

## Programme de colle - semaine 01 du 15/09/2025 au 21/09/2025

- Les colles sont obligatoires. Un élève ne peut pas changer de groupe sans l'accord du professeur.
- La colle commence par une question de cours ( $\leq 15$ -20 minutes), puis un exercice de compréhension ou d'application directe, et enfin, des exercices plus variés.
- La question de cours contient une définition et/ou l'énoncé d'une propriété avec la démonstration si elle s'y prête bien.
- Sauf mention explicite du contraire, la démonstration de toute propriété du cours est exigible. Je marque d'un (\*) les points bien adaptés à une démonstration.

### 1 Notions de logique

- Exercices de compréhension utilisant les quantificateurs, les notations ensemblistes  $\{x \in E, P(x)\}$ ,  $\{f(x), x \in E\}$ , etc.
- Résolution d'équations par équivalence ou analyse/synthèse.
- **Utilisation du second degré sous toutes ses formes (racines, forme canonique, signe d'un trinôme, inéquation).**
- On fera la chasse aux symboles  $\Leftrightarrow$  et  $\Rightarrow$  utilisés n'importe comment.

### 2 Fonctions exp, ln.

- Définition de la fonction exp (c'est l'unique fonction dérivable sur  $\mathbb{R}$  telle que  $\exp' = \exp$  et  $\exp(0) = 1$ , existence et unicité admises).  
Propriété fondamentale :  $\exp(x + y) = \exp(x) \exp(y)$  (\* en admettant que exp ne s'annule pas).  
Variations, limites.
- Définition de ln, propriétés, variations, limites, dérivée (pas de démonstration à savoir sauf la stricte croissance, démontrée à partir de celle de l'exponentielle).
- Notation  $a^b$  avec  $a \in \mathbb{R}^{*+}$  et  $b \in \mathbb{R}$ . Règles de calcul sur les puissances.
- Logarithme en base  $a$  ( $a \in \mathbb{R}^{*+}$ ,  $a \neq 1$ ) (pas d'exercice fait).

### 3 Récurrences, sommes et suites récurrentes élémentaires

*Les exercices doivent rester à un niveau simple : petite somme à simplifier, petite récurrence.*

- Principe de récurrence simple (admis).  
Principes de récurrence forte, double (démontrés à partir du principe de récurrence simple).
- Manipulation des  $\sum$  : changement d'indice (translation), relation de Chasles, linéarité,...
- Suite arithmétique, géométrique : définition récurrente, expression générale, somme des termes consécutifs.  
En particulier la somme des entiers consécutifs (\*) et  $1 + r + \dots + r^n = \dots$  (\*)
- Pour cette première colle, pas de coefficients binomiaux ni de formule du binôme de Newton. Pas de somme double.

## 4 Exercices faits

On peut s'en inspirer, mais ne pas donner exactement les mêmes.

1. Résoudre les équations / inéquations suivantes :

a)  $(E) : x + 1 = \sqrt{x + 1}$

b)  $(E) : x - 1 = \sqrt{x + 1}$

c)  $(E) : 2e^{-2x} - e^{-x} - 1 = 0$

d)  $(E) : 2e^{-2x} - e^{-x} - 1 \leq 0$

2. Montrer les inégalités suivantes :

a)  $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq x + 1$

b)  $\forall x \in ]-1, +\infty[, \ln(1 + x) \leq x$

3. a) Montrer que  $\forall n \geq 4, n! \geq 4^{n-2}$ .

b) Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ .