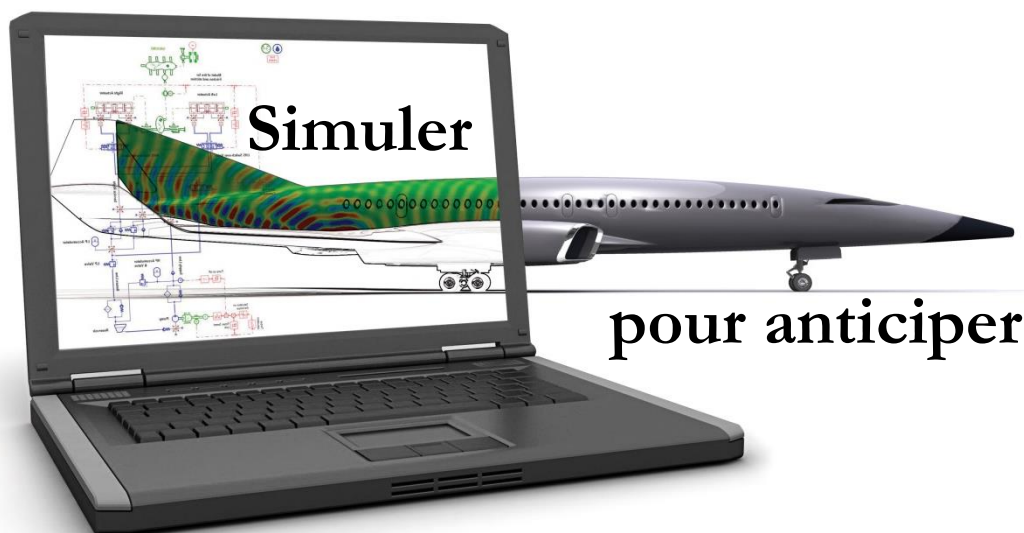


# MODELISATION DES SYSTEMES LINEAIRES CONTINUS INVARIANTS

## Extraits du référentiel :

Compétence visée	Savoir-faire associé
Appréhender les analyses fonctionnelle et structurelle	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Identifier la structure d'un système asservi : chaîne directe, capteur, commande, consigne, comparateur, correcteur</li> <li>• Identifier et positionner les perturbations</li> <li>• Différencier régulation et poursuite</li> <li>• Qualifier les grandeurs d'entrée et de sortie d'un système isolé</li> </ul>
Proposer un modèle de connaissance et de comportement	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Déterminer les fonctions de transfert à partir d'équations physiques (modèle de connaissance)</li> <li>• Déterminer les réponses temporelles et fréquentielles aux entrées de type signal canonique</li> <li>• Analyser ou établir le schéma-bloc du système</li> <li>• Déterminer les fonctions de transfert</li> <li>• Linéariser le modèle autour d'un point de fonctionnement</li> <li>• Renseigner les paramètres caractéristiques d'un modèle de comportement</li> </ul>

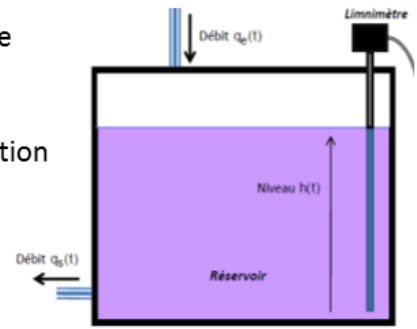


Sciences Industrielles de l'Ingénieur  
1ère année de CPGE  
Lycée Claude Fauriel

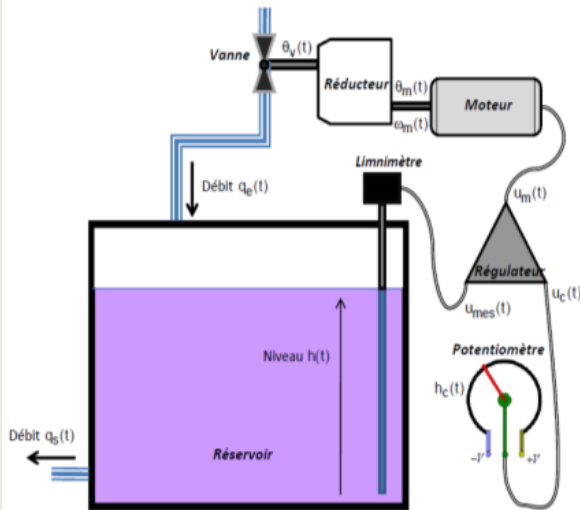
## Illustration 1 : Régulation de niveau

Le système hydraulique représenté ci-dessous comporte un réservoir de section constante

- Débit d'eau entrant :  $q_e(t)$
- Débit d'eau sortant :  $q_s(t)$  supposé proportionnel à  $h(t)$  (approximation linéaire)
- Hauteur :  $h(t)$  mesurée par le limnimètre



On cherche à réguler ce système pour assurer un niveau d'eau constant.



1<sup>ère</sup> étude : on s'intéresse au réservoir seul

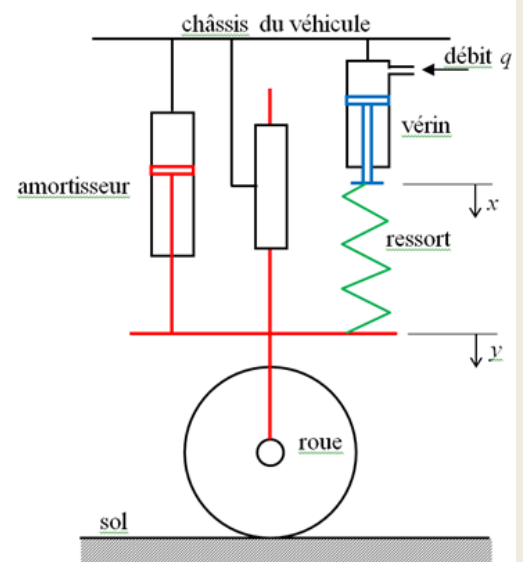
2<sup>ème</sup> étude : on régule le système grâce à une boucle d'asservissement

## Illustration 2 : Suspension pilotée d'automobile

Le schéma ci-contre représente la modélisation d'une suspension hydraulique d'un véhicule. L'axe de la roue est guidé par rapport au châssis du véhicule par une liaison glissière verticale. Un ressort de raideur  $k$  et un vérin hydraulique de section  $S$  montés en série constituent l'élément déformable de la suspension. Un amortisseur de coefficient de frottement visqueux  $\mu$  est monté en parallèle avec l'ensemble précédent. Un distributeur hydraulique envoie vers le vérin un débit d'huile  $q$ .

On note (dans les conditions d'Heaviside) :

- $x(t)$  et  $y(t)$  les déplacements des extrémités du ressort par rapport à sa position de repos,
- $f_r(t)$ ,  $f_a(t)$  et  $f_s(t)$  les variations des forces exercées par le ressort, l'amortisseur et le sol autour du point de repos.



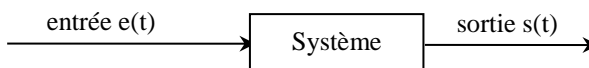
### Mise en équations :

Principe fondamental de la dynamique appliqué à la roue de masse  $M$  :  $M \frac{d^2 y(t)}{dt^2} = f_r(t) + f_a(t) + f_s(t)$

$$f_a(t) = -\mu \frac{dy(t)}{dt} \quad f_r(t) = k(x(t) - y(t)) \quad q(t) = S \frac{dx(t)}{dt} \quad q(t) = K_d(y_c(t) - y(t))$$

Le but du problème est d'étudier le comportement de la suspension pour différentes valeurs des caractéristiques et dans différentes phases de fonctionnement.

# 1 – Présentation

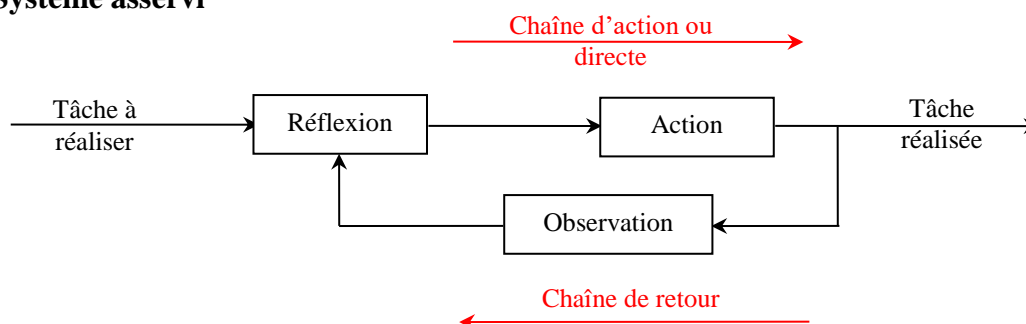


## 1.1 - Système automatisé

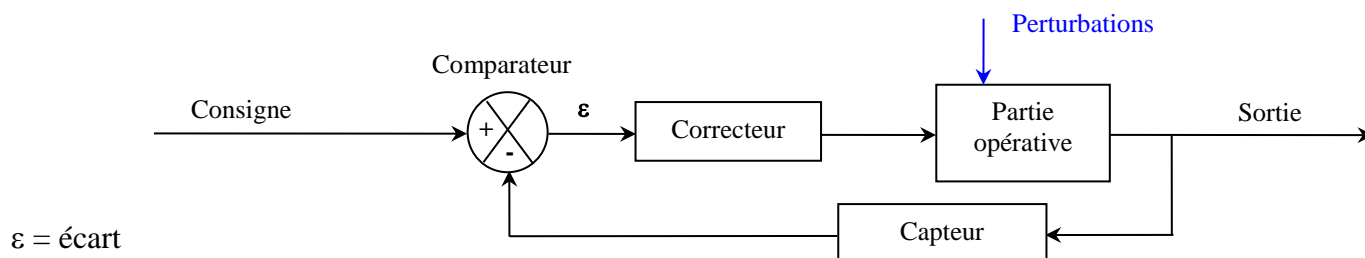
Système capable d'effectuer des opérations sans l'intervention de l'homme.

- système combinatoire : les entrées et sorties sont des variables logiques et les sorties sont indépendantes du temps (*ex : commande d'essuie-glace*).
- système séquentiel : les entrées et sorties sont des variables logiques et les sorties sont dépendantes du temps (*ouvre portail*).
- système linéaire continu invariant : les entrées et sorties sont des fonctions continues du temps (*pilote automatique de bateau*).

## 1.2 – Système asservi



Structure d'un système asservi :



On parle de **régulation** lorsque le système asservi est commandé par une grandeur physique constante et qu'il doit maintenir une sortie constante quelles que soient les perturbations qu'il subit (régulation de la température d'une pièce ...).

On parle de **poursuite** ou de **système suiveur** lorsque la consigne du système asservi varie dans le temps. Le système doit ajuster en permanence le signal de sortie à celui de l'entrée (radar de poursuite, table traçante ...).

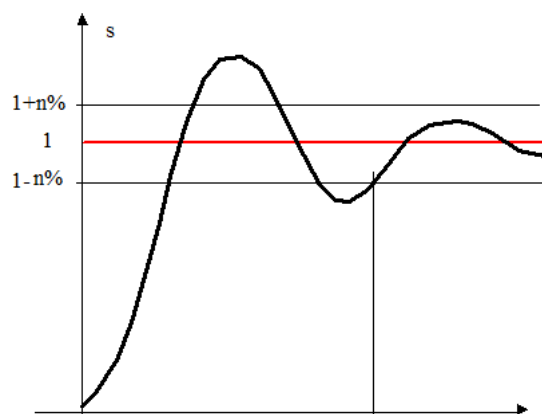
## 1.1 – Performances des systèmes asservis

### 1.3.1– Rapidité

La rapidité est caractérisée par le temps que met le système à réagir à une variation brusque de la grandeur d'entrée.

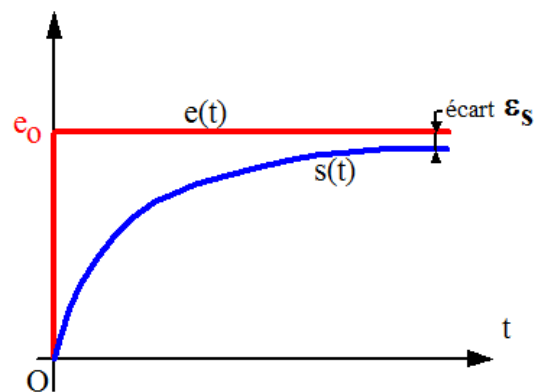
Cependant la valeur finale étant le plus souvent atteinte de manière asymptotique on retient alors comme principal critère d'évaluation de la rapidité d'un système, le temps de réponse à  $n\%$  (en pratique le temps de réponse à 5%).

C'est le temps mis par le système pour atteindre sa valeur de régime permanent à  $\pm 5\%$  près et y rester.



### 1.3.2– Précision statique

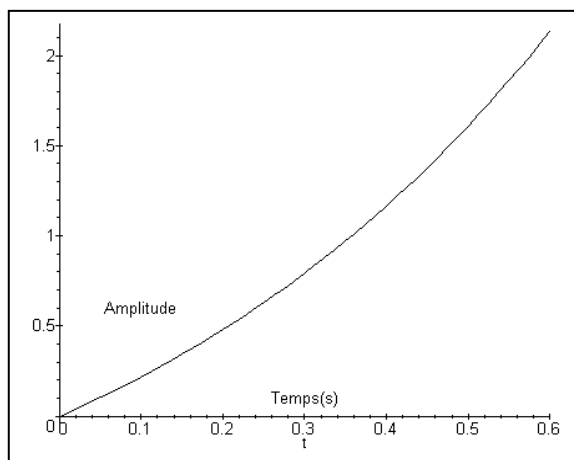
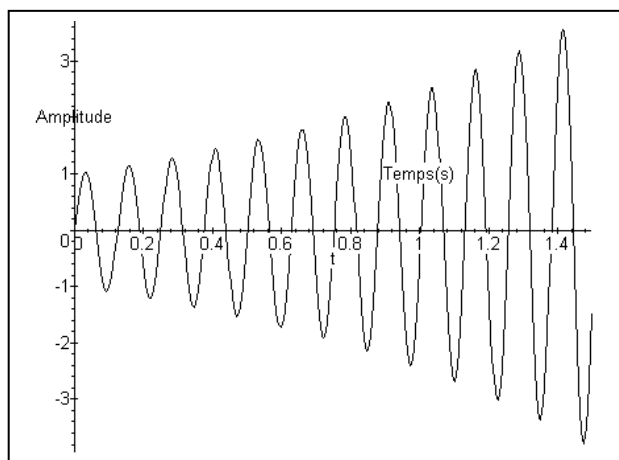
La précision qualifie l'aptitude du système à atteindre la valeur visée. Elle est caractérisée par l'écart entre la consigne et la valeur effectivement atteinte par la grandeur de sortie. L'écart éventuel s'exprime dans la même unité que la grandeur de sortie. On parlera alors d'erreur statique.



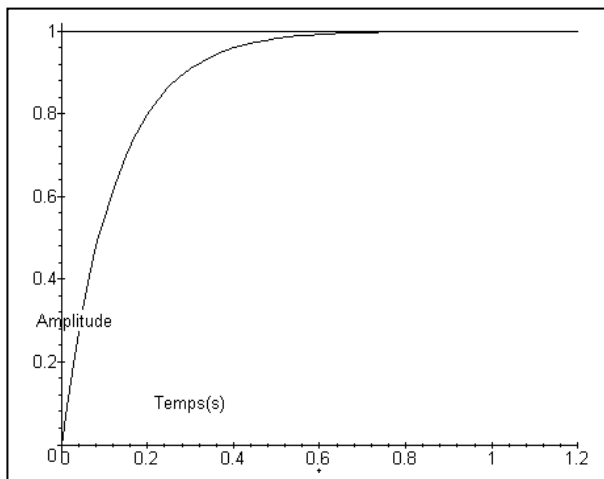
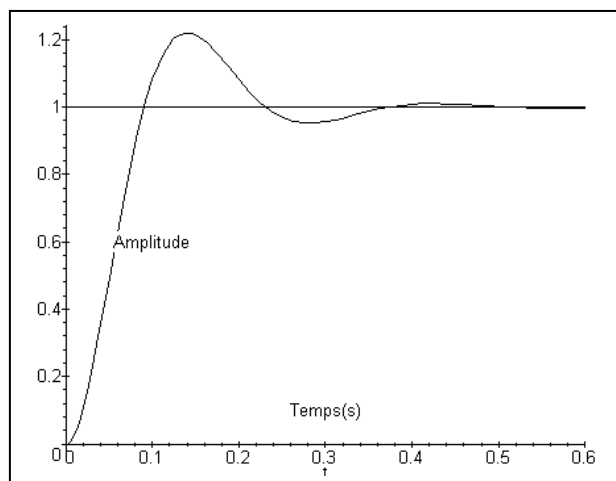
### 1.3.3– Stabilité

Un système est stable si à une entrée bornée correspond une sortie bornée. Le bouclage peut déstabiliser un système.

Systèmes instables :



Systèmes stables :



Lorsque la réponse est stable, on utilise souvent un critère supplémentaire . Le 1er dépassement exprimé en pourcentage de la valeur asymptotique (ou à convergence).

On verra que suivant le système étudié, d'autres définitions de la stabilité peuvent être utilisées.

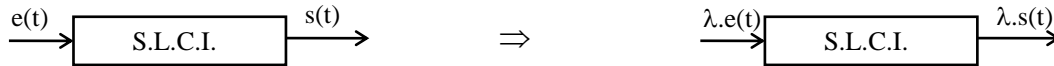
## 2 – Définitions des SLCI :



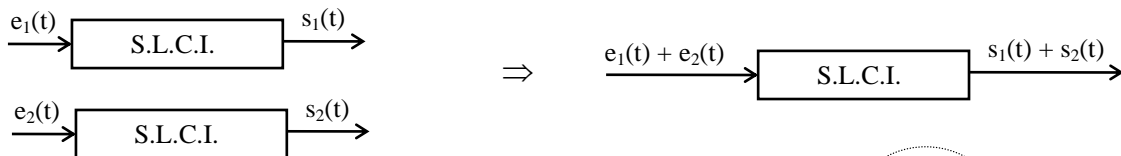
**2.1 – Système continu :** Les variations des grandeurs physiques  $e(t)$  et  $s(t)$  sont des fonctions continues du temps. On peut donc les définir  $\forall t \Rightarrow$  système **analogique** (par opposition aux systèmes **logiques** ou **numériques** définis à temps **discret**).

### 2.2 – Système linéaire :

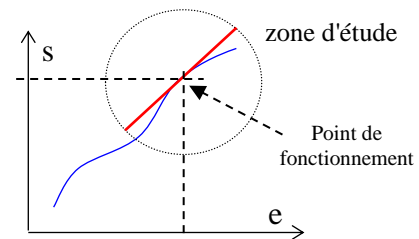
1.2.1 – Proportionnalité : "l'effet est proportionnel à la cause"



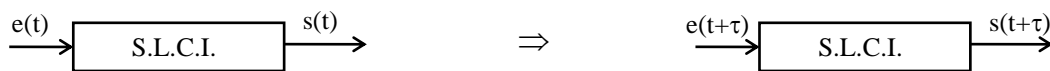
1.2.2 – Superposition :



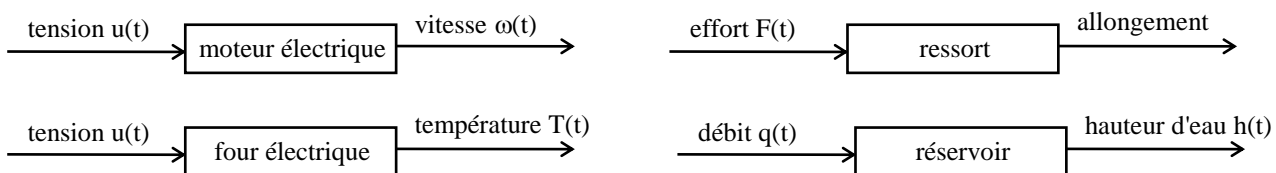
Pour les systèmes non linéaires, on linéarise la fonction entrée-sortie au voisinage du point de fonctionnement étudié en remplaçant la portion de courbe par une droite.



**2.3 – Système invariant :** on suppose que les caractéristiques du système (*masse, dimensions, résistance, impédance, ...*) ne varient pas au cours du temps ("le système ne vieillit pas").



### 2.4 – Exemples :

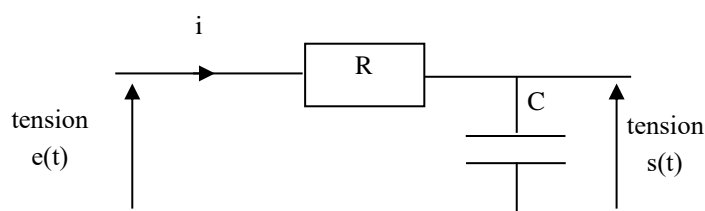


## 3 – Modélisation des SLCI :

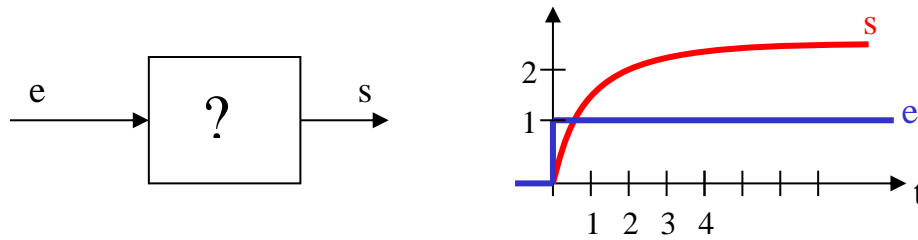
### 3.1 – Deux types de modèle :

**Modèle de connaissance :** c'est le modèle du physicien. On écrit les équations qui régissent le fonctionnement. Les paramètres physiques apparaissent explicitement.

Exemple : circuit RC



**Modèle d'identification ou de comportement :** C'est le modèle de l'automaticien. Le système est une « boîte noire ». On cherche une représentation équivalente (qui soumise aux mêmes sollicitations que le système réel donne une réponse identique). Les paramètres ne sont pas explicitement des paramètres physiques.



### 3.2 – Représentation des SLCI :

En réalité, les systèmes qu'on étudiera ne sont ni continus (point de vue microscopique), ni invariants (vieillessement), ni linéaires. En faisant des hypothèses simplificatrices, on se ramène à ce cas, c'est-à-dire à des systèmes dont le comportement peut être représenté par des équations différentielles à coefficients constants :

$$a_n \frac{d^n s(t)}{dt^n} + \dots + a_0 s(t) = b_m \frac{d^m e(t)}{dt^m} + \dots + b_0 e(t)$$

Dans les cas réels,  $m \leq n$  : système **causal**: la cause  $e(t)$  précède l'effet  $s(t)$ .

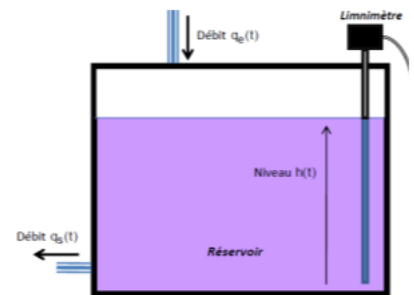
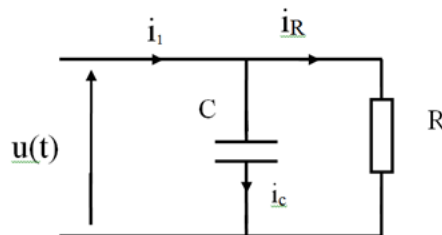
#### Résolution :

- solution générale  $s_0(t)$  de l'équation sans second membre: elle correspond au régime **transitoire** ou **libre**
- solution particulière  $s_1(t)$  suivant la forme de  $e(t)$  en déterminant les constantes par identification: elle correspond au régime **permanent** ou **forcé**.
- d'où la solution générale:  $s(t) = s_0(t) + s_1(t)$ .

### Illustration 1 : Régulation de niveau

**1<sup>ère</sup> étude :** réservoir seul avec débit sortant proportionnel à  $h(t)$  et débit d'entrée constant.

On procède par analogie électrique avec un circuit RC en parallèle.



Tous les signaux sont nuls avant l'instant  $t = 0$ .

A cet instant  $i_1(t)$  passe de 0 à  $I_1$  et demeure constant ensuite (générateur non représenté)

On a alors :  $u(t) = RI_1(1 - e^{-t/RC})$

1. Exprimer  $i_R$  en fonction de  $u$  et  $R$  et  $i_C$  en fonction de  $C$  et de la dérivée  $du/dt$ . En déduire l'équation différentielle qui permet de déterminer l'expression de  $u(t)$  donnée ci-dessus.

Loi des nœuds et loi d'Ohm :  $i_1 = i_R + i_C = \frac{u}{R} + C \frac{du}{dt}$

2. A l'instant  $t = t_1$ ,  $i_C = i_R$ . Exprimer  $u(t_1)$  en fonction de  $R$  et  $I_1$ .

à  $t = t_1$  :  $i_C = i_R$  d'où  $I_1 = i_R + i_C = 2i_R = 2 \frac{u(t_1)}{R}$  ce qui donne  $u(t_1) = \frac{RI_1}{2}$

3. En déduire  $t_1$  en fonction de  $R$  et de  $C$  ( $t_1$  est le temps de demi-charge du condensateur).

$$\text{à } t = t_1 : u(t_1) = RI_1(1 - e^{-t_1/RC}) = \frac{RI_1}{2} \quad \text{d'où} \quad e^{-t_1/RC} = \frac{1}{2} \quad \text{ce qui donne} \quad t_1 = RC \ln 2$$

4. Par analogie avec le circuit électrique, déterminer l'équation différentielle régissant le fonctionnement du système hydraulique.

Le système hydraulique est analogue au système électrique précédent et si on remplace  $i_1$  par  $q_e$  le débit d'entrée,  $i_R$  par  $q_s$  le débit de sortie,  $u$  par  $h$  on trouve une équation

$$\text{différentielle semblable à la précédente : } q_e(t) = \frac{h(t)}{K} + S \cdot \frac{dh(t)}{dt} \quad \text{avec } K \text{ en s/m}^2$$

## 4 – Transformation de Laplace :

Cette transformation de l'équation différentielle va permettre de trouver une solution quel que soit le degré  $n$  de l'équation.

### 4.1 – Définition :

$$f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt$$

domaine temporel (variable  $t$ )  $\rightarrow$  domaine symbolique (variable  $p$  réelle ou complexe)

La transformée de Laplace de la fonction  $f(t)$  est notée  $F(p) = \mathcal{L}[f(t)]$ .

Dans la pratique, on ne calcule que les transformées de Laplace de fonctions **causales** c'est-à-dire telles que  $f(t) = 0$  pour  $t < 0$ . Ces fonctions  $f$  représentent des grandeurs physiques: *intensité, température, effort, vitesse, ...*

### 4.2 – Théorèmes :

4.2.1 – Unicité : à  $f(t)$  correspond  $F(p)$  unique,  
à  $F(p)$  correspond  $f(t)$  unique.

4.2.2 – Linéarité :  $\mathcal{L}[f_1(t) + f_2(t)] = \mathcal{L}[f_1(t)] + \mathcal{L}[f_2(t)] = F_1(p) + F_2(p)$   
 $\mathcal{L}[\lambda f(t)] = \lambda \mathcal{L}[f(t)] = \lambda F(p)$

4.2.3 – Facteur d'échelle :  $\mathcal{L}[f(at)] = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(at) dt = ?$  posons:  $u = at \Rightarrow du = a dt$

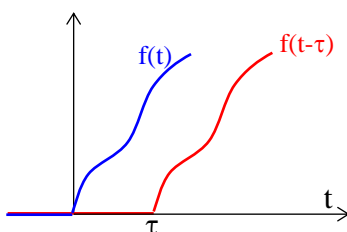
d'où

$$= \int_0^{\infty} e^{-p \frac{u}{a}} f(u) \frac{du}{a}$$

soit

$$\mathcal{L}[f(at)] = \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right)$$

4.2.4 – Théorème du retard :  $\mathcal{L}[f(t-\tau)] = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t-\tau) dt = ?$  posons:  $u = t - \tau \Rightarrow du = dt$



$$= \int_{-\tau}^{\infty} e^{-p(u+\tau)} f(u) du = e^{-p\tau} \int_{-\tau}^{\infty} e^{-pu} f(u) du$$

or, par convention,  $f(u) = 0$  pour  $u < 0$

d'où

$$\mathcal{L}[f(t-\tau)] = e^{-\tau p} F(p)$$

4.2.5 – Transformée de la dérivée :  $\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = \int_0^{\infty} e^{-pt} \frac{df(t)}{dt} dt = ?$

intégrons par parties en posant :  $u = e^{-pt} \Rightarrow du = -p e^{-pt}$

$$v = f(t) \Rightarrow dv = \frac{df(t)}{dt} dt$$

d'où  $\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = \left[e^{-pt}f(t)\right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} -pe^{-pt}f(t)dt$  or  $\lim_{t \rightarrow \infty} (e^{-pt}f(t)) = 0$  car  $f(t)$  bornée

donc

$$\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = p F(p) - f(0^+)$$

Pour la dérivée seconde :

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2f(t)}{dt^2}\right] = p^2 F(p) - p f(0^+) - f'(0^+)$$

4.2.6 – Transformée de l'intégrale :  $\mathcal{L}\left[\int_0^t f(u)du\right] = ?$

soit  $f(t) = \frac{dg(t)}{dt}$  donc  $\mathcal{L}[f(t)] = F(p) = \mathcal{L}\left[\frac{dg(t)}{dt}\right] = p G(p) - g(0^+) = p \mathcal{L}\left[\int_0^t f(u)du\right] - g(0^+)$

d'où

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(u)du\right] = \frac{F(p)}{p} + \frac{g(0^+)}{p}$$

Remarque : si les conditions initiales sont nulles (conditions d'Heaviside)

- **dériver par rapport à t** dans le domaine temporel revient à **multiplier par p** dans le domaine symbolique
- **intégrer** dans le domaine temporel revient à **diviser** par p dans le domaine symbolique.

4.2.7 – Théorème de la valeur initiale :

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} pF(p)$$

4.2.8 - Théorème de la valeur finale :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pF(p)$$

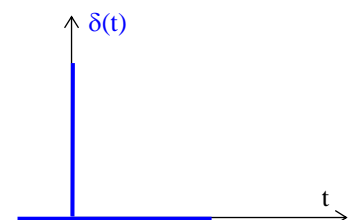
Remarque : ces deux derniers résultats n'ont de sens que si les limites existent.

### 4.3 – Transformées de fonctions courantes :

4.3.1 – Fonction de Dirac (ou impulsion unité)  $\delta(t)$  :

par définition  $\delta(t) = 0, \quad \forall t \neq 0$

Cette fonction représente une action s'exerçant pendant un temps très court.

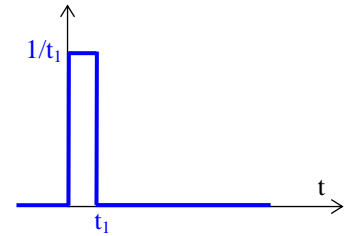




$$\delta(t) = \lim_{t_1 \rightarrow 0} \frac{1}{t_1} \quad \text{d'où} \quad \mathcal{L}[\delta(t)] = \int_0^{t_1} e^{-pt} \lim_{t_1 \rightarrow 0} \frac{1}{t_1} dt = \lim_{t_1 \rightarrow 0} \frac{1}{t_1} \int_0^{t_1} e^{-pt} dt$$

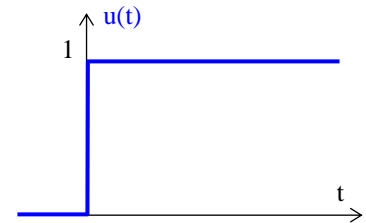
$$= \lim_{t_1 \rightarrow 0} \frac{1}{t_1} \left[ \frac{-e^{-pt}}{p} \right]_0^{t_1} = \lim_{t_1 \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-pt_1}}{pt_1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$$

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = 1$$



#### 4.3.2 – Fonction échelon unité u(t) :

$$u(t) = 0 \text{ si } t < 0 \quad \text{et} \quad u(t) = 1 \text{ si } t \geq 0$$

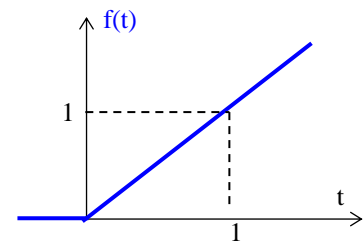


$$\mathcal{L}[u(t)] = \int_0^{\infty} e^{-pt} u(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-pt} dt = \left[ -\frac{1}{p} e^{-pt} \right]_0^{\infty} \Rightarrow \mathcal{L}[u(t)] = \frac{1}{p}$$

#### 4.3.3 – Fonction rampe de pente unitaire :

$$f(t) = 0 \text{ si } t < 0 \quad \text{et} \quad f(t) = t \text{ si } t \geq 0 \quad \text{donc} \quad f(t) = t \cdot u(t)$$

$$\frac{df}{dt} = u(t) \Rightarrow \mathcal{L}[t \cdot u(t)] = \frac{U(p)}{p} + \frac{f(0)}{p} \Rightarrow \mathcal{L}[t u(t)] = \frac{1}{p^2}$$



#### 4.3.4 – Fonction sinusoïdale : f(t) = sin ωt . u(t)

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} \sin \omega t dt \quad \text{qu'on intègre par parties en posant} \quad du = \sin \omega t dt \quad \text{et} \quad v = e^{-pt}$$

$$= \left[ \frac{-\cos \omega t}{\omega} e^{-pt} \right]_0^{\infty} - \frac{p}{\omega} \int_0^{\infty} \cos \omega t e^{-pt} dt = \frac{1}{\omega} - \frac{p}{\omega} \left\{ \left[ \frac{1}{\omega} \sin \omega t e^{-pt} \right]_0^{\infty} + \frac{p}{\omega} \int_0^{\infty} \sin \omega t e^{-pt} dt \right\} = \frac{1}{\omega} - \frac{p^2}{\omega^2} F(p)$$

$$\mathcal{L}[\sin \omega t \cdot u(t)] = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$$

#### 4.3.5 – Fonction exponentielle : f(t) = e^{-at} . u(t)

$$\mathcal{L}[e^{-at} \cdot u(t)] = \frac{1}{p + a}$$

## 5 – Transformation de Laplace inverse et résolution d'une équation différentielle

Les transformées de Laplace donnent des fonctions de p qui sont des fractions rationnelles que l'on décompose en éléments simples pour revenir au domaine temporel.

Exemple : soit un système régi par l'équation différentielle  $\frac{d^2 s(t)}{dt^2} + 5 \frac{ds(t)}{dt} + 6s(t) = e(t)$

avec  $s(0) = 2$ ,  $s'(0) = 2$  et  $e(t) = 6u(t)$

On applique la transformation de Laplace à cette équation :

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2 s(t)}{dt^2}\right] + 5 \mathcal{L}\left[\frac{ds(t)}{dt}\right] + 6 S(p) = E(p)$$

$$p^2 S(p) - p s(0) - s'(0) + 5 [p S(p) - s(0)] + 6 S(p) = E(p)$$

$$p^2 S(p) - 2p - 2 + 5[p S(p) - 2] + 6 S(p) = \frac{6}{p}$$

soit

$$S(p) = \frac{2p^2 + 12p + 6}{p(p^2 + 5p + 6)} = \frac{2p^2 + 12p + 6}{p(p+2)(p+3)}$$

On décompose cette fraction en éléments simples :  $S(p) = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+2} + \frac{C}{p+3}$

Par identification, on trouve  $S(p) = \frac{1}{p} + \frac{5}{p+2} - \frac{4}{p+3}$

On retourne au domaine temporel en prenant les transformées inverses, d'où :  $s(t) = (1 + 5e^{-2t} - 4e^{-3t}) \cdot u(t)$

### Illustration 1 : régulation de de niveau

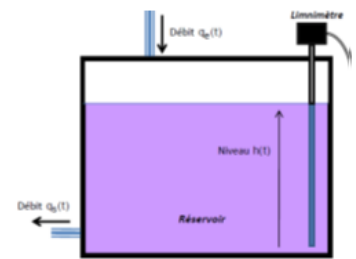
5. Transformer l'équation différentielle obtenue.

On transforme par Laplace avec C.I. nulles :

$$Q_e(p) = \frac{H(p)}{K} + S.p.H(p) = \left(\frac{1}{K} + S.p\right)H(p)$$

Ce qui donne :  $H(p) = \frac{K}{1 + K.S.p} Q_e(p)$

$$q_e(t) = \frac{h(t)}{K} + S \cdot \frac{dh(t)}{dt}$$



Le réservoir est vide et les 2 débits nuls jusqu'à l'instant  $t = 0$  où on établit le débit  $q_e(t) = Q_e$ , qui demeure constant ensuite.

6. En déduire l'expression de  $h(t)$  pour  $t > 0$ .

$$H(p) = \frac{K}{1 + K.S.p} \cdot \frac{Q_e}{p} = \frac{\frac{Q_e}{S}}{\left(\frac{1}{K.S} + p\right)p} = \frac{A}{p} + \frac{B}{\frac{1}{K.S} + p}$$

Ce qui donne :  $H(p) = \frac{KQ_e}{p} - \frac{KQ_e}{\frac{1}{K.S} + p}$

d'où :  $h(t) = K.Q_e.(1 - e^{-t/KS})u(t)$

7. Exprimer la hauteur atteinte par l'eau dans le réservoir après stabilisation.

$$h_{\text{stab}} = \lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pH(p) = K.Q_e$$

## 6 – Fonction de transfert d'un système :

Soit un système décrit par l'équation différentielle :  $a_n \frac{d^n s(t)}{dt^n} + \dots + a_0 s(t) = b_m \frac{d^m e(t)}{dt^m} + \dots + b_0 e(t)$

On se place dans le cas de **conditions initiales nulles** (conditions d'Heaviside) : le niveau initial du système importe peu, c'est sa réaction à une perturbation à partir d'un état stable que l'on souhaite étudier. On peut donc toujours se ramener à des conditions initiales nulles avec un changement d'origine.

d'après le théorème de la dérivée :  $\mathcal{L} \left[ \frac{d^n s(t)}{dt^n} \right] = p^n F(p)$

On applique la transformation de Laplace à l'équation différentielle :

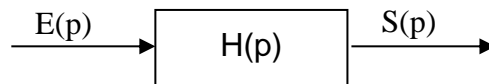
$$a_n p^n S(p) + \dots a_0 S(p) = b_m p^m E(p) + \dots + b_0 E(p)$$

On appelle **fonction de transfert H(p)** du système :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{b_m p^m + \dots + b_0}{a_n p^n + \dots + a_0}$$

Dans le domaine symbolique, la relation entre l'entrée et la sortie s'écrit donc

$$S(p) = H(p).E(p)$$



La fonction de transfert représente le comportement du système et s'exprime simplement comme le rapport de deux polynômes en p (fraction rationnelle) construits à partir des coefficients de l'équation différentielle régissant son évolution.

### Forme canonique de la fonction de transfert :

avec  $n = n' + \alpha =$  ordre du système  
 $\alpha =$  classe du système  
 $K =$  gain statique

$$H(p) = \frac{K(1 + \dots + b_{m'} p^{m'})}{p^\alpha (1 + \dots + a_{n'} p^{n'})}$$

En explicitant les racines (complexes éventuellement) de ces polynômes, H(p) peut s'écrire :

$$H(p) = \frac{k(p - z_1)(p - z_2) \dots (p - z_m)}{(p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_n)}$$

les  $z_i$  sont les zéros et les  $p_i$  les **pôles** de la fonction de transfert.

Remarque : si l'entrée est une impulsion de Dirac, on a alors  $S(p) = H(p).1 = H(p)$

La fonction de transfert représente donc la transformée de Laplace de la réponse "impulsionnelle". Malheureusement, on ne sait pas générer physiquement un tel signal. Cependant, cette propriété est utilisée par les logiciels de simulation.

## Illustration 1 : Régulation de niveau

8. En déduire la fonction de transfert canonique du système

$$\text{Equa.diff. : } q_e(t) = \frac{h(t)}{K} + S. \frac{dh(t)}{dt}$$

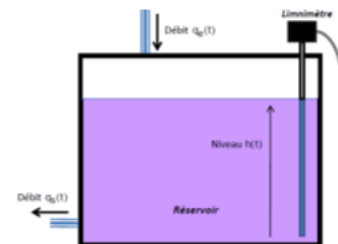
$$\text{Avec Laplace : } Q_e(p) = \frac{H(p)}{K} + S.p.H(p) = \left( \frac{1}{K} + S.p \right) H(p)$$

$$\text{Ce qui donne la fonction de transfert : } \frac{H(p)}{Q_e(p)} = \frac{1}{\left( \frac{1}{K} + S.p \right)}$$

Caractéristiques de la fonction de transfert mise sous forme canonique :

$$T(p) = \frac{H(p)}{Q_e(p)} = \frac{K}{1 + K.S.p}$$

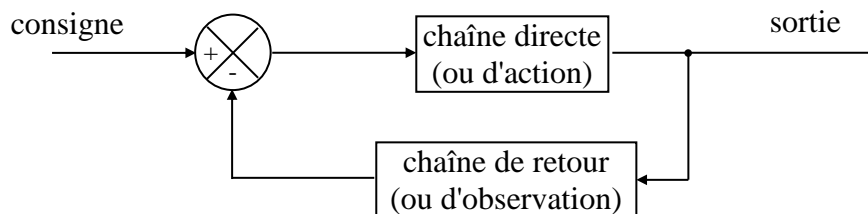
1<sup>er</sup> ordre  
 Gain statique : K  
 Classe : nulle



## 7 – Systèmes asservis :

### 7.1 – Structure :

Le comportement d'un système asservi peut être décrit par le schéma-bloc suivant :

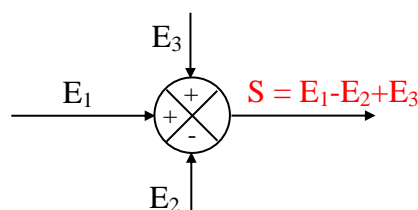


#### Exemple : chauffage d'un four

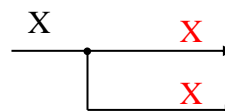
- la consigne est la température à atteindre et à conserver
- la chaîne d'action comprend, entre autre, la résistance électrique qui, soumise à une certaine tension, permet de chauffer le four
- la sortie est la température réelle (pas forcément égale à la consigne à cause des pertes, etc..)
- dans la chaîne de retour, on a un capteur qui permet de mesurer la température réelle.
- le comparateur permet de comparer la consigne à la sortie.

Les chaînes d'action et de retour sont caractérisées par leur fonction de transfert.

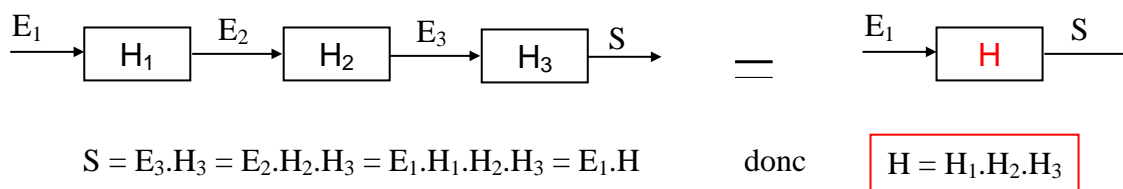
Un **sommeur** (généralisation du comparateur) comporte plusieurs entrées et une seule sortie:



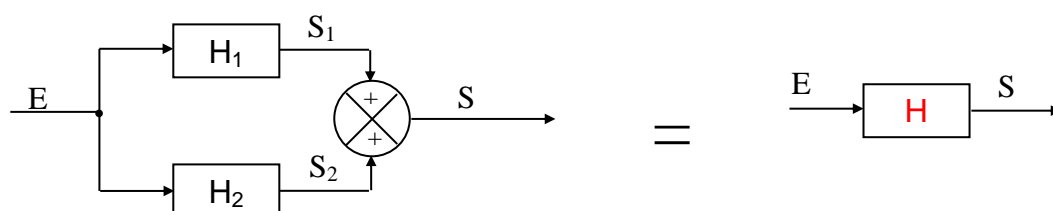
Une **jonction** est un « prélèvement » qui a le même signal que la branche principale:



### 7.2 – Fonctions de transfert en série :



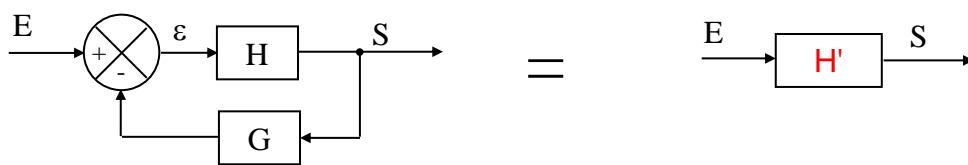
### 7.3 – Fonctions de transfert en parallèle :



$$S_1 = E H_1 \text{ et } S_2 = E H_2 \text{ d'où } S = S_1 + S_2 = E (H_1 + H_2)$$

donc  $H = H_1 + H_2$

### 7.4 – Fonction de transfert Boucle fermée : Formule de « Black »



Equations :  $S = H.\varepsilon$  et  $\varepsilon = E - G.S$

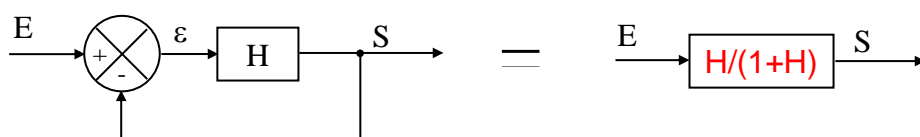
d'où

$$S = H.(E - G.S) = H'.E$$

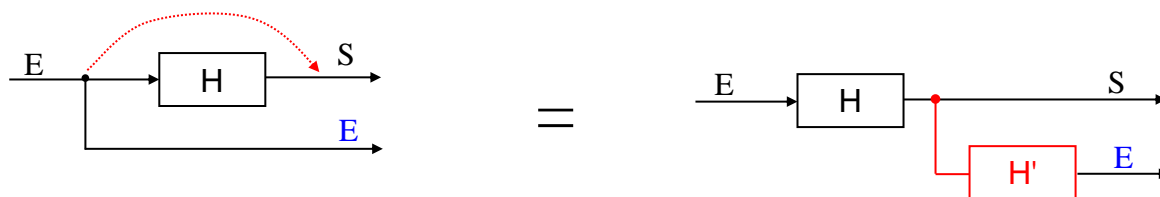
donc

$$H' = \frac{H}{1 + G.H}$$

Cas d'un système à retour unitaire :  $G = 1$



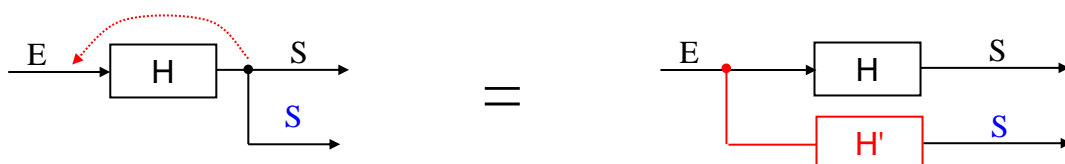
### 7.5 – Déplacement d'une jonction :



$$S = H.E$$

$$E = H'.S$$

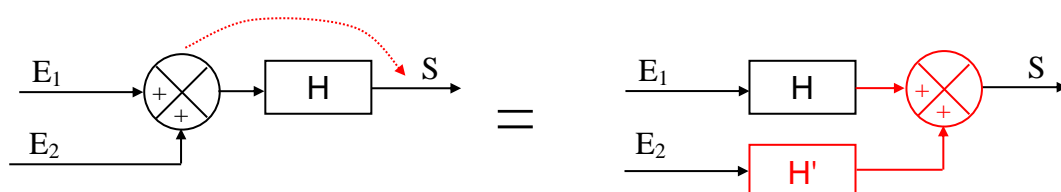
d'où  $H' = 1/H$



$$S = H'.E = H.E$$

d'où  $H' = H$

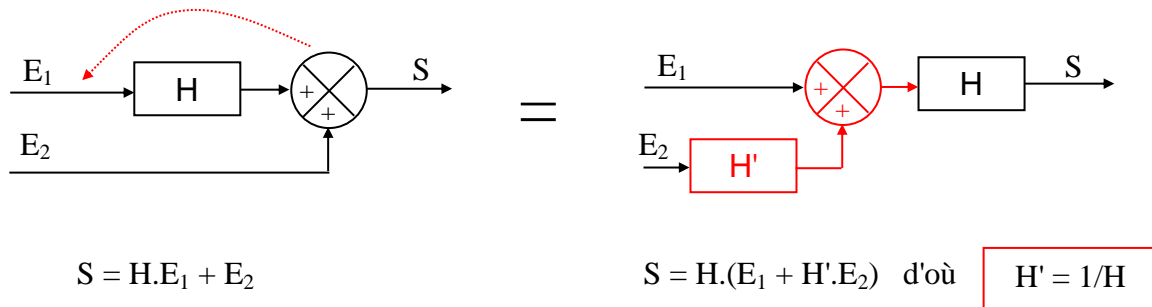
### 7.6 – Déplacement d'un sommateur :



$$S = H.(E_1 + E_2)$$

$$S = H.E_1 + H'.E_2$$

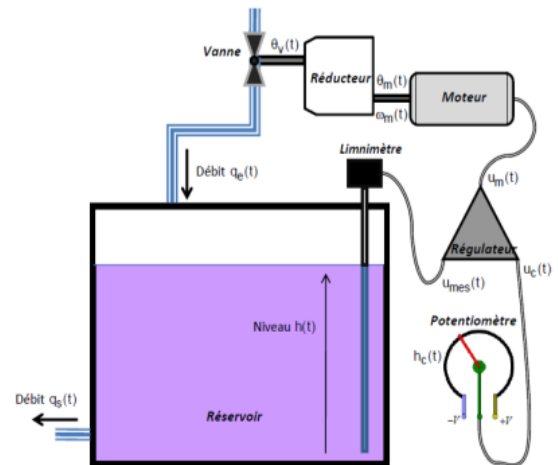
d'où  $H' = H$



## Illustration 1 : Régulation de niveau

### 2<sup>ème</sup> étude : on régule le système grâce à une boucle d'asservissement

On dote le système d'une électrovanne actionnée par un ensemble moteur + réducteur. Le tout est piloté par un régulateur recevant les informations du limnimètre et d'un potentiomètre (consigne de hauteur).



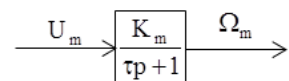
Constituant	Caractéristique	Modèle de connaissance
Moteur	Il tourne à la vitesse angulaire $\omega_m(t)$ pour une tension de commande $u_m(t)$	$\tau \frac{d\omega_m(t)}{dt} + \omega_m(t) = K_m u_m(t)$
Réducteur	Il réduit l'angle de l'axe de rotation du moteur $\theta_m(t)$ en un angle d'ouverture $\theta_v(t)$ de la vanne	$\theta_v(t) = r \cdot \theta_m(t)$
Vanne	Elle délivre un débit $q_e(t)$ pour un angle d'ouverture $\theta_v(t)$	$q_e(t) = K_v \cdot \theta_v(t)$
Réservoir	Il est de section constante $S$ , et a pour débit d'entrée $q_e(t)$ et de sortie $q_s(t)$	$q_e(t) - q_s(t) = S \cdot \frac{dh(t)}{dt}$
Limnimètre (capteur)	Il traduit le niveau d'eau $h(t)$ atteint dans le réservoir en tension $u_{mes}(t)$ , image de ce niveau	$u_{mes}(t) = a \cdot h(t)$
Potentiomètre (interface H/M)	Il traduit la consigne de niveau d'eau $h_c(t)$ souhaité en tension $u_c(t)$ , image de cette consigne	?
Régulateur (comparateur + correcteur)	Il compare la tension de consigne $u_c(t)$ à la tension de mesure $u_{mes}(t)$ pour en déduire la tension $e(t)$ , image de l'erreur, puis corrige (amplifie) cette tension $e(t)$ en une tension de commande du moteur $u_m(t)$	$e(t) = u_c(t) - u_{mes}(t)$ $u_m(t) = A e(t)$

$\tau$ ,  $K_m$ ,  $r$ ,  $K_v$ ,  $a$  et  $A$  sont des coefficients constants

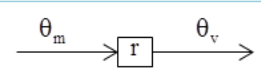
On suppose les conditions initiales nulles.

1. Appliquer, pour chacun des modèles de connaissance des constituants du système, la transformation de Laplace. Puis indiquer sa fonction de transfert, et enfin en déduire son schéma-bloc.

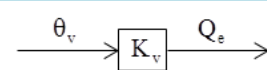
Moteur :  $(\tau p + 1) \cdot \Omega_m(p) = K_m \cdot U_m(p)$  d'où :  $\frac{\Omega_m(p)}{U_m(p)} = \frac{K_m}{\tau p + 1}$



Réducteur :  $\theta_v(p) = r \cdot \theta_m(p)$  d'où :  $\frac{\theta_v(p)}{\theta_m(p)} = r$

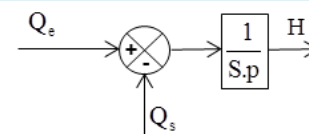


Vanne :  $Q_e(p) = K_v \cdot \theta_v(p)$  d'où :  $\frac{Q_e(p)}{\theta_v(p)} = K_v$

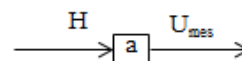


Réservoir :  $Q_e(p) - Q_s(p) = S \cdot p \cdot H(p)$

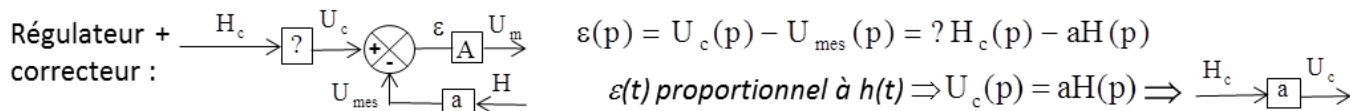
d'où :  $H(p) = \frac{1}{S p} (Q_e(p) - Q_s(p))$



Limnimètre :  $U_{\text{mes}}(p) = a.H(p)$  d'où :  $\frac{U_{\text{mes}}(p)}{H(p)} = a$

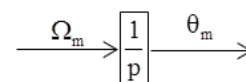


2. Donner la relation entre  $h_d(t)$  et  $u_d(t)$  qui assure que  $\varepsilon(t)$  soit bien une image de l'erreur du niveau d'eau. En déduire le schéma-bloc correspondant au potentiomètre.

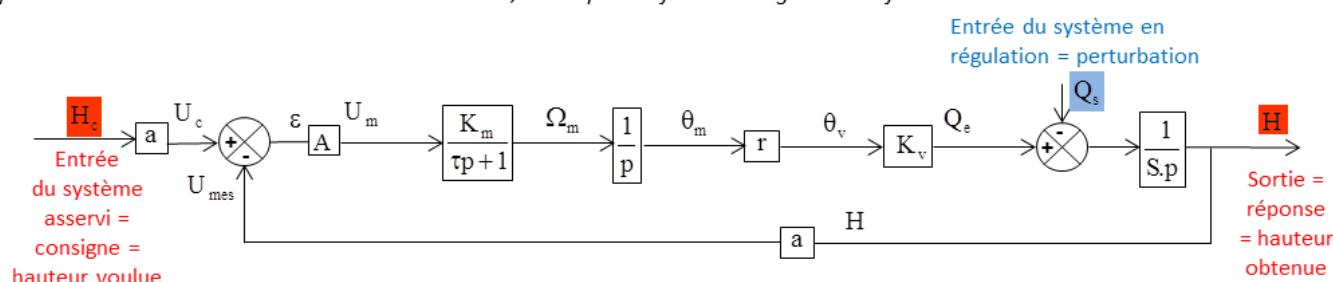


3. Donner la relation temporelle générale qui lie vitesse et position angulaires. En déduire le schéma-bloc qui passe de  $\Omega_m(p)$  à  $\Theta_m(p)$ .

$$\Omega_m(p) = \frac{d\theta_m(t)}{dt} \quad \text{d'où :} \quad \frac{\theta_m(p)}{\Omega_m(p)} = \frac{1}{p}$$



4. Donner les variables d'entrée et la variable de sortie du système. Puis, représenter le schéma-bloc du système entier en précisant le nom des constituants sous les blocs, ainsi que les flux d'énergie ou d'information entre les blocs



5. Déterminer les expressions des fonctions de transfert :  $F_1(p) = \frac{H(p)}{H_c(p)} \Big|_{Q_s(p)=0}$  et  $F_2(p) = \frac{H(p)}{Q_s(p)} \Big|_{H_c(p)=0}$

$$F_1(p) = \frac{H(p)}{H_c(p)} \Big|_{Q_s(p)=0} = a \frac{\frac{AK_m K_v r}{Sp^2(1+\tau p)}}{1 + \frac{aAK_m K_v r}{Sp^2(1+\tau p)}} = \frac{aAK_m K_v r}{Sp^2(1+\tau p) + aAK_m K_v r} = \frac{1}{1 + \frac{S}{aAK_m K_v r}p^2 + \frac{\tau S}{aAK_m K_v r}p^3}$$

$$F_2(p) = \frac{H(p)}{Q_s(p)} \Big|_{H_c(p)=0} = -\frac{1}{Sp} \left( Q_s(p) + \frac{aAK_m K_v r}{p(1+\tau p)} H(p) \right) \quad \text{d'où :} \quad F_2(p) = -\frac{1}{aAK_m K_v r} \frac{(1+\tau p)p}{1 + \frac{S}{aAK_m K_v r}p^2 + \frac{\tau S}{aAK_m K_v r}p^3}$$

6. En déduire, à l'aide du théorème de superposition, l'expression de  $H(p)$ .

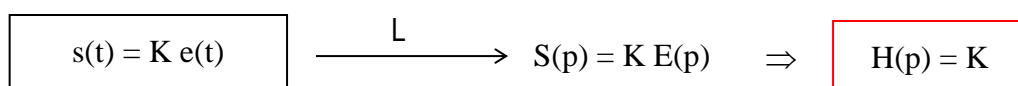
$$H(p) = \frac{H(p)}{H_c(p)} \Big|_{Q_s(p)=0} H_c(p) + \frac{H(p)}{Q_s(p)} \Big|_{H_c(p)=0} Q_s(p) \quad Q_s(p) = F_1(p)H_c(p) + F_2(p)Q_s(p)$$

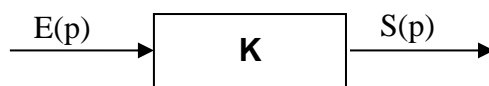
## 8 – Systèmes linéaires fondamentaux :

La fonction de transfert de nombreux systèmes est une composition de fonctions de transfert de systèmes élémentaires qu'on va étudier en détail. On va soumettre chacun de ces systèmes élémentaires à des signaux d'entrée tests  $e(t)$  et on va calculer la réponse  $s(t)$ :

- $e(t) = \delta(t)$  = impulsion de Dirac  $\Rightarrow s(t)$  = réponse impulsionnelle
- $e(t) = u(t)$  = échelon unitaire  $\Rightarrow s(t)$  = réponse indicielle
- $e(t) = t.u(t)$  = rampe  $\Rightarrow s(t)$  = réponse à une rampe.

**8.1 – Système à action proportionnelle :** la sortie est proportionnelle à l'entrée.

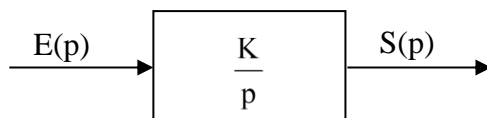




Exemple : résistance, capteur

## 8.2 – Système intégrateur :

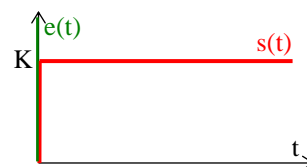
$$\boxed{\frac{ds(t)}{dt} = K e(t)} \xrightarrow{L} p S(p) = K E(p) \Rightarrow \boxed{H(p) = \frac{K}{p}}$$



Exemple: inductance  $u = L \frac{di}{dt} \Rightarrow U(p) = L p I(p) \Rightarrow H(p) = \frac{I(p)}{U(p)} = \frac{1}{Lp}$

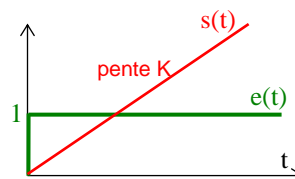
### 8.2.1 – Réponse impulsionnelle :

$$E(p) = 1 \Rightarrow S(p) = \frac{K}{p} \xrightarrow{L^{-1}} \boxed{s(t) = K u(t)}$$



### 8.2.3 – Réponse indicielle :

$$E(p) = \frac{1}{p} \Rightarrow S(p) = \frac{K}{p} \cdot \frac{1}{p} \xrightarrow{L^{-1}} \boxed{s(t) = K t u(t)}$$



## 8.3 – Système du premier ordre :

$$\boxed{\tau \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = K e(t)} \xrightarrow{L} \tau p S(p) + S(p) = K E(p)$$

D'où la fonction de transfert sous forme canonique :

$$\boxed{H(p) = \frac{K}{1 + \tau p}}$$

$K$  = gain statique  
 $\tau$  = constante de temps

Exemples : circuit RC pour lequel  $\tau = RC$  et  $K = 1$ , moteur à courant continu (avec inductance négligeable)

### 8.3.1 – Réponse indicielle :

$$E(p) = \frac{1}{p} \Rightarrow S(p) = \frac{K}{1 + \tau p} \cdot \frac{1}{p}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} s(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} p S(p) = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{K}{1 + \tau p} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow 0} s'(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} p^2 S(p) = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{K p}{1 + \tau p} = \frac{K}{\tau} \Rightarrow \text{pente à l'origine}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p S(p) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{K}{1 + \tau p} = K \Rightarrow \text{asymptote horizontale de valeur } K$$

Pour connaître complètement  $s(t)$ , il faut décomposer  $S(p)$  en éléments simples :



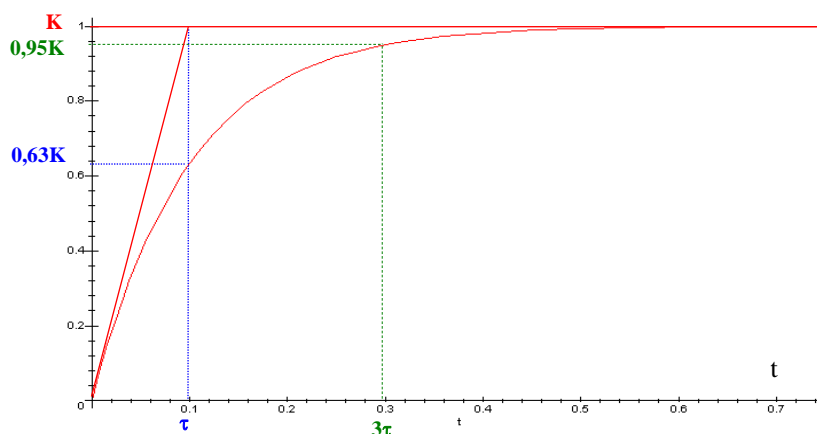
$$S(p) = \frac{A}{p} + \frac{B}{1+\tau p} = \frac{K}{p} - \frac{\tau K}{1+\tau p} = K \left( \frac{1}{p} - \frac{1}{p + \frac{1}{\tau}} \right) \xrightarrow{L^{-1}} \boxed{s(t) = K \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) u(t)}$$

Points caractéristiques à connaître :

- pour  $t = \tau$ ,  $s(\tau) = K(1 - e^{-1}) = 0,63K$

- temps de réponse à 95% = instant  $t_r$  pour lequel  $s(t_r) = 0,95 s_{\max}$

$$K(1 - e^{-\frac{t_r}{\tau}}) = 0,95K \Rightarrow e^{-\frac{t_r}{\tau}} = 0,05 \Rightarrow \boxed{t_r \approx 3\tau}$$

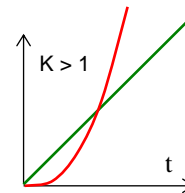
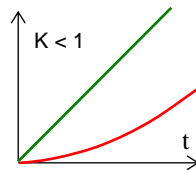
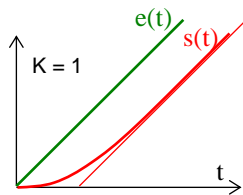


Si on connaît le tracé de la réponse indicielle d'un système du 1<sup>er</sup> ordre, on peut trouver facilement, par identification, le gain  $K$  et la constante de temps  $\tau$ .

### 8 .3.2 – Réponse à une rampe de pente $a$ :

$$e(t) = a t u(t) \Rightarrow E(p) = \frac{a}{p^2} \Rightarrow S(p) = \frac{a K}{p^2 (1 + \tau p)} = K \left( \frac{a}{p^2} - \frac{a \tau}{p} + \frac{a \tau^2}{1 + \tau p} \right)$$

$$\xrightarrow{L^{-1}} \boxed{s(t) = a K \left( t - \tau + \tau e^{-\frac{t}{\tau}} \right) u(t)}$$



## Illustration 1 : Régulation de niveau

**1<sup>ère</sup> étude** : Système **non asservi** et on suppose un **débit sortant proportionnel** à  $h(t)$ .

9. En déduire l'allure de la réponse à un échelon unitaire

$$\text{Équa. diff. : } q_e(t) = \frac{h(t)}{K} + S \cdot \frac{dh(t)}{dt}$$

$$\text{F.T. : } \frac{H(p)}{Q_e(p)} = \frac{K}{1 + K.S.p}$$

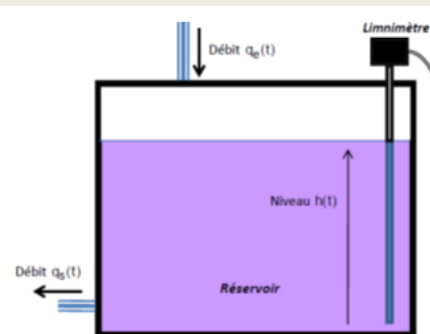
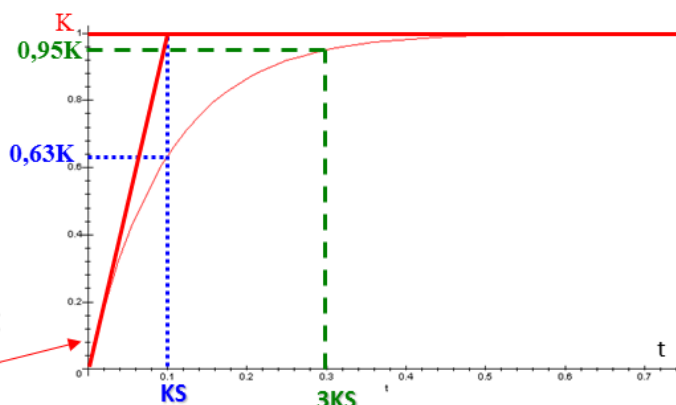
Réponse indicielle. :

$$H(p) = \frac{K}{1 + K.S.p} \cdot \frac{1}{p} = K \left( \frac{1}{p} - \frac{1}{p + \frac{1}{KS}} \right)$$

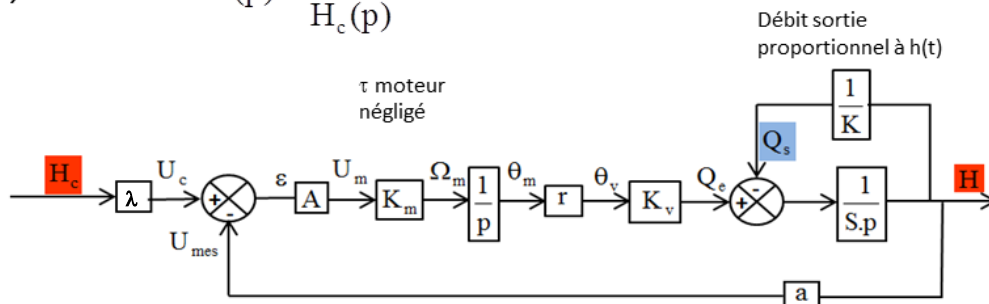
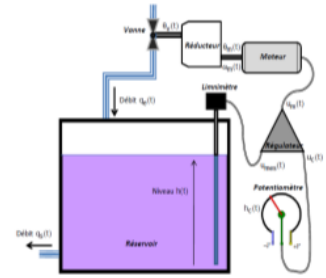
$$\Rightarrow h(t) = K(1 - e^{-\frac{t}{KS}})u(t)$$

Pente à l'origine :

**1/S**

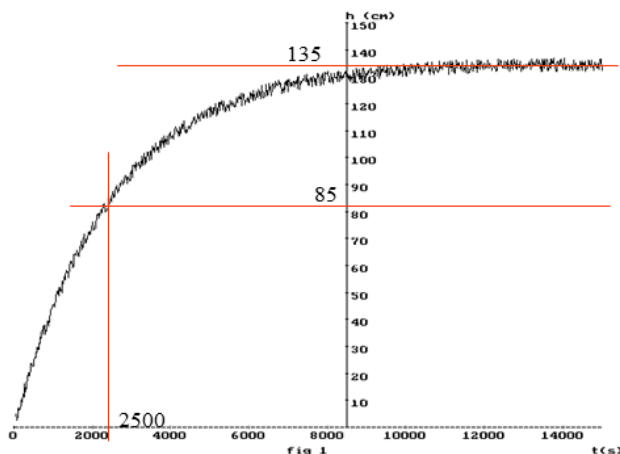


**2<sup>ème</sup> étude** : Système **asservi** avec **perturbation** ( $q_s(t) = h(t)/K$ )  
avec une **consigne** de niveau de 1,5 m de type **échelon**.  
Le gain de l'adaptateur noté  $\lambda$  est fixé arbitrairement.



d'où 
$$T(p) = \frac{H(p)}{H_c(p)} = \frac{\lambda}{a} \frac{1}{1 + \frac{1}{aAKK_mK_vr}p + \frac{KS}{aAKK_mK_vr}p^2}$$

8. Déterminer numériquement ces caractéristiques à partir de l'enregistrement ( $h$  en fonction du temps) ci-dessous :



L'enregistrement présente la forme de la réponse indicielle d'un 1er ordre :

Le gain statique vaut :  $K_1 = \frac{\lambda}{a} = \frac{135}{150}$

La constante de temps vaut :  $\tau = 2500$  s  
car à  $t = \tau$  :  $h(t) = 63\%$  de la valeur asymptotique ( $85\text{cm} = 63\%$  de  $135\text{cm}$ )

Il s'agit d'un modèle de fonction de transfert associé au **comportement** du système :

$$T(p) \approx \frac{135/150}{1 + 2500p}$$

#### 8.4 – Système du second ordre :

$$\frac{d^2s(t)}{dt^2} + 2m\omega_0 \frac{ds(t)}{dt} + \omega_0^2 s(t) = K\omega_0^2 e(t)$$

$K$  = gain statique  
 $\omega_0$  = pulsation propre  
 $m$  = coefficient d'amortissement

Exemple : masse liée à un support fixe par un ressort et un amortisseur visqueux.

La transformée de Laplace de cette équation donne :  $p^2 S(p) + 2m\omega_0 p S(p) + \omega_0^2 S(p) = K\omega_0^2 E(p)$

d'où la fonction de transfert sous forme canonique:

$$H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2m}{\omega_0} p + \frac{1}{\omega_0^2} p^2}$$

8.4.1 – Réponse impulsionnelle :

$$E(p) = 1 \Rightarrow S(p) = \frac{K \omega_0^2}{p^2 + 2m\omega_0 p + \omega_0^2} = \frac{K \omega_0^2}{D(p)}$$

avec  $D(p)$  de discriminant réduit  $\Delta' = m^2 \omega_0^2 - \omega_0^2 = \omega_0^2 (m^2 - 1)$

- premier cas :  $m > 1 \Rightarrow D(p)$  a alors 2 racines réelles  $p_1$  et  $p_2$

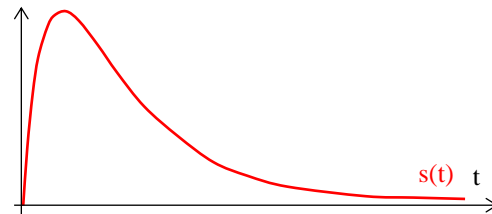
$$p_1 = -m\omega_0 - \omega_0 \sqrt{m^2 - 1} \quad \text{et} \quad p_2 = -m\omega_0 + \omega_0 \sqrt{m^2 - 1} \quad \text{avec} \quad p_1 < p_2 < 0$$

$$\text{d'où} \quad S(p) = \frac{K \omega_0^2}{(p - p_1)(p - p_2)} = K \omega_0^2 \left( \frac{A}{(p - p_1)} + \frac{B}{p - p_2} \right) = \frac{K \omega_0^2}{2\sqrt{m^2 - 1}} \left( \frac{1}{p - p_1} - \frac{1}{p - p_2} \right)$$

d'où

$$s(t) = \frac{-K \omega_0}{2\sqrt{m^2 - 1}} (e^{p_2 t} - e^{p_1 t}) u(t)$$

$\Rightarrow$  système amorti (régime apériodique)



- deuxième cas :  $m < 1 \Rightarrow D(p)$  a alors 2 racines complexes conjuguées

$$\text{On peut alors écrire } S(p) \text{ sous la forme: } S(p) = \frac{K \omega_0^2}{(p + m\omega_0)^2 + \omega_0^2 (1 - m^2)}$$

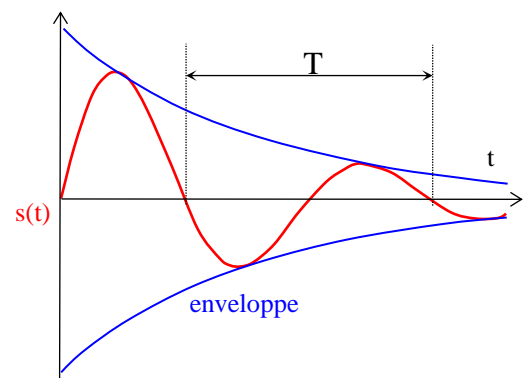
$$\text{soient } \omega^2 = \omega_0^2 (1 - m^2) \quad \text{et} \quad a = m\omega_0 \quad \Rightarrow \quad S(p) = \frac{K \omega_0}{\sqrt{1 - m^2}} \frac{\omega}{(p + a)^2 + \omega^2}$$

$$\text{d'où} \quad s(t) = \frac{K \omega_0}{\sqrt{1 - m^2}} e^{-m\omega_0 t} \sin(\omega_0 \sqrt{1 - m^2} t) u(t)$$

$\Rightarrow$  système sous-amorti (régime pseudo-périodique)

$$\text{La pseudo-période des oscillations vaut } T = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - m^2}}$$

Lorsqu'il n'y a pas d'amortissement ( $m = 0$ ), on a une réponse sinusoïdale de pulsation  $\omega_0$  (ce qui justifie le nom de pulsation propre donné à  $\omega_0$ ).



- troisième cas :  $m = 1 \Rightarrow D(p)$  a alors une racine double.

L'allure de la réponse serait comparable à celle obtenue dans le cas du régime apériodique mais ce cas est impossible dans la réalité: on ne peut avoir une valeur réelle de  $m$  exactement égale à 1!

8.4.2 – Réponse indicielle :

Remarque : la réponse indicielle est l'intégrale de 0 à  $t$  de la réponse impulsionnelle.

En effet,  $S_{\text{imp}} = H(p).1$  et  $S_{\text{ind}} = H(p). \frac{1}{p}$

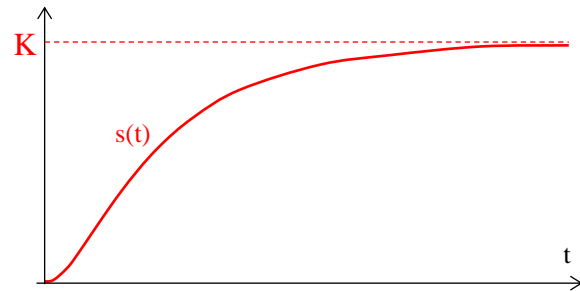
La réponse impulsionnelle étant nulle pour  $t = 0$ , la pente de la réponse indicielle est nulle à l'origine.

• premier cas :  $m > 1$  (système amorti)  $s(t) = \frac{K\omega_0}{2\sqrt{m^2-1}} \int_0^t (e^{p_2 u} - e^{p_1 u}) du$

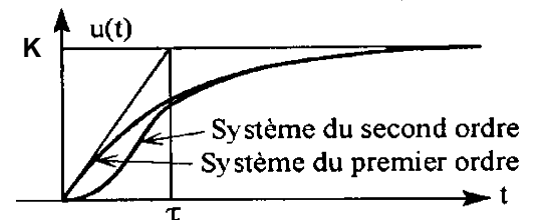
$$\int_0^t (e^{p_2 u} - e^{p_1 u}) du = \left[ \frac{1}{p_2} e^{p_2 u} - \frac{1}{p_1} e^{p_1 u} \right]_0^t = \frac{1}{p_2} e^{p_2 t} - \frac{1}{p_2} - \frac{1}{p_1} e^{p_1 t} + \frac{1}{p_1} = \frac{p_2 - p_1}{p_1 p_2} + \frac{e^{p_2 t}}{p_2} - \frac{e^{p_1 t}}{p_1}$$

$$= \frac{2\sqrt{m^2-1}}{\omega_0} + \frac{e^{p_2 t}}{p_2} - \frac{e^{p_1 t}}{p_1}$$

d'où  $s(t) = \left[ K + \frac{K\omega_0}{2\sqrt{m^2-1}} \left( \frac{e^{p_2 t}}{p_2} - \frac{e^{p_1 t}}{p_1} \right) \right] u(t)$



Dès qu'on s'éloigne de  $t = 0$ , le système du second ordre est comparable à un premier ordre. Au début de l'évolution, le premier ordre réagit plus vite (pente à l'origine non nulle).



• deuxième cas :  $m < 1$  (système sous-amorti)  $s(t) = \frac{K\omega_0}{\sqrt{1-m^2}} \int_0^t e^{-m\omega_0 u} \sin(\omega_0 \sqrt{1-m^2} u) du$

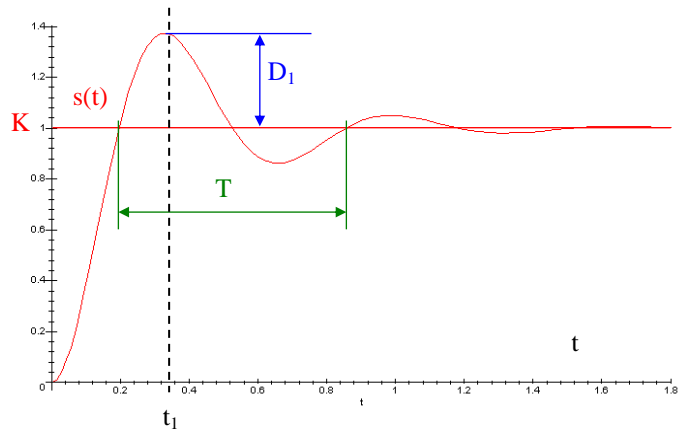
En intégrant deux fois par parties :

$$s(t) = K \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1-m^2}} e^{-m\omega_0 t} \sin(\omega_0 \sqrt{1-m^2} t + \arccos(m)) \right)$$

Les dépassements  $D_k$  sont les maxima et minima de la courbe aux temps  $t_k$  (zéros de la réponse impulsionnelle).

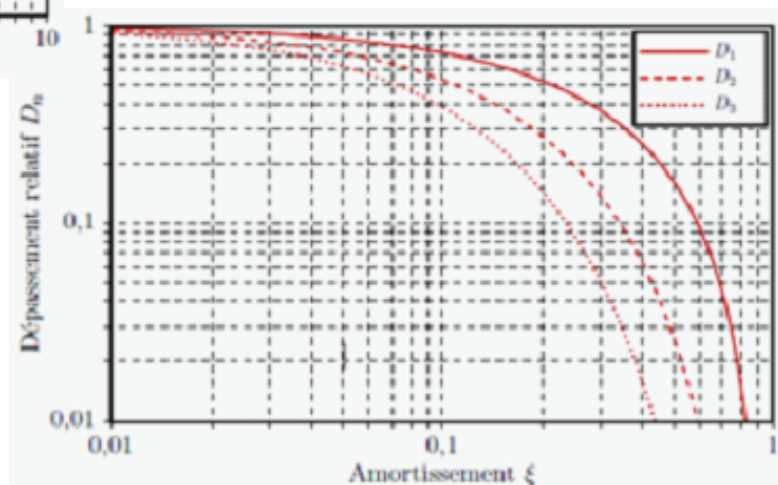
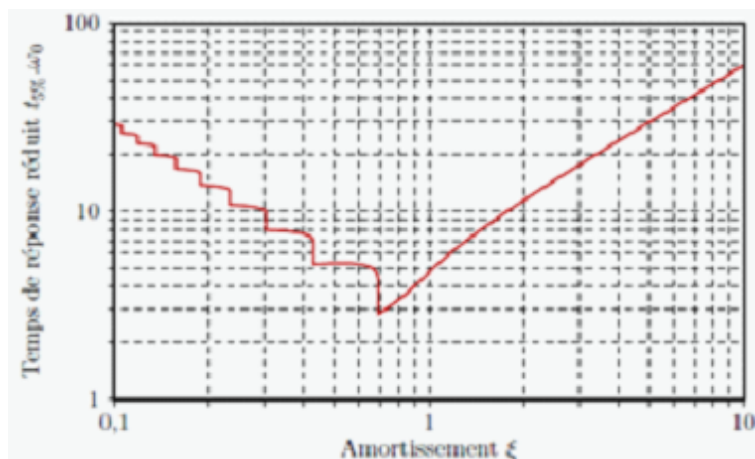
Premier dépassement:  $D_1 = K e^{\frac{-\pi m}{\sqrt{1-m^2}}}$

pour  $t_1 = \frac{\pi}{\omega_0 \sqrt{1-m^2}} = \frac{T}{2}$



La valeur du premier dépassement (très importante dans les applications) ne dépend que du coefficient d'amortissement. On la donne souvent en pourcentage de la valeur finale.

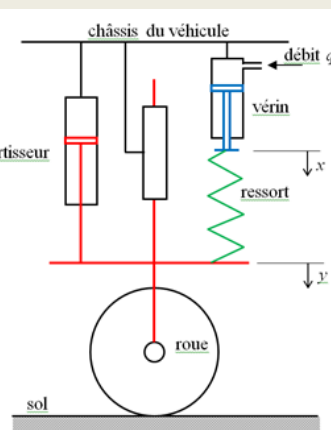
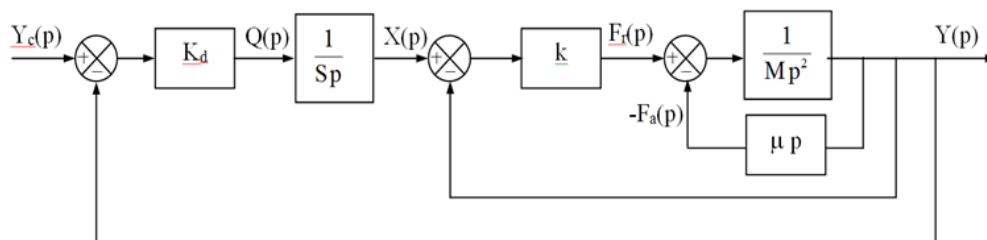
On utilisera très souvent les abaques suivants pour éviter l'utilisation des formules. Ils donnent les dépassements relatifs et le temps de réponse réduit (produit pulsation propre par temps de réponse à 5%) en fonction du coefficient d'amortissement. Ils sont à échelles logarithmiques.



## Illustration 2 : Suspension pilotée d'automobile

**1<sup>ère</sup> étude** : le sol est parfaitement plat donc  $f_s(t) = 0$ .

1 –Transformer les équations traduisant le fonctionnement du système et Donner le schéma-bloc du système : entrée  $Y_c$ , sortie  $Y$ .



On donne  $M = 50 \text{ kg}$ ,  $k = 2.10^4 \text{ N/m}$  et  $\mu = 3.10^3 \text{ N s /m}$ .

2. Déterminer la fonction de transfert  $H_1(p) = \frac{Y(p)}{X(p)}$  sous forme canonique. Déterminer analytiquement puis numériquement le gain statique  $K$ , la pulsation propre  $\omega_0$  et le coefficient d'amortissement  $m$ .

$$H_1(p) = \frac{1}{1 + \frac{\mu}{k}p + \frac{M}{k}p^2} \Rightarrow \text{Gain statique} = 1 \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M}} = 20 \text{ rad / s} \quad m = \frac{\mu}{2\sqrt{kM}} = 1.5$$

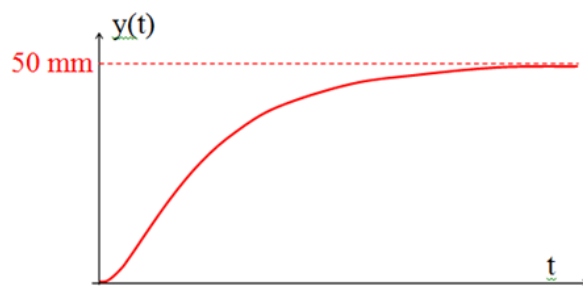
$$H_1(p) = \frac{1}{1 + 0.15p + 0.0025p^2} \approx \frac{416}{(p + 8)(p + 52)}$$

3. Déterminer l'équation de  $y(t)$  en réponse à un échelon de 50mm et donner l'allure de la réponse  $y(t)$

$$Y(p) = H_1(p) \cdot X(p) = \frac{416}{(p+8)(p+52)} \frac{50}{p}$$

$$= \frac{A}{p} + \frac{B}{p+8} + \frac{C}{p+52} = \frac{50}{p} - \frac{59}{p+8} + \frac{9}{p+52}$$

d'où  $y(t) = (50 - 59 e^{-8t} + 9 e^{-52t}) u(t)$



On modifie le coefficient d'amortissement visqueux  $\mu$  et on soumet à nouveau le système à un échelon de déplacement  $x(t)$  égal à 50 mm. La réponse  $y(t)$  est donnée ci contre.

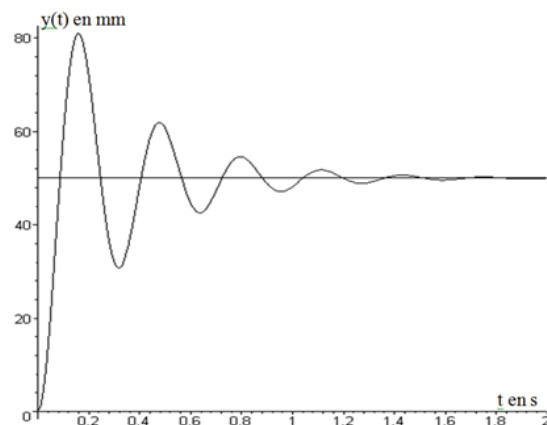
4. Quelle valeur faudrait-il donner à  $\mu$ . Pour avoir un temps de réponse minimal ?

On aurait un temps de réponse minimal avec  $m = 0,7$  donc

$$\mu = 2m \sqrt{kM}$$

$$= 2 \cdot 0,7 \cdot \sqrt{2 \cdot 10^4 \cdot 50}$$

$$= 1,4 \cdot 10^3 \text{ Ns / m}$$



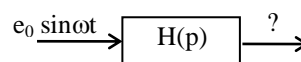
## 9 – Identification :

On ne peut pas toujours déterminer un modèle mathématique (donc calculer une fonction de transfert) pour un système réel à partir des lois physiques qui régissent son comportement (système trop complexe ou mal connu). L'approche expérimentale consiste à soumettre le système à des entrées connues puis à rechercher une fonction de transfert (par identification) qui approche au mieux la relation observée entre l'entrée et la sortie.

On peut se fixer a priori l'ordre du modèle étudié : plus l'ordre sera élevé, plus la précision du modèle sera grande mais la fonction de transfert sera plus lourde à manipuler. D'autre part, les mesures étant entachées d'erreurs inévitables et les caractéristiques du système pouvant évoluer dans le temps, il ne sert à rien de rechercher un modèle trop fin.

## 10 - Analyse fréquentielle ou harmonique :

### 10.1 – Définitions :

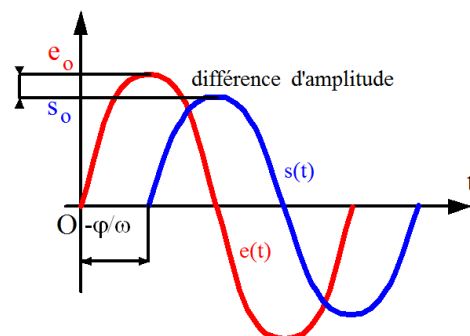


On soumet un système linéaire à une entrée sinusoïdale  $e(t) = e_0 \sin \omega t$ .

La réponse **en régime permanent** est

$s(t) = s_0 \sin(\omega t + \varphi)$  : même fréquence  $\omega$  que l'entrée avec un déphasage  $\varphi$  et une amplitude  $s_0$  qui dépendent de  $\omega$ . Les réponses pour différentes valeurs de  $\omega$  sont dites fréquentielles ou harmoniques.

On pose  $\underline{e} = e_0 e^{j\omega t}$  et  $\underline{s} = s_0 e^{j(\omega t + \varphi)}$ . Alors,  $e(t)$  et  $s(t)$  représentent les parties imaginaires de  $\underline{e}$  et  $\underline{s}$ .



de (1),  $a_n (j\omega)^n \underline{s} + \dots + a_0 \underline{s} = b_m (j\omega)^m \underline{e} + \dots + b_0 \underline{e}$  d'où

$$\frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{b_0 + \dots + b_m (j\omega)^m}{a_0 + \dots + a_n (j\omega)^n} = H(j\omega) = \frac{s_0}{e_0} e^{j\varphi}$$

$H(j\omega)$  est donc un nombre complexe :

- le module  $A(\omega) = |H(j\omega)| = \frac{s_0}{e_0}$
- l'argument est le déphasage  $\varphi(\omega) = \text{Arg}(H(j\omega))$

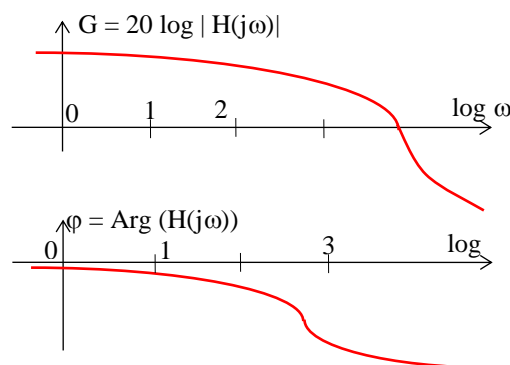
## 10.2 - Représentations graphiques de la fonction de transfert:

### 10.2.1 – Diagramme de Bode :

On représente  $H(j\omega)$  sur **2 courbes** en fonction de  $\omega$  (axes des abscisses gradué en  $\log(\omega)$ ) :

- le module  $G$  (gain) en décibels (dB):  $G = 20 \log |H(j\omega)|$

- la phase  $\varphi$  en degrés ou radians



Intérêt :

si  $H = H_1 \cdot H_2$  (fonctions de transfert en série) :

alors  $20 \log |H| = 20 \log |H_1| + 20 \log |H_2|$

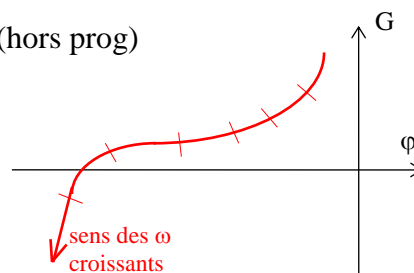
et  $\text{Arg}(H) = \text{Arg}(H_1) + \text{Arg}(H_2)$

Nota :

- ✓ en mécanique,  $\varphi < 0$  (réponse en retard) et  $G \rightarrow 0$  quand  $\omega \rightarrow \infty$  (caractère passe-bas des servo-mécanismes).
- ✓ variation de  $K \Rightarrow$  translation verticale de  $G$  et  $\varphi$  invariant

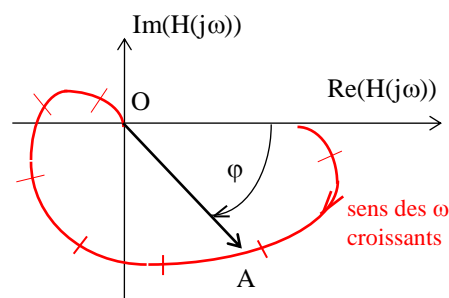
### 10.2.2 – Diagramme de Black (ou Black-Nichols)(hors prog)

On représente le module  $G$  de  $H(j\omega)$  en dB en fonction de la phase exprimée en degrés et on gradue la courbe en  $\omega$ .



### 10.2.3 – Diagramme de Nyquist (hors prog)

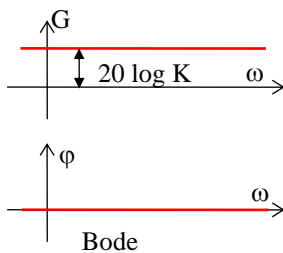
Pour chaque valeur de  $\omega$ , on représente  $H(j\omega)$  dans le plan complexe et on gradue la courbe en  $\omega$ . Le gain (OA) et le déphasage sont directement lisibles pour chaque valeur de  $\omega$ .



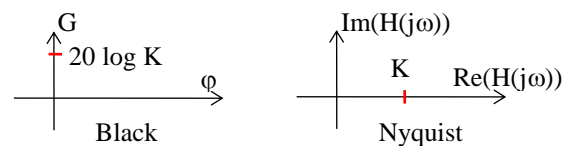
### 10.3 - Système à action proportionnelle :

$$H(j\omega) = K$$

exemple: capteur



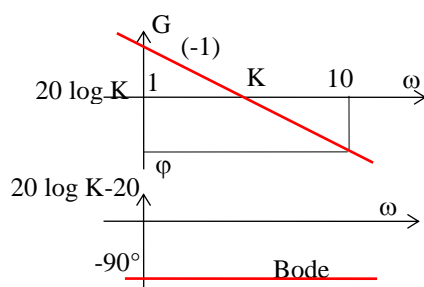
pour info



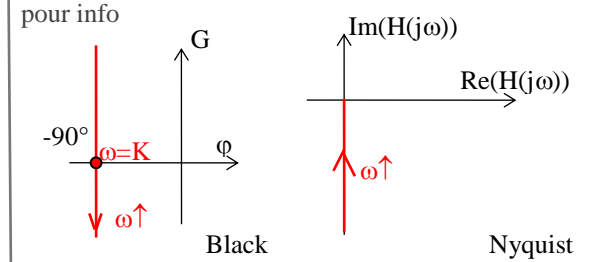
### 10.4 - Intégrateur pur :

$$H(j\omega) = \frac{K}{j\omega}$$

gain  $G = 20 \log K - 20 \log \omega$   
phase  $\varphi = -90^\circ$



pour info

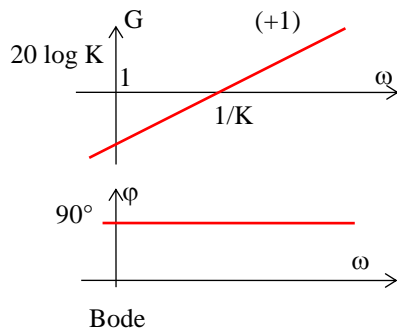


Remarque : La pente du gain est de - 20 dB par décade (noté -1).

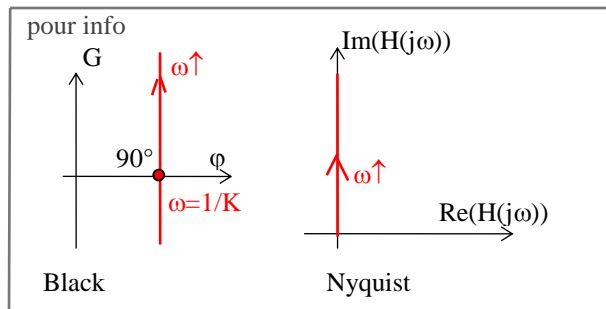
### 10.5 - Dérivateur pur :

$$H(j\omega) = jK\omega$$

gain  $G = 20 \log K + 20 \log \omega$   
phase  $\varphi = 90^\circ$



pour info

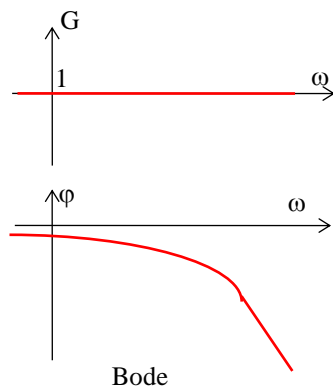


### 10.6 - Retard pur:

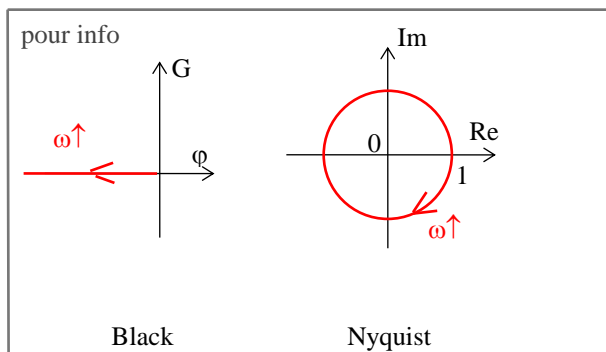
$$H(j\omega) = e^{-j\tau\omega}$$

gain  $G = 0$   
phase  $\varphi = -\omega\tau$

$\omega$	0	$1/\tau$	$\infty$
$\log \omega$	$-\infty$	$-\log \tau$	$\infty$
$\varphi$	0	-1 rad	$-\infty$



pour info





### 10.7 - Système du 1<sup>er</sup> ordre ( $K > 0$ ):

$$H(j\omega) = \frac{K}{1 + j\omega\tau}$$

d'où

$$G = 20 \log \frac{K}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}}$$

et

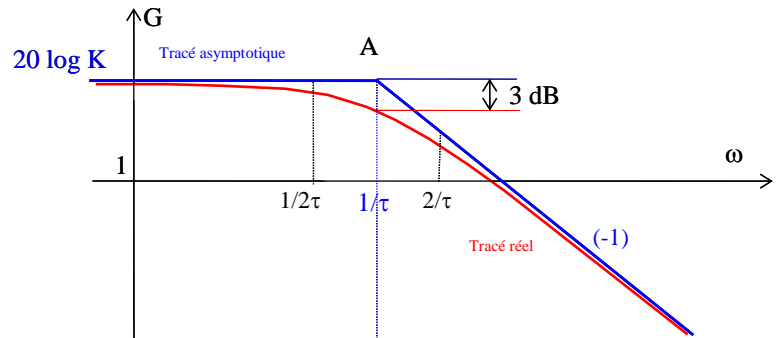
$$\varphi = -\arctan(\omega\tau)$$

#### 10.7.1 - Diagramme de Bode:

On trace d'abord les diagrammes asymptotiques :

- quand  $\omega\tau \ll 1$ ,  $H(j\omega) \approx K$  et  $\varphi = 0^\circ$   
(cf système à action proportionnelle)

- quand  $\omega\tau \gg 1$ ,  $H(j\omega) \approx \frac{K}{j\omega\tau}$  et  $\varphi = -90^\circ$   
(cf intégrateur donc pente -20dB/décade)



Pulsation de cassure en A :

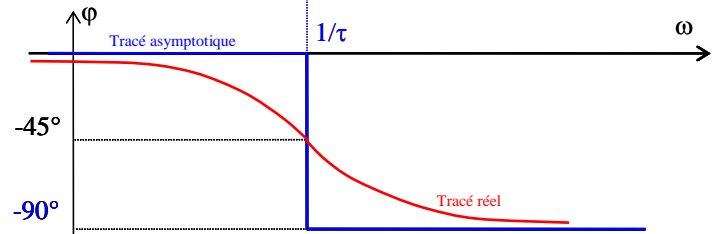
$$20 \log K = 20 \log K - 20 \log \omega\tau \Rightarrow \omega\tau = 1 \text{ d'où}$$

$$\omega = \omega_c = 1/\tau$$

$$G(1/\tau) = 20 \log K - 20 \log \sqrt{2} = 20 \log K - 3 \text{ dB}$$

$$G(1/2\tau) = 20 \log K - 20 \log \sqrt{1.25} = 20 \log K - 1 \text{ dB}$$

de même, pour  $\omega = 2/\tau$ , l'écart entre le gain et le lieu asymptotique vaut 1 dB.

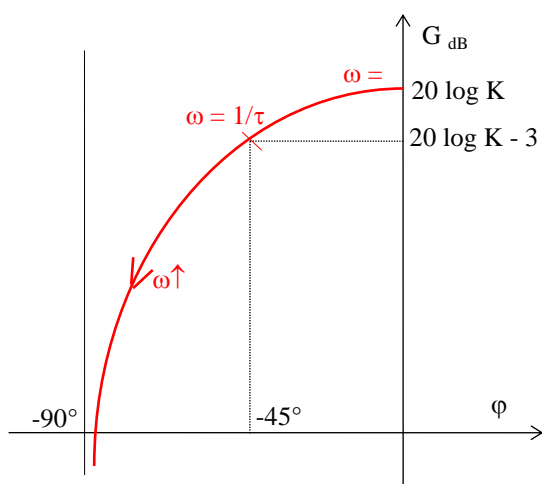


$\omega$	0	$1/2\tau$	$1/\tau$	$2/\tau$	$\infty$
$\varphi$	0	$-26^\circ$	$-45^\circ$	$-63^\circ$	$-90^\circ$

#### Remarques:

- une modification de  $K$  se traduit par une translation verticale de la courbe de gain et n'a pas d'influence sur la phase (vrai  $\forall H(p)$ ).
- une modification de la constante de temps  $\tau$  déplace la pulsation de cassure.

#### 10.7.2 - Diagramme de Black:



Une modification du gain statique  $K$  se traduit par une translation verticale de la courbe de gain.

(On utilisera ce diagramme pour la correction des systèmes asservis).

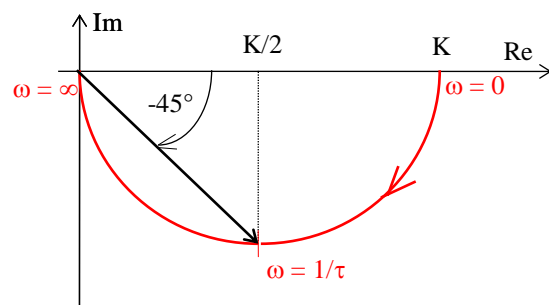
pour info

## 10.7.3 - Diagramme de Nyquist:

$$H(j\omega) = \frac{K(1 - j\omega\tau)}{1 + \omega^2\tau^2} = \frac{K}{1 + \omega^2\tau^2} - j \frac{K\tau\omega}{1 + \omega^2\tau^2} = a + jb$$

$$a^2 + b^2 = Ka \Rightarrow (a - K/2)^2 + b^2 = (K/2)^2$$

donc le lieu de Nyquist est un cercle de rayon  $K/2$  centré en  $(K/2, 0)$  (en fait, seul le  $\frac{1}{2}$  cercle inférieur est parcouru car  $-90^\circ \leq \varphi \leq 0^\circ$ ).



pour info

**10.10 - Système du 2ème ordre :** 
$$H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2m}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

$$H(j\omega) = \frac{K}{(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}) + j \frac{2m\omega}{\omega_0}}$$

on note  $u = \frac{\omega}{\omega_0}$  = pulsation réduite

• module :  $|H(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{(1 - u^2)^2 + 4m^2u^2}} \Rightarrow G_{dB} = 20 \log K - 10 \log[(1 - u^2)^2 + 4m^2u^2]$

$\Rightarrow$  la dérivée s'annule pour  $m < \frac{\sqrt{2}}{2}$  ; résonance pour la pulsation  $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2m^2}$

$$\Rightarrow |H(j\omega_r)| = \frac{K}{2m\sqrt{1 - m^2}}$$

Plus  $m$  est faible, plus la résonance est importante: caractérisée par le facteur de surtension (rapport entre gain à la résonance et gain statique)  $\Rightarrow Q = \frac{1}{2m\sqrt{1 - m^2}}$

• phase :  $\varphi = -\arctan \frac{2mu}{1 - u^2}$  (pour  $u < 1$ )

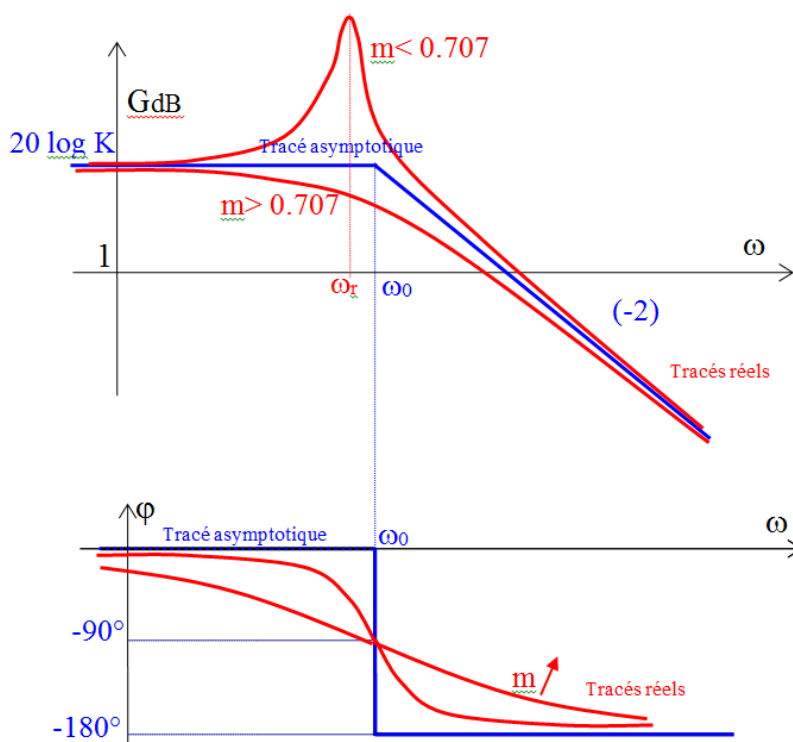
## 10.10.1 - Diagramme de Bode:

$$G(\omega) = 20 \log K - 10 \log [(1 - u^2)^2 + 4m^2u^2]$$

-  $\omega \rightarrow 0$  :  $G \rightarrow 20 \log K$  et  $\varphi \rightarrow 0$

-  $\omega \rightarrow \infty$  :  $(1 - u^2)^2 + 4m^2u^2 \rightarrow u^4$   
 $\Rightarrow G \rightarrow 20 \log K - 40 \log u$   
 $\varphi \rightarrow -180^\circ$

-  $\omega = \omega_0$  :  $G = 20 \log K/2m$   
 $\varphi = -90^\circ$

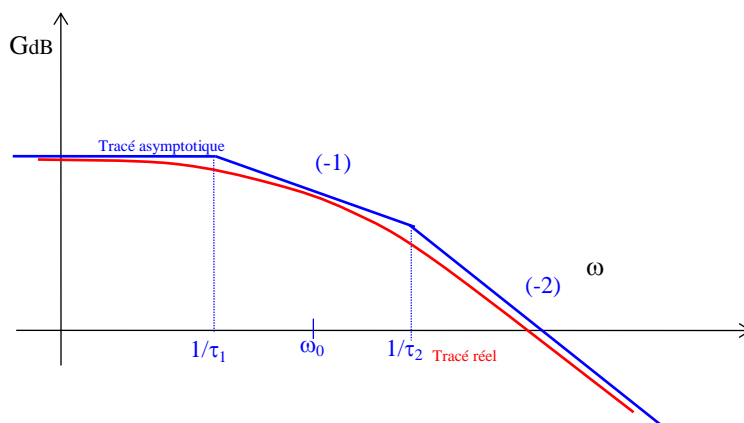


Nota: si  $m > 1$ , on a alors 2 racines réelles

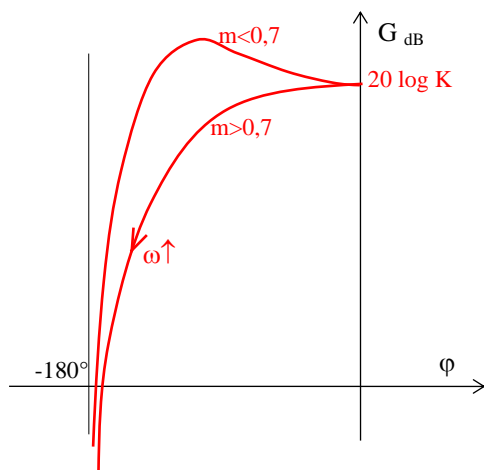
$$H = \frac{K}{1 + \tau_1 p} \cdot \frac{1}{1 + \tau_2 p} = H_1 \cdot H_2 \quad (\text{diagramme asymptotique plus précis})$$

$$\tau_1 \cdot \tau_2 = \frac{1}{\omega_0^2} \Rightarrow \log \frac{1}{\tau_1} + \log \frac{1}{\tau_2} = 2 \log \omega_0$$

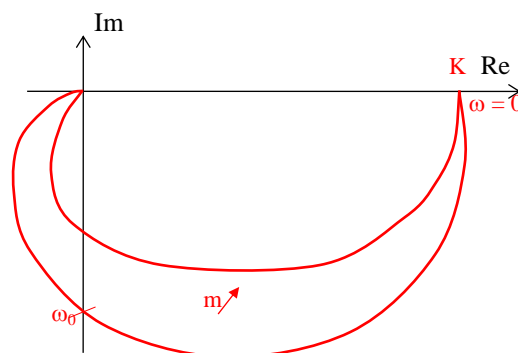
donc  $\log \omega_0$  est au milieu de  $\log \frac{1}{\tau_1}$  et  $\log \frac{1}{\tau_2}$



### 10.10.2 - Diagramme de Black:



### 10.10.3 - Diagramme de Nyquist:



$$H(j\omega) = \frac{K(1-u^2)}{(1-u^2)^2 + 4m^2u^2} - j \frac{2Kmu}{(1-u^2)^2 + 4m^2u^2}$$

$$\omega = 0 : H(j\omega) = K$$

$$\omega = \omega_0 : H(j\omega) = -j \frac{K}{2m} \quad \text{et} \quad \varphi = -90^\circ$$

$$\omega = \omega_r \text{ (si } m < 0,7 \text{)} : \text{gain max}$$

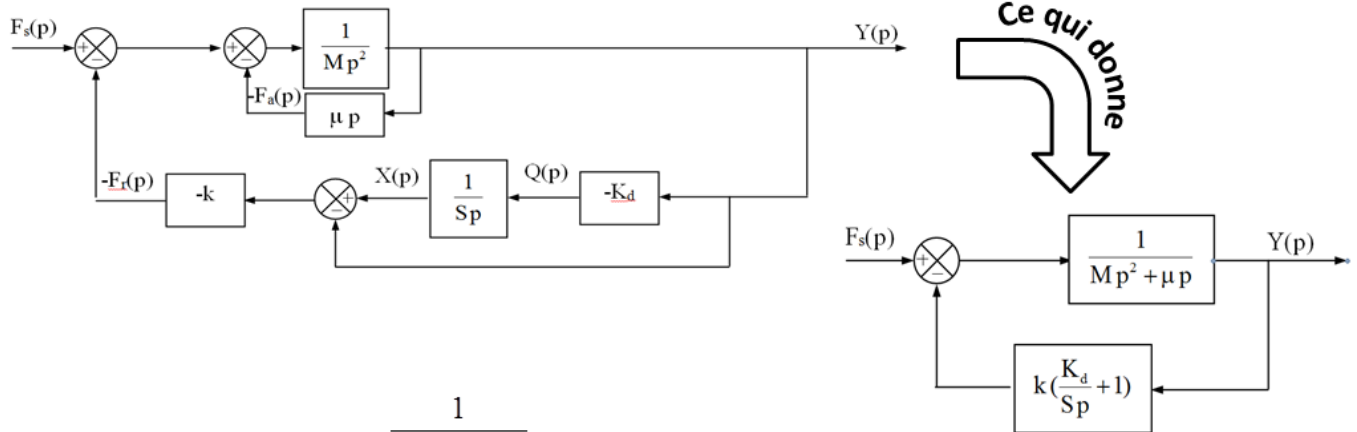
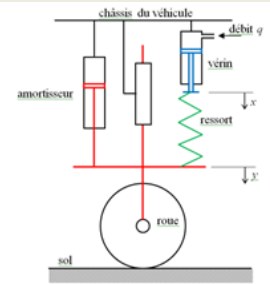
$$\omega \rightarrow \infty : H(j\omega) \rightarrow 0^- \quad \text{et} \quad \varphi \rightarrow -180^\circ$$

pour info

## Illustration 2 : Suspension pilotée d'automobile

**2<sup>ème</sup> étude** : la garde au sol est fixée donc  $y_c(t) = 0$ . On étudie maintenant l'influence du profil du sol sur la suspension donc  $f_s(t) \neq 0$ .

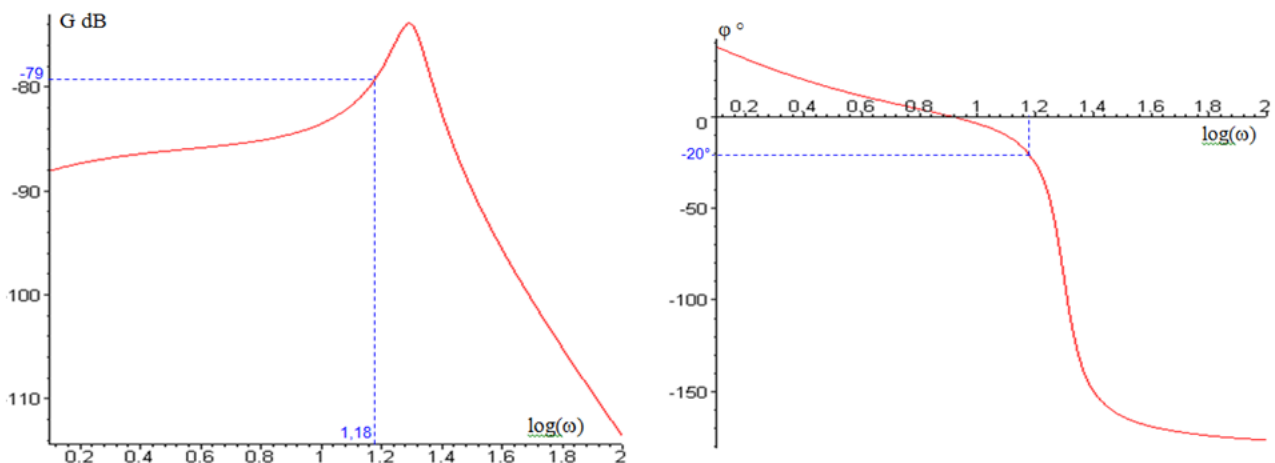
5. Donner le schéma-bloc du système d'entrée  $F_s$ , de sortie  $Y$  puis déterminer la fonction de transfert  $H_s(p) = \frac{Y(p)}{F_s(p)}$



$$\text{d'où } H_s(p) = \frac{Y(p)}{F_s(p)} = \frac{\frac{1}{Mp^2 + \mu p}}{1 + \frac{k(K_d + Sp)}{Sp(Mp^2 + \mu p)}} = \frac{S}{K_d k} \frac{p}{1 + \frac{S}{K_d} p + \frac{S\mu}{K_d k} p^2 + \frac{SM}{K_d k} p^3}$$

L'action  $f_s(t)$  est maintenant modélisée par un **signal sinusoïdal d'amplitude 250 et une pulsation de 15 rad/s** correspondant au roulage du véhicule sur une route bosselée.

6. A l'aide du diagramme de Bode de  $H_s(p)$  donnée ci-contre, donner l'expression numérique de  $y(t)$  en régime permanent.



$$f_s(t) = 250 \sin(15t) \text{ donc } y(t) = y_0 \sin(15t + \varphi)$$

pour  $\omega = 15$ ,  $\log(15) = 1,18$  et on lit sur le diagramme de Bode :  $20 \log |H_s(15j)| = -79 \text{ dB}$  et  $\varphi = -20^\circ$

$$\text{d'où } \frac{y_0}{250} = 10^{\frac{-79}{20}} = 1,1 \cdot 10^{-4} \text{ soit } y_0 = 0,028 \text{ et } \varphi = -20 \cdot \frac{\pi}{180} = -0,35 \text{ rad} \quad y(t) = 0,028 \sin(15t - 0,35)$$

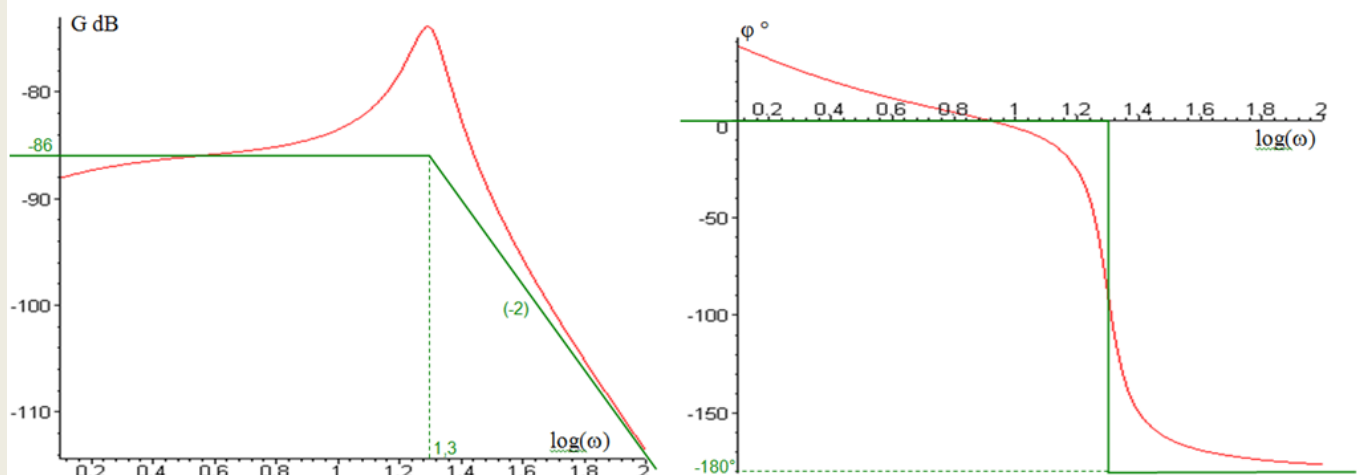
A partir d'une pulsation  $\omega_1$ , on peut approximer  $H_s(p)$  par la fonction de transfert

$$H(p) = \frac{1}{k + \mu p + Mp^2} \quad \text{avec } M = 50 \text{ kg, } k = 2.10^4 \text{ N/m et } \mu = 3.10^2 \text{ N s /m.}$$

7. Tracer le diagramme asymptotique de  $H(p)$  sur le même diagramme que  $H_s(p)$ .

$$H(p) = \frac{1}{2.10^4 + 300p + 50p^2} = \frac{5.10^{-5}}{1 + 0.015p + \frac{p^2}{400}}$$

fonction de transfert du 2<sup>ème</sup> ordre avec  $\omega_0 = 20 \text{ rad/s}$   $20 \log(5.10^{-5}) = -86 \text{ dB}$  et  $\log(20) = 1,3$



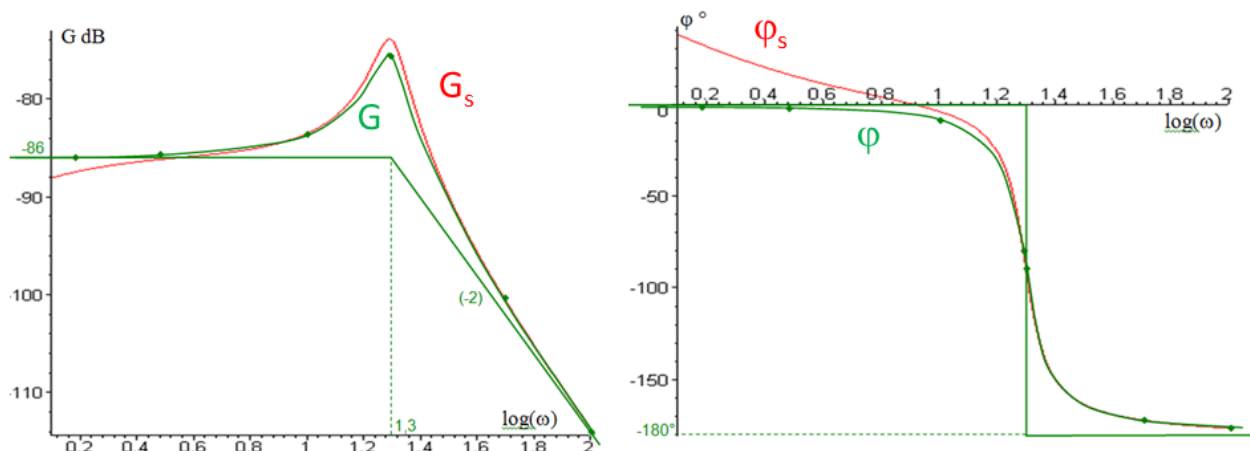
8. Remplir le tableau ci-contre. Reporter ces valeurs sur le diagramme de Bode et donner l'allure des courbes de gain et de phase. A partir de quelle valeur  $\omega_1$  peut-on approximer  $H_s(p)$  par  $H(p)$  ?

$\omega$	1,5	3	10	50	100	$\omega_r=19,5$
$\log(\omega)$	0,18	0,48	1	1,7	2	1,29
G dB	-86	-85,8	-83,7	-100	-114	-75,5
$\varphi^\circ$	-1,3	-2,6	-11,3	-172	-176	-80

$$H(p) = \frac{1}{2.10^4 + 300p + 50p^2} = \frac{5.10^{-5}}{1 + 0.015p + \frac{p^2}{400}}$$

$$G = -20 \log \sqrt{(2.10^4 - 50\omega^2)^2 + (300\omega)^2}$$

$$\varphi = -\arctan \frac{300\omega}{2.10^4 - 50\omega^2} \quad \text{Pour } \omega < 20 \text{ rad/s}$$



A partir de  $\omega_1 \approx 10 \text{ rad/s}$ , on peut approximer  $H_s(p)$  par  $H(p)$