightarrow{\Omega.f(M)} = \varphi(\overrightarrow{\Omega M}).$$

5-4) Soit la suite de points définie par $M_0 \in \mathscr{E}$, $\forall n \in \mathbf{N}$, $M_{n+1} = f(M_n)$.

5-4-1) On a $\overrightarrow{\Omega M_{n+1}} = \varphi(\overrightarrow{\Omega M_n})$. Donc $\left\|\overrightarrow{\Omega M_{n+1}}\right\| \le k \left\|\overrightarrow{\Omega M_n}\right\|$ et par une récurrence immédiate :

$\left\|\overrightarrow{\Omega M_n}\right\| \le k^n \left\|\overrightarrow{\Omega M_0}\right\|$. Comme $k \in [0,1[$, $\lim\limits_{n\to+\infty} k^n = 0$, et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left\|\overrightarrow{\Omega M_n}\right\| = 0$.

5-4-2) Soient les suites réelles définies par $x_0, y_0, z_0 \in \mathbf{R}$ et $\forall n \in \mathbf{N}$, $\begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{1}{4}x_n - \dfrac{1}{4}y_n + 1 \\ y_{n+1} = \dfrac{1}{4}y_n + \dfrac{1}{4}z_n + \dfrac{1}{2} \\ z_{n+1} = \dfrac{1}{4}x_n - \dfrac{1}{4}z_n + 1 \end{cases}$

Soit $M_n \in \mathscr{E}$ de coordonnées (x_n, y_n, z_n). On a que $M_{n+1} = f(M_n)$ où f est l' application affine, d' endomorphisme associé φ et telle que $f(O)$ a pour coordonnées $(1, \dfrac{1}{2}, 1)$.

La matrice de φ dans B est $\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. On a donc $\varphi = \varphi_{\frac{1}{4}}$ qui est bien un élément de S.

On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left\|\overrightarrow{\Omega M_n}\right\| = 0$, Ω étant l' unique point invariant de f. Les coordonnées de Ω vérifient donc : $\begin{cases} x = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}y + 1 \\ y = \frac{1}{4}y + \frac{1}{4}z + \frac{1}{2} \\ z = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}z + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + y = 4 \\ 3y - z = 2 \\ -x + 5z = 4 \end{cases}$ qui admet pour solution :

$$(x = 1,\ y = 1,\ z = 1).$$

On a que $\left\|\overrightarrow{\Omega M_n}\right\|^2 = (x_n - 1)^2 + (y_n - 1)^2 + (z_n - 1)^2 \to 0$ quand $n \to +\infty$ donc les trois suites $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $(z_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sont convergentes vers la même limite 1.

FIN