1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ou inéquations suivantes : autrement dit, donner l'ensemble des solutions. Dans chaque cas il faut se ramener à une équation d'un type connu.

   a) $(E)\ :\ x+1=\sqrt{x+1}$
   b) $(E)\ :\ x-1=\sqrt{x+1}$
   c) $(E)\ :\ 2e^{-2x}-e^{-x}-1=0$
   d) $(E)\ :\ 2e^{-2x}-e^{-x}-1\leqslant 0$
   e) $(E)\ :\ \dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{2x-1}>1$

2. **Équation à paramètre**
   Soit a un paramètre réel. On considère l'équation $(E)\ :\ 1+x=a(1-x)$ d'inconnue x.
   Donner en fonction de a l'ensemble des solutions.

3. **Étude de signe, simplification d'expression**
   Soit $f(x)=\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$ et $g(x)=x-2\sqrt{x-1}$.

   a) Donner $\mathcal{D}_g$, l'ensemble de définition de g.
   b) Montrer que pour tout x dans $\mathcal{D}_g$, $g(x)\geqslant 0$.
   c) Déterminer $\mathcal{D}_f$, l'ensemble de définition de f
   d) Simplifier $f(x)^2$, et en déduire une expression de $f(x)$ plus simple que celle de départ.
   e) Tracer le graphe de f (sans utiliser de calculatrice, bien sûr)

4. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
   Traduire à l'aide de quantificateurs les propriétés suivantes (sans utiliser la dérivée) et faire un dessin qui traduit la propriété.

   a) f est constante (avec deux $\forall$).
   b) f est constante (avec un $\forall$ et un $\exists$).
   c) f n'est pas constante.
   d) f est croissante.
   e) f n'est pas croissante.

5. Pour chacune des propriétés suivantes :
   - Écrire sa négation en utilisant des quantificateurs ($\exists$ et $\forall$)
   - Dire si elle est vraie.

   a) $p_1\ :\ \forall x\in\mathbb{R},\ x\geqslant 0$
   b) $p_2\ :\ \forall x\in\mathbb{R}^+,\ \exists y\in\mathbb{R},\ x=y^2$
   c) $p_3\ :\ \forall x\in\mathbb{R},\ \exists y\in\mathbb{R},\ x=y^2$
   d) $p_4\ :\ \exists y\in\mathbb{R},\ \forall x\in\mathbb{R}^+,\ x=y^2$
   e) p_5 : cet été, il a fait tous les jours plus de 30°.

6. Dire si les expressions ensemblistes suivantes ont un sens et si oui, les traduire en une phrase.

   a) $\{x \in \mathbb{R},\, x^2 \leqslant 2\}$
   b) $\{x^3 - x,\, x \in [-1,3]\}$
   c) $\{x \in \mathbb{R},\, x^2\}$
   d) $\{e^x > 1,\, x \in \mathbb{R}\}$

7. Décrire explicitement les ensembles suivants sous forme d'intervalle ou de réunion d'intervalles.

   a) $E_1 = \{x \in \mathbb{R},\, e^x \leqslant 2\}$
   b) $E_2 = \{x \in \mathbb{R},\, x^2 \geqslant 4x\}$
   c) $E_3 = \left\{\cos x,\, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right\}$
   d) $E_4 = \{x^2,\, x \in [-1,2]\}$

8. **Propriétés diverses**
   Montrer les propriétés suivantes :

   a) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2 + x \leqslant 20 \Rightarrow |x| \leqslant 5$
   b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n(n-1)$ est pair.
   c) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \left[x^2 + xy + y^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x,y) = (0,0)\right]$
   d) Pour tout $y \in \mathbb{R}$:

$$\left(\exists x \in \mathbb{R}^{*+},\, y = x + \frac{1}{x}\right) \quad \Leftrightarrow \quad y \geqslant 2$$

9. Quel est le plus grand : 4^{75} ou 3^{100} ?
   (Seuls objets autorisés : papier, crayon, cerveau)

Récurrences

1. Montrer les propriétés suivantes :

   a) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

   b) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} k \times k! = (n+1)! - 1$

   c) $\forall n \geqslant 4,\ n! > 4^{n-2}$

   d) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \prod_{k=1}^{n} (4k-2) = \dfrac{(2n)!}{n!}$

   e) $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall \theta \in [0, \pi],\ |\sin(n\theta)| \leqslant n \sin\theta$

   Rappels :
   - Inégalité triangulaire : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, |x+y| \leqslant |x| + |y|$
   - Formule d'addition : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \sin(x+y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$

2. **Principe de récurrence double**

   a) Soit p_n une propriété dépendant de l'entier n, définie pour $n \geqslant n_0$.
   On suppose que

   $$\begin{cases} p_{n_0} \text{ et } p_{n_0+1} \text{ sont vraies} \\ \forall n \geqslant n_0,\ (p_n \text{ et } p_{n+1}) \Rightarrow p_{n+2} \end{cases}$$

   Montrer que pour tout $n \geqslant n_0$, p_n est vraie.
   Indication : on pourra appliquer le principe de récurrence simple à une propriété q_n bien choisie.

   b) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

   $$\begin{cases} u_0 = u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \end{cases} \qquad \text{(suite de Fibonacci)}$$

   Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant \left(\dfrac{5}{3}\right)^n$

Sommes

3. Écrire les sommes suivantes à l'aide d'un $\sum$ (on ne cherchera pas à les simplifier) :

   a) $x^2 + x^3 + x^4 + \ldots + x^n$

   b) $1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + x^{10}$

   c) $\cos(x) + \cos(3x) + \cos(5x) + \cos(7x)$

4. Expliciter tous les termes des expressions suivantes, pour $n = 1,\ 2,\ 3$ successivement (ne pas chercher à simplifier le résultat) :

   a) $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$

   b) $\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \dfrac{k}{n^2}\right)$

5. Les formules suivantes sont-elles vraies ou inventées ?

   a) $\sum\limits_{k=1}^{n}(u_k v_k) = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} u_k\right)\left(\sum\limits_{k=1}^{n} v_k\right)$

   b) $\sum\limits_{k=1}^{n}(u_k + v_k) = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} u_k\right) + \left(\sum\limits_{k=1}^{n} v_k\right)$

   c) $\sum\limits_{k=1}^{n}(u_k - v_k) = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} u_k\right) - \left(\sum\limits_{k=1}^{n} v_k\right)$

   d) $\sum\limits_{k=1}^{n}(u_k + c) = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} u_k\right) + c$

   e) $\sum\limits_{k=1}^{n}(u_k^2) = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} u_k\right)^2$

   f) $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{u_k}{v_k} = \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} u_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} v_k}$

   g) $\sum\limits_{k=1}^{n} \cos(u_k) = \cos\left(\sum\limits_{k=1}^{n} u_k\right)$

6. Simplifier (si possible) la somme (ou le produit) en une expression explicite.
   n est un entier strictement positif.

   a) **Calculable ou pas ?**

      i) $\sum\limits_{k=1}^{n} e^{-k}$

      ii) $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{n}$

      iii) $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$

      iv) $\sum\limits_{k=1}^{n} e^{-k^2}$

   b) **Sans coefficients binomiaux**

      i) $\sum\limits_{k=1}^{n} \left(3 \times 2^k + 1\right)$

      ii) $\sum\limits_{k=0}^{n} (2k - 1 + 2^k)$

      iii) $\sum\limits_{k=1}^{n} 2^{2k+1}$

      iv) $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} \exp\left(\dfrac{k}{n}\right)$

      v) $\sum\limits_{k=1}^{n} \ln\left(\dfrac{k}{k+1}\right)$

      vi) $\dfrac{1}{1\times 2} + \dfrac{1}{2\times 3} + \cdots + \dfrac{1}{n\times(n+1)}$.

      Indication : on pourra chercher deux réels a et b tels que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{a}{k} + \dfrac{b}{k+1}$.

      vii) $\prod\limits_{k=1}^{n} \exp\left(\dfrac{k}{n}\right)$

      viii) $\sum\limits_{k=0}^{n} |k-1|$

c) **Avec coefficients binomiaux**

$(a,b) \in \mathbb{C}^2$.

i) $\sum\limits_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

ii) $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k$

iii) $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$

iv) $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{2k+1} b^{n-k}$

v) $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+k}$

d) **Sommes doubles**

i) $\sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=i}^{n} \dfrac{i}{j}$

ii) $\sum\limits_{i=0}^{n} \sum\limits_{j=0}^{n} \binom{i}{j}$

iii) $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} \min(i,j)$ Pour simplifier le calcul, considérer $S_{n+1} - S_n$

7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $S = \sum\limits_{k=1}^{n} k \binom{n}{k}$.

a) On pose, pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^k$. Simplifier $f(x)$.

b) En déduire pour tout $x \in \mathbb{R}$, la valeur explicite de $g(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} x^{k-1}$.

c) En déduire S.

d) Vérifier que pour tous k, n tels que $1 \leqslant k \leqslant n$, on a $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$, et retrouver l'expression explicite de S par un calcul direct.

1. Justifier que f est dérivable sur l'ensemble précisé, et calculer sa dérivée.

   a) $f : x \longmapsto x^x$ sur $\mathbb{R}^{*+}$

   b) $f : x \longmapsto \sqrt{1-x^2}$ sur $[0,1[$

   c) $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x^n}$ sur $\mathbb{R}^*$ $(n \in \mathbb{N}^*)$

   d) $f : x \longmapsto \ln\left[(x^2+1)^3\right]$ sur $\mathbb{R}$

   e) $f : x \longmapsto \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$ (ensemble à déterminer)

   f) $f : x \longmapsto \sqrt{\sqrt{x-2}-1}$ (chercher l'ensemble de définition et l'ensemble de dérivabilité)

2. **Inégalités à démontrer**

   a) $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \ln(1+x) \geqslant x - \dfrac{x^2}{2}$

   b) $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \sin x \leqslant x$

   c) $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ e^x \leqslant 1 + xe^x$

   d) **Inégalité de Young** : $\forall x, y \in \mathbb{R}^{*+},\ xy \leqslant \dfrac{x^p}{p} + \dfrac{y^q}{q}$,

   p, q étant deux réels dans $]1, +\infty[$ tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

3. Soit $f\colon \begin{array}{ccc}]-1,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x+1} \end{array}$ et $g\colon \begin{array}{ccc}]-1,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x^2-1} \end{array}$

   a) Donner l'expression de f', f'', f'''.

   b) Recommencer le calcul, sans se tromper cette fois.

   c) Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'expression de $f^{(n)}$.

   d) Donner l'expression de $g^{(n)}$.

   On pourra chercher $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ *tel que* $\forall x \in]-1,1[,\ g(x) = \dfrac{a}{x+1} + \dfrac{b}{x-1}$.

4. Soit $f\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x^2\cos\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$

   Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ mais pas de classe $\mathcal{C}^1$.

1. Pour chacun des réels suivants, donner une expression par radicaux (c'est à dire une expression qui n'utilise que les 4 opérations et la racine carrée).
   On pourra penser aux formules d'addition et de duplication.

$$\cos\frac{\pi}{12} \qquad \sin\frac{\pi}{12} \qquad \cos\frac{7\pi}{12} \qquad \cos\frac{5\pi}{8} \qquad \sin\frac{5\pi}{8}$$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$:
   a) $-\sqrt{2}\cos x + \sqrt{2}\sin x = 1$
   b) $\cos(2x) + \sqrt{3}\sin(2x) = \sqrt{2}$
   c) $\cos x = \sin 4x$
   d) $2\sin x - 1 < 0$
   e) $2\sin x - 1 < \sqrt{1-\cos^2 x}$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre dans $[0, \pi]$ l'équation $\sin(nx) = 0$. Combien a-t-elle de solutions ?

4. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f\,:\,x \longmapsto \dfrac{4}{3}x^3 + \dfrac{1}{6}$.
   a) Montrer que l'équation $(E_1)\,:\,f(x) = x$ a exactement 3 solutions réelles, qui sont dans $]-1, 1[$.
   Les solutions seront notées respectivement α, β, γ par ordre croissant.
   b) Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}$, $\sin(3t) = 3\sin(t) - 4\sin^3(t)$.
   c) Résoudre dans $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ l'équation $(E_2)\,:\,\sin(3t) = \dfrac{1}{2}$.
   On donnera les solutions par ordre croissant.
   d) Montrer que pour toute solution x de (E_1), il existe un unique $t \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ tel que $x = \sin t$.
   e) Montrer que $\beta = \sin\dfrac{\pi}{18}$.
   Exprimer α et γ de la même façon.

5. Équations et inéquations diverses à résoudre dans $\mathbb{R}$ (sauf mention explicite du contraire)
   a) $2\sin^2 x = \sqrt{3}\sin(2x)$
   b) $2\cos^2(x) + \cos(x) - 1 \geqslant 0$ (résoudre dans $]-\pi, \pi]$)
   c) $\sin^4 x + \cos^4 x = 1$
   d) $(\cos^3 x)\sin(3x) + (\sin^3 x)\cos(3x) = \dfrac{3}{4}$
   On pourra commencer par exprimer $\sin(3x)$ *en fonction de* $\sin x$*, et* $\cos(3x)$ *en fonction de* $\cos x$*.*

6. Étudier la fonction $f\,:\,x \longmapsto 3\sin x - \sin(3x)$ et représenter sa courbe.

1. **Exercice d'entraînement**

   a) Mettre sous la forme $a + ib$ $(a, b \in \mathbb{R})$ les nombres :

   $$\frac{3+6i}{3-4i} \qquad \left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2 + \frac{3+6i}{3-4i} \qquad \frac{2+5i}{1-i} + \frac{2-5i}{1+i}$$

   b) Même question avec les nombres :

   $$\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 \qquad \frac{(1+i)^9}{(1-i)^7}$$

2. **Forme algébrique / trigonométrique (complexe)**
   Mettre les complexes suivants sous forme algébrique (A) ou sous forme trigonométrique généralisée (T).

   a) $z_1 = \dfrac{1}{\dfrac{i}{2} - \dfrac{1}{2\sqrt{3}}}$ (A+T)

   b) $z_2 = 1 + e^{i\theta}$ $\quad \theta \in [0, 2\pi[\setminus\{\pi\}$ (T)

   c) $z_3 = 1 - e^{i\theta}$ $\quad \theta \in]0, 2\pi[$ (T)

   d) $z_4 = \dfrac{1 + \cos\theta + i\sin\theta}{1 + \cos\theta - i\sin\theta}$ $\quad \theta \in [0, 2\pi[\setminus\{\pi\}$ (T+A)

   e) $z_5 = (j+1)^{2025}$ $\quad$ avec $j = \exp\left(\dfrac{i2\pi}{3}\right)$ (A+T)

3. Vrai ou faux ?

   a) $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \qquad (a + ib) + i(a - 2ib) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a + ib = 0 \\ a - 2ib = 0 \end{cases}$

   b) $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \qquad (a + ib) + i(a - ib) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a + ib = 0 \\ a - ib = 0 \end{cases}$

4. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On considère l'équation (E) : $\dfrac{1+iz}{1-iz} = e^{i\theta}$, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.
   Résoudre (E). On donnera le nombre de solutions en fonction de θ et on donnera les solutions sous forme trigonométrique.

5. Montrer que $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{-i\}$, $\dfrac{z-i}{1-iz} \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad |z| = 1$

6. Soit $a \in \mathbb{R}$. Déterminer en fonction de a l'ensemble des complexes z tels que $z + a\overline{z} \in \mathbb{R}$.

7. Pour chaque question, on pourra soit faire une résolution calculatoire, soit une résolution géométrique.

   a) Déterminer l'ensemble $E = \{z \in \mathbb{C} \,/\, |z - i| = |z + 3i|\}$.

   b) Déterminer l'ensemble $F = \{z \in \mathbb{C} \,/\, |z + 1| \leqslant 1 \text{ et } |z - 1| \leqslant 1\}$

1. Donner une primitive de la fonction f sur l'ensemble précisé.

a) $f(t) = t(t^2+1)^3$ sur $\mathbb{R}$

b) $f(t) = e^{2t}\sin t$ sur $\mathbb{R}$

c) $f(t) = (2t+1)^4$ sur $\mathbb{R}$

d) $f(t) = \dfrac{1}{1-t^2}$ sur $]-1,1[$

2. **Compréhension de la notion d'intégrale**

a) Quand cela a un sens, on pose $f(x) = \displaystyle\int_{2x}^{x+1} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$

i) Donner l'ensemble de définition de f.

ii) Sans faire de calcul explicite, donner le tableau de signe de f.

b) Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{1}{x-1}\int_1^x \frac{e^t}{t}\,\mathrm{d}t$. *Appliquer la définition de l'intégrale.*

c) Soit $f\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{*+} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \end{array}$

Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^{*+}$, puis donner l'expression explicite de f.

3. Calculer les intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int_0^2 2^x\,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int_0^\pi |\cos x|\,\mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int_1^t x^n \ln x\,\mathrm{d}x$ $\quad(t\in\mathbb{R}^{*+},\ n\in\mathbb{N})$

e) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,\mathrm{d}x$

f) $\displaystyle\int_0^1 t^3 e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$

g) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\tan^2 x\,\mathrm{d}x$

h) $\displaystyle\int_2^3 \frac{x^2}{x-1}\,\mathrm{d}x$

4. Calculer les intégrales suivantes par changement de variable :

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{e^x+1}\,\mathrm{d}x$ $\quad t = e^x$

b) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} (\tan x + \tan^3 x)\,\mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int_0^\pi \sin^3 x\cos^2 x\,\mathrm{d}x$

e) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan^2 x - 2\tan x + 5}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$

f) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x^{2025}\cos x\,\mathrm{d}x$ $\quad t = -x$

5. Soit $f\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_x^{2x} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \end{array}$

a) Étudier la parité de f (on pourra faire un changement de variable).

b) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Étudier les variations de f.

6. **Série harmonique alternée**

Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \cdots + \dfrac{(-1)^n}{n+1}$, c'est à dire $u_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{k+1}$

a) En considérant $\displaystyle\int_0^1 t^k \, \mathrm{d}t$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1-(-1)^{n+1}t^{n+1}}{1+t} \, \mathrm{d}t$

b) Soit $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t} \, \mathrm{d}t$. Montrer par encadrement que (I_n) converge et donner sa limite.

c) En déduire que (u_n) converge et donner sa limite.

7. **Lemme de Riemann[1]-Lebesgue[2]**

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$. On définit pour pour $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \displaystyle\int_a^b f(t) \sin(nt) \, \mathrm{d}t$.

Montrer que $I_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ (on pourra faire une intégration par parties).

Remarque : On a un résultat analogue avec cos à la place de sin.

1. Bernhard Riemann (1826-1866), mathématicien allemand. Il a été le premier à formaliser la théorie de l'intégration que nous utilisons en prépa. Il a également travaillé sur les géométries non euclidiennes et la répartition des nombres premiers.
2. Henri Lebesgue (1875-1941), mathematicien français. Il a élaboré une théorie de l'intégration plus puissante et plus générale que celle de Riemann et qui est largement utilisée aujourd'hui.

Transformations trigonométriques, utilisation de l'exponentielle complexe

1. a) Linéariser $\sin^5(x)$.
   b) Déterminer une fonction P telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos(5x) = P(\cos x)$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Expliciter les sommes suivantes. Il ne doit pas rester de complexes dans la réponse.
   a) $A_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(kx)$ et $B_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(kx)$
   b) $C_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{\cos(kx)}{\cos^k(x)}$ $\left(x \not\equiv 0 \left[\dfrac{\pi}{2}\right]\right)$
   c) $D_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \dfrac{\cos(kx)}{2^k}$

Équations - racines n^{es}

3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes.
   a) $(E_1) : z^3 = i$
   b) $(E_2) : z^4 + 1 = 0$
   c) $(E_3) : z^6 = -64$
   d) $(E_4) : z^4 - z^2 + 1 + i = 0$
   e) $(E_5) : \overline{z} = iz$

4. **Banque CCINP exercice 84**
   a) Donner la définition d'un argument d'un nombre complexe non nul (on ne demande ni l'interprétation géométrique, ni la démonstration de l'existence d'un tel nombre).
   b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner, en justifiant, les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^n = 1$ et préciser leur nombre.
   c) En déduire, pour $n \in \mathbb{N}^*$, les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $(z+i)^n = (z-i)^n$ et démontrer que ces nombres sont réels.
   On précisera le nombre de solutions.

5. **Banque CCINP exercice 89**
   Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. On pose $z = e^{i\frac{2\pi}{n}}$.
   a) On suppose $k \in [\![1, n-1]\!]$.
   Déterminer le module et un argument du complexe $z^k - 1$.
   b) On pose $S = \sum\limits_{k=0}^{n-1} |z^k - 1|$. Montrer que $S = \dfrac{2}{\tan(\frac{\pi}{2n})}$.

6. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Donner la somme et le produit des racines n^{es} de l'unité.

7. a) Déterminer une fonction P polynômiale telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin(5x) = P(\sin x)$.
   b) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $P(t) = 0$.
   c) En déduire une expression par radicaux de $\sin\left(k\dfrac{\pi}{5}\right)$ pour $k \in [\![0, 4]\!]$.

8. Soit $\omega = \exp\left(i\dfrac{2\pi}{7}\right)$, $A = \omega + \omega^2 + \omega^4$ et $B = \omega^3 + \omega^5 + \omega^6$.
   Calculer $A + B$ et AB (en particulier, montrer qu'ils sont entiers).
   En déduire une expression par radicaux de A et B.

Géométrie

9. Soit $ABCD$ un quadrilatère direct. On construit les triangles isocèles rectangles directs $A'BA$, $B'CB$, $C'DC$, $D'AD$, d'angles droits respectifs A', B', C', D'. Montrer que $[A'C']$ et $[B'D']$ sont orthogonaux et de même longueur.
   On commencera par traduire en terme d'affixe le fait que le triangle $A'BA$ est direct et isocèle rectangle en A', et de même pour les autres.

10. Si a est un complexe non nul, on note p et q les racines carrées de a.
    Les points d'affixes respectives a, p, q sont notés A, P, Q.
    Déterminer l'ensemble des a tels que le triangle APQ soit rectangle en A.

1. Résoudre les équations différentielles suivantes en tenant compte des éventuelles conditions initiales :
   a) $x' + 2x = 3$ sur $\mathbb{R}$
   b) $(1+t^2)x' + 2tx = 1$ sur $\mathbb{R}$
   c) $x^2y' - y = e^{-\frac{1}{x}}$ sur $\mathbb{R}^{*+}$
   d) $\begin{cases} x' - tx = t \\ x(0) = 0 \end{cases}$ sur $\mathbb{R}$
   e) $\begin{cases} x' + x\tan t = \sin(2t) \\ x(0) = 1 \end{cases}$ sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$
   f) $\sqrt{1-t^2}x' + tx = 1$ sur $]-1,1[$ *(exprimer une solution particulière sous forme intégrale)*

2. Même question
   a) $y'' - 4y' + 3y = 0$, avec $y(0) = 0$ et $y'(0) = 2$
   b) $y'' - 6y' + 9y = 0$, avec $y(0) = 0$ et $y'(0) = -2$
   c) $y'' - 2y' + 2y = 0$
   d) $y'' + 4y = e^{-x}$, avec $y(0) = y'(0) = 0$
   e) $y'' - 4y' + 3y = 2e^x$
   f) $2y'' - y' - y = 2x - 1$ *Chercher une solution particulière affine.*

3. **Banque CCINP, exercice 42**
   On considère les deux équations différentielles suivantes :
   $2xy' - 3y = 0 \quad (H)$
   $2xy' - 3y = \sqrt{x} \quad (E)$
   a) Résoudre l'équation (H) sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
   b) Résoudre l'équation (E) sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
   c) L'équation (E) admet-elle des solutions sur l'intervalle $[0, +\infty[$?

4. **Recollement de solutions**
   On considère l'équation différentielle (E) : $tx'(t) + x(t) = 1$
   a) Résoudre (E) sur $\mathbb{R}^{*+}$ puis sur $\mathbb{R}^{*-}$
   b) En déduire toutes les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$. On donnera en particulier le nombre de solutions.
   Une solution de (E) sur $\mathbb{R}$ doit au minimum être définie et dérivable (donc continue) sur $\mathbb{R}$.

5. **Équation intégrale**
   Déterminer toutes les fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ telles que $\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = 2e^{\frac{t^2}{2}} - \displaystyle\int_0^t x f(x)\,\mathrm{d}x$.

6. Résoudre les équations suivantes :
   a) $(1+e^x)y''(x) + y'(x) - e^x y(x) = 0$. On pourra poser $z = y' + y$.
   b) $x^2y''(x) - 2y(x) = x$ sur $\mathbb{R}^{*+}$. On pourra effectuer le changement de variable $t = \ln x$.

7. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue.

   Montrer que l'unique solution du problème de Cauchy $\begin{cases} x'' + x = f \\ x(0) = x'(0) = 0 \end{cases}$ a pour expression

$$\forall t \in \mathbb{R},\, x(t) = \int_0^t \sin(t-u) f(u)\,\mathrm{d}u$$

8. **Équation logistique** (dynamique des populations)

   On considère l'équation différentielle **non linéaire** suivante :

$$(E) :\ y' = ky(1-y)$$

   où k est une constante strictement positive donnée.

   Cette équation modélise l'évolution de la population d'une espèce animale [3] au cours du temps, dans un territoire isolé (pas de prédateurs), présentant une quantité limitée de ressources (nourriture, territoire)

   Soit $y_0 \in \mathbb{R}^{*+}$. On admet que (E) admet une unique solution y vérifiant $y(0) = y_0$, définie sur $\mathbb{R}^+$, et que celle-ci ne prend que des valeurs strictement positives.

   a) On pose $z = \dfrac{1}{y}$.
      Montrer que z est solution d'une équation différentielle **linéaire** (E').
   b) Résoudre (E').
   c) On suppose que $y_0 \in]0,1[$. Déterminer l'expression de y. Étudier ses variations et sa limite en $+\infty$.
   d) Mêmes questions si $y_0 > 1$.

   Interprétation de cette équation $y' = ky(1-y)$:
   On peut imaginer, en première approximation, que l'accroissement de la population est proportionnel à la population : $y' = ky$.
   Mais dans ce cas, la population va croître très rapidement, exponentiellement ($y(t) = y_0 e^{kt}$), ce qui n'est pas compatible avec le caractère fini des ressources.
   C'est pourquoi on rajoute un facteur correctif $1 - y$ pour traduire le fait que plus la population est nombreuse, moins elle va pouvoir s'étendre. Au contraire, si elle dépasse un certain seuil (ici égal à 1), il n'y a pas assez de ressources pour tout le monde, donc la population va diminuer ($y' < 0$).

3. Ce type d'équation peut aussi se rencontrer en cinétique chimique, dans le cas d'une réaction $A \longrightarrow B$ où la vitesse de réaction est proportionnelle à $[A][B]$

Coefficients, degré

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le degré et le coefficient dominant des fonctions polynômiales suivantes :

$$P_1(x) = (x^4 - 1)^3 \qquad P_2(x) = (x+1)^n - (x-1)^n \qquad P_3 = P^2 - P + 1$$

P : fonction polynômiale de degré n, unitaire.

2. **Formule de Vandermonde**
Soit $m, n \in \mathbb{N}$. Déterminer de deux façons différentes la suite des coefficients de la fonction polynômiale

$$P(x) = (1+x)^n(1+x)^m$$

En déduire que $\forall r \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\binom{m+n}{r} = \sum_{k=0}^{r} \binom{n}{k}\binom{m}{r-k}$.

3. **Identification ?** *Questions indépendantes*
Soit $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite presque nulle, et $P : x \longmapsto \displaystyle\sum_{k\geqslant 0} a_k x^k$.

Montrer que :

a) Si $\forall t \in \mathbb{R}$, $P(e^t) = 0$, alors $\forall k \in \mathbb{N}$, $a_k = 0$.

b) P est paire (resp. impaire) $\quad\Leftrightarrow\quad \forall k \in \mathbb{N}$, $a_{2k+1} = 0$ (resp. $\forall k \in \mathbb{N}$, $a_{2k} = 0$)

4. **Interpolation**
Montrer qu'il existe une unique fonction polynômiale P (à déterminer) de degré 3 telle que :

$$P(1) = 0, \quad P(2) = 1, \quad P(3) = 0, \quad P(4) = 3$$

Racines, factorisation

5. a) Montrer que la fonction polynômiale $P(x) = 2x^3 - 6x + 1$ a trois racines réelles distinctes (**qu'on ne cherchera pas à calculer**). On les note α, β, γ.

b) Calculer $\alpha\beta\gamma$, $\alpha + \beta + \gamma$, $\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma$.

c) Question subsidiaire : calculer $\dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta} + \dfrac{1}{\gamma}$ et $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$.

6. Factoriser entièrement les polynômes suivants.

   a) $P(x) = x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 4x + 6$ *Indication : P a une racine imaginaire pure.*
   b) $P(x) = x^5 - x^4 + x^3 - x^2 - 12x + 12$.
   c) $P(x) = x^4 + 12x - 5$ *Indication : il y a deux racines dont la somme est* 2.
   d) $P(x) = x^3 + 1$.
   e) $P(x) = x^8 + x^4 + 1$.
   f) $P(x) = 2x^n - 1$ $(n \in \mathbb{N}^*)$.

7. Soit $n \geqslant 2$. Factoriser (dans $\mathbb{C}$) le polynôme

$$P\,:\,z \longmapsto \sum_{k=0}^{n-1} z^k$$

8. **D'après CCINP Exercice 84**
   Questions b)c)d) déjà faites (TD sur les complexes), seules les questions a) et e) sont nouvelles ici.
   Pour la question e), on pourra reprendre l'expression des solutions de l'équation sans justifier.

   Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'équation $(E)\,:\,(z+i)^n = (z-i)^n$, d'inconnue z dans $\mathbb{C}$.

   a) (question supplémentaire) Justifier, sans la résoudre, que (E) a au plus $n-1$ solutions dans $\mathbb{C}$.
   b) Donner la définition d'un argument d'un nombre complexe non nul (on ne demande ni l'interprétation géométrique, ni la démonstration de l'existence d'un tel nombre).
   c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner, en justifiant, les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^n = 1$ et préciser leur nombre.
   d) Déduire de la question c) les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation (E) et démontrer que ces nombres sont réels.
   e) (question supplémentaire) Factoriser dans $\mathbb{C}$ la fonction polynomiale $P\,:\,x \longmapsto (x+i)^n - (x-i)^n$.

9. **Polynômes de Chebychev**
   On définit la suite de fonctions polynômiales $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \begin{cases} P_0(x) = 1 \\ P_1(x) = x \\ \forall n \in \mathbb{N},\ P_{n+2}(x) = 2xP_{n+1}(x) - P_n(x) \end{cases}$$

   a) Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}$ le degré de P_n et son coefficient dominant (noté α_n).
   b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in \mathbb{R},\ P_n(\cos t) = \cos(nt)$.
   c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que P_n est l'unique fonction polynômiale vérifiant la propriété précédente, autrement dit si Q est une fonction polynômiale telle que $\forall t \in \mathbb{R},\ Q(\cos t) = \cos(nt)$, alors $Q = P_n$.
   d) Dans toute la suite, $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer toutes les racines de P_n dans $[-1, 1]$.
   e) Montrer qu'on obtient ainsi toutes les racines de P_n dans $\mathbb{C}$, et en déduire la factorisation complète de P_n.

1. Soit $f : E \longrightarrow F$. Traduire avec des quantificateurs :

   a) f n'est pas injective.

   b) f n'est pas surjective.

2. Soit $f\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{2x}{1+x^2} \end{array}$

   a) f est-elle injective ? surjective ?

   b) Déterminer $f(\mathbb{R})$, $f\left(\left[\dfrac{1}{2}, +\infty\right[\right)$

   c) Déterminer $f^{-1}\left(\left[\dfrac{1}{2}, +\infty\right[\right)$

   d) Soit $g\colon \begin{array}{ccc}]0,1] & \longrightarrow &]0,1] \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$

   Montrer que g est bien définie et qu'elle est bijective. Déterminer l'expression de sa réciproque.

3. Pour chaque fonction, dire si elle injective, puis surjective.
   — Pour celles qui ne sont pas surjectives, préciser l'ensemble image.
   — Pour celles qui sont bijectives, donner l'expression de la réciproque quand c'est possible.

   a) $f\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & n+1 \end{array}$

   b) $f\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ n & \longmapsto & n+1 \end{array}$

   c) $f\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x+y \end{array}$

   d) $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

   e) $f\colon \begin{array}{ccc} [1,+\infty[& \longrightarrow & [0,+\infty[\\ x & \longmapsto & x - \dfrac{1}{x} \end{array}$

   f) $f\colon \begin{array}{ccc} \mathcal{P}([\![1,3]\!]) & \longrightarrow & \mathcal{P}([\![1,3]\!]) \\ A & \longmapsto & A \cup \{1\} \end{array}$

   g) $f\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+y, x-y) \end{array}$

   h) $f\colon \begin{array}{ccc} \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ u & \longmapsto & \displaystyle\int_0^1 u(x)\,\mathrm{d}x \end{array}$

   i) $\exp : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$

   j) $f\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x, xy - y^3) \end{array}$

4. Soit E, F et G trois ensembles. Soit $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$.
   Soit $h = g \circ f$

   a) Montrer que si h est injective, alors f est injective.

   b) Montrer que si h est surjective, alors g est surjective.

   c) Montrer que si h est injective et f surjective, alors g est injective.

   d) Montrer que si h est surjective et g injective, alors f est surjective.

5. On considère les applications :

$$f\colon \begin{array}{rcl} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ x & \longmapsto & 2x \end{array} \qquad \text{et} \qquad g\colon \begin{array}{rcl} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{x}{2} \text{ si } x \text{ est pair} \\ \dfrac{x+1}{2} \text{ si } x \text{ est impair} \end{cases} \end{array}$$

a) f est-elle injective ? surjective ?

b) Mêmes questions avec g.

c) Déterminer $g \circ f$ et $f \circ g$, et dire si elles sont injectives, surjectives.

6. Soit $f\colon \begin{array}{rcl} \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{1}{2}\right\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{1}{2}\right\} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x-1}{1-2x} \end{array}$

Montrer que f est bien définie, qu'elle est bijective, et déterminer l'expression de f^{-1}

7. Soit $f : E \longrightarrow F$. On définit les deux fonctions g et h par :

$$g\colon \begin{array}{rcl} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(F) \\ X & \longmapsto & f(X) \end{array} \quad \text{et} \quad h\colon \begin{array}{rcl} \mathcal{P}(F) & \longrightarrow & \mathcal{P}(E) \\ Y & \longmapsto & f^{-1}(Y) \end{array}$$

Montrer que :

a) f est surjective $\Leftrightarrow$ g est surjective.

b) f est injective $\Leftrightarrow$ g est injective.

c) f est injective $\Leftrightarrow$ h est surjective.

d) f est surjective $\Leftrightarrow$ h est injective.

1. Soit $f\ :\ x \longmapsto \arctan(x) + \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
   Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer f'. Que peut-on en déduire ?

2. **Expressions de la forme arctrigo $\circ$ trigo**
   a) Soit $f\ :\ x \longmapsto \arccos(\cos x)$
      i) Déterminer l'ensemble de définition de f.
      ii) Étudier les symétries de la fonctions f (parité, périodicité,...) et en déduire qu'on peut restreindre l'étude à un intervalle I dans lequel l'expression de f est simple.
      iii) Tracer la courbe de f en expliquant pas à pas la construction de la courbe.
      iv) Déterminer $f\left(\dfrac{23\pi}{19}\right)$ sous la forme $\dfrac{a\pi}{b}$, où a et b sont deux entiers.
   b) Mêmes questions avec la fonction $g\ :\ x \longmapsto \arcsin(\sin x)$.
   c) Mêmes questions avec la fonction $h\ :\ x \longmapsto \arctan(\tan x)$.

3. **Simplification d'expressions de la forme trigo $\circ$ arctrigo**
   Pour chacune des fonctions suivantes : donner l'ensemble de définition, puis la simplifier en une expression par radicaux (n'utilisant plus de fonction trigonométrique ni réciproque).
   a) $g\ :\ x \longmapsto \cos(\arctan x)$ réponse : $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
   b) $h\ :\ x \longmapsto \sin(\arctan x)$
   c) $i\ :\ x \longmapsto \tan(\arcsin x)$
   d) $j\ :\ x \longmapsto \sin^2\left(\dfrac{1}{2}\arccos x\right)$

4. a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\arctan(x+1) - \arctan x = \arctan\left(\dfrac{1}{x^2+x+1}\right)$
   b) Soit $u_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \arctan\left(\dfrac{1}{k^2+k+1}\right)$.
      Calculer u_n explicitement, et déterminer $\lim(u_n)$.

5. Calculer les intégrales suivantes :
   a) $f(x) = \displaystyle\int_0^x \arcsin t \,\mathrm{d}t \qquad (x \in]-1,1[)$
   b) $I = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{(\sqrt{1-x^2})^3} \qquad$ (CdV $t = \arcsin x$)
   c) $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t+i}\,\mathrm{d}t$
   d) $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{\sqrt{R^2-t^2}}\,\mathrm{d}t \qquad (R>0,\ x \in]-R,R[)$
   e) $I = \displaystyle\int_{-R}^{R} \sqrt{R^2-x^2}\,\mathrm{d}x \qquad (R>0)$
      (CdV $x = R\cos t$)
      Interprétation géométrique ?
   f) $f(x) = \displaystyle\int_0^x \arctan t\,\mathrm{d}t \qquad (x \in \mathbb{R})$
   g) $I = \displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{4x-2}{4x^2+4x+17}\,\mathrm{d}x$

6. Résoudre les équations suivantes.

   a) $\arcsin x = 2 \arctan x$

   b) $\arccos \dfrac{1}{3} + \arccos \dfrac{1}{4} = \arcsin x$

7. **Fonctions hyperboliques réciproques**

   a) Montrer que sh est une bijection de $\mathbb{R}$ dans un ensemble à déterminer. La réciproque est notée argsh (argument sinus hyperbolique).

   b) Calculer l'expression explicite de argsh.

   c) Sans utiliser son expression, déterminer l'ensemble de dérivabilité de argsh et l'expression de sa dérivée.

   d) Mêmes questions pour $\mathrm{ch}_{|\mathbb{R}^+}$.

   e) Mêmes questions pour th.

1. **Exercice-cours** (méthodes à connaître)

   a) Soit $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   Calculer B^2, B^3. En déduire B^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

   b) On pose $M = 2I_3 + B$. Calculer M^n explicitement pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   c) On considère les suites (u_n), (v_n), (w_n) définies par $u_0 = v_0 = w_0 = 1$ et

   $$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = 2u_n + 3v_n + w_n \\ v_{n+1} = 2v_n - 2w_n \\ w_{n+1} = 2w_n \end{cases}$$

   On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$

   Exprimer X_{n+1} en fonction de M et X_n.

   d) En déduire X_n explicitement (sans puissance matricielle), puis u_n, v_n, w_n.

2. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

   a) Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$

   b) Montrer que A est inversible et donner A^{-1}.

3. a) Soit $p \in \mathbb{N}^*$, et J la matrice dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1.

   Calculer J^2, J^3 puis conjecturer une expression pour J^n, $n \in \mathbb{N}$ puis la démontrer.

   b) Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ la matrice dont les coefficients diagonaux valent 2, les autres 1.

   Exprimer A comme combinaison linéaire de I et J.

   c) Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   d) Montrer que A est inversible et donner A^{-1}. *On pourra considérer $xI + yJ$.*

4. **Diagonalisation d'une matrice**.

   On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

   On veut calculer les puissances successives de A.

   a) Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

   Montrer que P est inversible et que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

   b) Soit $D = P^{-1}AP$. Calculer D puis calculer D^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, trouver une relation exprimant D^n en fonction de A^n, P et P^{-1}.

   On pourra regarder ce qui se passe pour $n = 2$ puis essayer de généraliser.

   d) En déduire A^n.

   e) Soit (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = v_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = u_n - v_n \\ v_{n+1} = 2u_n + 4v_n \end{cases}$

   Calculer explicitement ces deux suites. *On pourra poser $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$*

5. **Commutant et racines carrées d'une matrice diagonale**

   Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

   a) Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Montrer que

   $$AM = MA \quad \Leftrightarrow \quad M \text{ est diagonale}$$

   b) Montrer que si $M^2 = A$, alors $AM = MA$.

   c) Trouver toutes les matrices M telles que $M^2 = A$. Combien y en a-t-il ?

6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ se décompose de manière unique sous la forme $M = A + B$, avec A symétrique et B antisymétrique.

7. Soit $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{R})$. Montrer que $A = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{tr}(A^\top A) = 0$.

8. Soit $\quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

   a) Calculer A^2 et vérifier que $\quad A^2 - 3A + 2I = 0$.

   b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\quad B_n = A^{n+1} - 2A^n$
   Montrer que la suite (B_n) est constante.

   c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\quad C_n = A^n + A - 2I$.
   Montrer que $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad C_{n+1} = 2C_n$

   d) En déduire l'expression de $\ A^n\ $ comme combinaison linéaire de A et I.

   e) On considère les 3 suites (u_n) (v_n) et (w_n) définies par :

   $$u_0 = 0 \quad v_0 = 1 \quad w_0 = -1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = v_n - w_n \\ v_{n+1} = -3u_n + 4v_n - 3w_n \\ w_{n+1} = -u_n + v_n \end{cases}$$

   Calculer leur terme général.

9. Existe-t-il $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AB - BA = I_n$?

10. **Matrice qui commute avec tout**

    Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que :

    $$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ AM = MA \quad \Leftrightarrow \quad \exists \lambda \in \mathbb{K} \,/\, A = \lambda I_n$$

1. **Croissances comparées**
   Dans chacun des cas, déterminer la limite éventuelle de la fonction ou de la suite au point considéré.
   a) $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x}$ en $+\infty$.
   b) $f(x) = \ln(x) + \dfrac{1}{x}$ en 0.
   c) $f(x) = \dfrac{x^{\ln x}}{(\ln x)^x}$ en $+\infty$.
   d) $f(x) = x - \ln(2^x + 1)$ en $+\infty$.
   e) $f(x) = \dfrac{e^{\sqrt{\ln x}}}{x^2}$ en $+\infty$.
   f) $u_n = \dfrac{2^{\sqrt{n}} + n^2}{n^{\ln n}}$ en $+\infty$.
   g) $u_n = \dfrac{2^n}{\sqrt{n!}}$ en $+\infty$.
   h) $u_n = \dfrac{2^{\sqrt{n}}}{1,001^n}$ en $+\infty$.

2. Au voisinage de 0, compléter si possible par $o(x^n)$ avec le plus grand $n \in \mathbb{N}$ possible et justifier :
   $o(x^2) + o(x^4) =$ $\qquad$ $x^2 o(x^3) =$ $\qquad$ $o(x^2) - o(x^2) =$
   $o(x^2)o(x^3) =$ $\qquad$ $x^2 + o(x^3) =$ $\qquad$ $\dfrac{o(x^3)}{o(x^2)} =$
   $\dfrac{o(x^3)}{x^2} =$ $\qquad$ $\dfrac{x^3}{o(x^2)} =$ $\qquad$ $o(x^2 + 3x) =$

3. a) À l'aide d'une formule de trigonométrie (2 possibilités), montrer que
$$\cos(x) - 1 \underset{x \to 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$$
   b) En déduire un équivalent simple de $\ln(\cos(x))$ en 0.

4. **Limites**
   Donner la limite éventuelle de la fonction au point considéré.
   a) $f(x) = \dfrac{x + \sin x - \tan x}{\cos x - 1 + \ln(1+x)}$ en 0
   b) $f(x) = \dfrac{x^5 - 1}{x^3 - 1}$ en 1
   c) $f(x) = \sqrt{x^2+1} + x$ en $-\infty$
   d) $f(x) = \dfrac{x + \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2 - 5x + 1}}$ en $+\infty$
   e) $f(x) = x \sin \dfrac{1}{x}$ en $+\infty$

5. **Vrai ou faux ?** (Compréhension de la notion d'équivalents)

a) i) $\ln x = \underset{x\to 0}{o}(x)$

ii) $x^2 + \ln x \underset{x\to+\infty}{\sim} x^2$

iii) $\exp(x^2 + \ln x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \exp(x^2)$

b) **C'est faux jusqu'à preuve du contraire !**

i) Si $g \underset{x_0}{\sim} f$ et $h \underset{x_0}{\sim} f$, alors $g + h \underset{x_0}{\sim} 2f$

ii) Si $f(x) - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$, alors $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} 1 + x$

iii) Si $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} 1 + x$, alors $f(x) - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$

iv) Si (u_n) et (v_n) ont la même limite finie, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$.

6. Donner l'équivalent **le plus simple** de la fonction au point considéré.

a) $f(x) = \sqrt{x+5} - \sqrt{x-3}$ en $+\infty$ *réponse :* $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{4}{\sqrt{x}}$

b) $f(x) = \dfrac{\ln(1-x^2)}{\sin x + \ln(1+x)}$ en 0.

c) $u_n = \sqrt{1 + ne^{-n}} - 1$ en $+\infty$.

d) $u_n = \sqrt{n + \sqrt{n}}$ en $+\infty$.

e) $u_n = 4^n - 2n^7 - 4\ln(n^{20})$ en $+\infty$.

1. **Systèmes sans paramètres**
   Résoudre les systèmes suivants :

$$(S_1) : \begin{cases} x + 2y - 3z = 2 \\ x + y - z = -1 \\ 4x + 5y - 7z = 0 \end{cases} \qquad (S_3) : \begin{cases} x + t = 1 \\ y + x = 0 \\ z + y = 1 \\ t + z = -1 \end{cases}$$

$$(S_2) : \begin{cases} x + 2y + 3z + 2t = 1 \\ x + 3y + 3z + t = 0 \end{cases} \qquad (S_4) : \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + jy + j^2 z = 1 \\ x + j^2 y + jz = 1 \end{cases} \qquad j = \exp\left(\frac{2i\pi}{3}\right)$$

2. **Systèmes à paramètres**
   Dans cet exercice, les inconnues sont X (matrice colonne) ou x, y (scalaires).
   Résoudre les systèmes en discutant éventuellement suivant les valeurs des paramètres.

   a) $MX = \lambda X$ avec $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (λ : paramètre réel)

   b) Même question avec $M = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 4 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

   c) $\begin{cases} mx + y = 1 \\ x + my = 1 \end{cases}$ (m : paramètre réel)

3. Dire si la matrice est inversible, et si oui, déterminer son inverse.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (2x + 5y, x + 2y) \end{array}$
   Montrer qu'elle est bijective et déterminer l'expression de sa réciproque.

5. **Géométrie**
   Soit λ un paramètre réel. L'espace est muni d'un repère $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
   On considère les plans $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$, $\mathcal{P}_3$ d'équations respectives dans $\mathcal{R}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_1 &: x + y + 2z + 1 = 0 \\ \mathcal{P}_2 &: 2x + y + \lambda z + 2 = 0 \\ \mathcal{P}_3 &: x + \lambda y + 4z + 1 = 0 \end{aligned}$$

   Montrer qu'il existe deux valeurs de λ pour lesquelles $\mathcal{E} = \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3$ est une droite.
   Dans chacun des cas, décrire la droite en en donnant un point particulier et un vecteur directeur.

$\boxed{\text{TD15}}$ MPSI 25–26 **SUITES PARTICULIÈRES, RELATIONS BINAIRES**

Suites

1. Calculer le terme général de la suite (u_n).
   a) $u_0 = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N},\ 2u_{n+1} + u_n = 3.$
   b) $u_0 = u_1 = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N},\ 4u_{n+2} + 4u_{n+1} + u_n = 0.$
   c) $u_0 = 0,\ u_1 = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 2u_{n+1} - 4u_n.$
   d) $u_0 = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N},\ 2(u_{n+2} + u_n) = 5u_{n+1}$ et (u_n) converge.
   e) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n + 2.$
   On pourra commencer par chercher une suite constante c qui convient, et considérer $v_n = u_n - c$.
   f) $u_0 = 0,\ u_1 = 1 + i,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 2u_{n+1} - \overline{u_n}$

2. **D'après CCINP exercice 55**
   Soit a un nombre complexe.
   On note E l'ensemble des suites à valeurs complexes telles que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 2au_{n+1} + 4(ia-1)u_n \qquad \text{avec } (u_0, u_1) \in \mathbb{C}^2.$$

   a) Prouver que E est stable par combinaison linéaire.
   b) Soit (u_n) et (v_n) deux suites de E. Montrer que

$$\text{si } u_0 = v_0 \text{ et } u_1 = v_1, \text{ alors } \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = v_n.$$

   c) Dans cette question, on considère une suite de E définie par : $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$.
   Exprimer, pour tout entier naturel n, le nombre complexe u_n en fonction de n.
   Indication : discuter suivant les valeurs de a.

Relations binaires

3. Dire si la relation $\mathcal{R}$ est réflexive / symétrique / transitive / antisymétrique.
   Quand c'est une relation d'ordre, dire s'il est total ou partiel.
   a) $E = \mathbb{C} \quad z\mathcal{R}z' \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{Re} z \leqslant \operatorname{Re} z'$ et $\operatorname{Im} z \leqslant \operatorname{Im} z'$.
   b) $E = \mathbb{R} \quad x\mathcal{R}y \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = y^2$
   c) $E = \mathbb{N}^* \quad x\mathcal{R}y \quad \Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{N}^*,\ x = y^k.$

4. Montrer que
   a) $\forall n \in \mathbb{N},\ 3^{4n+3} \equiv 2[5]$
   b) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 5^n + 2 \times 3^{n-1} \equiv 7[8]$

5. Quel est le chiffre des unités de 987^{789} ?

Inégalités dans $\mathbb{R}$, valeur absolue

6. Montrer les inégalités suivantes :
   a) $\forall x \in \mathbb{R}^-,\ |e^x - 1| \leqslant |x|$
   b) $\forall x, y \in [1, +\infty[,\ |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leqslant \dfrac{|x-y|}{2}$

c) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall \theta \in [0, \pi]$, $|\sin(n\theta)| \leqslant n \sin \theta$

7. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $|2x + 4| \leqslant |x + 1|$.

8. Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que si $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{*+}$, $|a| \leqslant \varepsilon$, alors $a = 0$.

Inf, sup, max, min

9. **Parties minorées, majorées, max, min, sup, inf**

   a) Les parties suivantes sont-elles majorées ? minorées ? Ont-elles un plus grand élément ? Un plus petit élément ? Une borne supérieure ? Une borne inférieure ?

      i) $A = \{0, 1\} \cup [2, 3[$

      ii) $B = \left\{1 + \dfrac{1}{x},\ x \in \mathbb{R}^{*+}\right\}$

      iii) $C = \left\{\dfrac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$

   b) Dire si la fonction $f\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\cos x}{2 - \sin x} \end{array}$ admet min/max/inf/sup, et déterminer ceux qui existent.

10. Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Traduire avec des quantificateurs :

    a) A n'est pas majorée.

    b) A n'a pas de plus grand élément.

11. Soit f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ majorées.

    a) Montrer que $f + g$ est majorée et que $\sup(f + g) \leqslant \sup(f) + \sup(g)$ mais qu'en général on n'a pas égalité.

    b) Soit $\lambda \in \mathbb{R}^{*+}$. Montrer que λf est majorée et que $\sup(\lambda f) \leqslant \lambda \sup f$.

    c) En appliquant ce résultat à des paramètres bien choisis, montrer que $\sup(\lambda f) \geqslant \lambda \sup f$.
    On a donc $\sup(\lambda f) = \lambda \sup(f)$.

12. **Ordre lexicographique dans $\mathbb{C}$**
    Dans $\mathbb{C}$, on définit la relation $\preccurlyeq$ par

$$z \preccurlyeq z' \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \operatorname{Re}(z) < \operatorname{Re}(z') \\ \text{ou} \\ \big(\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(z') \text{ et } \operatorname{Im}(z) \leqslant \operatorname{Im}(z')\big) \end{cases}$$

    Montrer que $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre total sur $\mathbb{C}$.

13. Soit P un plan, et O un point de P.
    Dans $P \setminus \{O\}$, on définit la relation $\mathcal{R}$ suivante :

$$M\mathcal{R}N \quad \Leftrightarrow \quad \exists \lambda \in \mathbb{R}^{*+},\ \overrightarrow{OM} = \lambda \overrightarrow{ON}$$

    a) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $P \setminus \{O\}$.

    b) Décrire la classe d'équivalence d'un point M donné.

1. **Limites élémentaires.**
   Étudier la convergence des suites suivantes, et donner un équivalent simple quand c'est pertinent.
   a) $u_n = \ln(n+1) - \ln(n^2)$
   b) $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$
   c) $u_n = \sin\left[\left(n + \dfrac{1}{n}\right)\pi\right]$
   d) $u_n = \dfrac{3^n - 4^n}{3^n + 4^n}$
   e) $u_n = n^{\frac{1}{n}}$

2. Encadrer les suites suivantes, et conclure quant à leur convergence.
   a) $u_n = \dfrac{1}{n^2}\sum\limits_{k=1}^{n} \lfloor kx \rfloor$ $\qquad x$: réel fixé
   b) $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{n}{k+n^2}$

3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^2}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n}$.
   Montrer que (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

4. **La série harmonique** par 3 méthodes
   Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$. On veut étudier la convergence de (S_n).
   a) **Première méthode**
      i) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. En encadrant la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ par deux constantes sur $[k, k+1]$ et en intégrant, montrer que $\dfrac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \dfrac{1}{k}$ **(un dessin est utile)**
      ii) En sommant l'encadrement précédent, en déduire pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ un encadrement de S_n.
      iii) Donner un équivalent de (S_n).
   b) **Deuxième méthode**
      i) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $u_n = S_n - \ln n$ et $v_n = S_n - \ln(n+1)$.
      Montrer que (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
      On utilisera à deux reprises l'inégalité classique $\forall x \in]-1, +\infty[,\ \ln(1+x) \leqslant x$.
      La limite commune de (u_n) et (v_n) est appelée **constante** γ **d'Euler**. Elle vaut environ 0,577.
      ii) Donner un équivalent de (S_n).
   c) **Troisième méthode**
      i) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_{2n} - S_n \geqslant \dfrac{1}{2}$.
      ii) Montrer que $S_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$.

5. **Suite implicite**

   a) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 3$, l'équation $x^3 - 2nx + 1 = 0$ a une unique solution dans $]0,1[$. Cette solution est notée α_n.

   b) Comparer α_n et $\dfrac{1}{n}$.

   c) En déduire la nature de la suite (α_n), puis donner un équivalent de (α_n).

6. **La série harmonique alternée.**

   Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k+1}}{k}$.

   a) Montrer que (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.

   b) Montrer que (S_n) converge. Soit ℓ sa limite.

   c) Déterminer par encadrement $\lim\limits_{n \to +\infty} \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t$. En déduire ℓ.

   On pourra écrire S_n sous forme intégrale en partant de $\displaystyle\int_0^1 t^{k-1}\,\mathrm{d}t$.

7. **Vrai ou faux ?** *C'est faux jusqu'à preuve du contraire !*

   a) Si $u_{n+1} - u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$, alors (u_n) converge.

   b) Si $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$, alors $u_n^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$.

   c) Si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1$, alors $u_n^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$.

   d) Toute suite qui tend vers $+\infty$ est croissante à partir d'un certain rang.

   e) Si $|u_n| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$, alors $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$ ou $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} -1$.

8. **Autour de la définition de la limite...(vous voulez aller en MP* ?)**

   Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{R}$. On considère les propositions suivantes :

   - P : $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \,/\, \forall n \geqslant n_0, |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$ (c'est la définition de $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell$)
   - Q : $\forall \varepsilon \geqslant 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \,/\, \forall n \geqslant n_0, |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$
   - R : $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \,/\, \forall n \geqslant n_0, |u_n - \ell| < \varepsilon$
   - S : $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \,/\, \forall n \geqslant n_0, |u_n - \ell| \leqslant 2\varepsilon$

   A-t-on $P \Rightarrow Q$? $Q \Rightarrow P$? $P \Rightarrow R$? $R \Rightarrow P$? $P \Rightarrow S$? $S \Rightarrow P$?

9. **Théorème de Cesàro**

   Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite réelle. On définit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par

   $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = \frac{u_1 + \ldots + u_n}{n} \qquad \text{(moyenne arithmétique de } u_1, \ldots, u_n)$$

   a) Montrer que si $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell \in \mathbb{R}$, alors $v_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell$

   On pourra commencer par le cas où $\ell = 0$.

   b) Même question si $\ell = +\infty$.

10. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $u_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$

   a) À l'aide d'un encadrement simple, étudier la convergence de (u_n).

   b) On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$: $\quad v_n = u_n - 2\sqrt{n}$ et $w_n = u_n - 2\sqrt{n+1}$
   Montrer que (v_n) et (w_n) sont adjacentes.

   c) Étudier la convergence de la suite $\left(\frac{u_n}{\sqrt{n}}\right)$

11. **Une autre suite implicite**

   a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $x^n + x = 1$ a une unique solution dans $]0,1[$.
   Cette solution est notée u_n. Écrire l'équation vérifiée par u_n.

   b) Calculer u_1 et u_2.

   c) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est monotone. *Indication* : montrer que si $u_{n+1} < u_n$, alors $u_{n+1}^{n+1} < u_n^n$.

   d) Montrer que (u_n) converge, et déterminer sa limite.

12. Soit (u_n) et (α_n) deux suites à termes positifs telles que :

$$\begin{cases} \alpha_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \leqslant \dfrac{u_n + \alpha_n}{2} \end{cases}$$

   Montrer que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

13. Les questions sont indépendantes.
   (u_n), (v_n) sont deux suites réelles, a, b deux réels.
   Montrer que :

   a) Si $(u_n + v_n)$ et $(u_n - v_n)$ convergent, alors (u_n) et (v_n) convergent.

   b) Si $u_n^2 + u_n v_n + v_n^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

   c) Si $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant a \text{ et } v_n \leqslant b \\ u_n + v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a + b \end{cases}$, alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$ et $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} b$.

   d) Si $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n \leqslant 1 \text{ et } 0 \leqslant v_n \leqslant 1 \\ u_n v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \end{cases}$, alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ et $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

   e) Si (u_n) est à valeurs dans $\mathbb{N}$ et injective, alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

14. **Suite de Cauchy**
   Soit (u_n) une suite réelle telle que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \,/\, \forall n, p \geqslant N,\ |u_n - u_p| \leqslant \varepsilon$$

   Montrer que (u_n) converge.
   On pourra commencer par montrer qu'elle est bornée.

15. Soit (u_n) une suite réelle bornée telle que (e^{iu_n}) et $(e^{i\sqrt{2}u_n})$ convergent.
   Montrer que (u_n) converge.
   On pourra utiliser le fait que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

1. **Compréhension**
On considère un ensemble G contenant 3 éléments a, b, c.
On définit la lci * sur G par la table suivante :

$*$	a	b	c
a	b	c	a
b	c	a	b
c	a	b	c

Par exemple, la première ligne signifie que $a * a = b$, $a * b = c$, $a * c = a$.
   a) $*$ est-elle commutative ?
   b) Montrer que $*$ a un élément neutre.
   c) Quels sont les éléments inversibles ?

2. On considère les quatre fonctions suivantes de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}^*$:
$$f_1 : x \longmapsto x \qquad f_2 : x \longmapsto \frac{1}{x} \qquad f_3 : x \longmapsto -x \qquad f_4 : x \longmapsto -\frac{1}{x}$$
Montrer que $G = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ est un groupe pour la composition, et écrire sa table.

3. Dans $\mathbb{R}$, on définit la lci $*$ par $x * y = x + y - xy$.
$*$ est-elle associative ? commutative ? A-t-elle un élément neutre ? Si oui, quels sont les éléments inversibles ? Donner leur inverse.

4. Montrer que l'ensemble est un sous-groupe du groupe considéré.
   a) $E = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \operatorname{tr}(M) = 0\}$: sous-groupe de $\big(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +\big)$ (tr : trace).
   b) $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}, (a, b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \right\}$: sous-groupe de $(\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}), \times)$.
   c) E : ensemble des fonctions affines, sous-groupe de $(\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), +)$.
   d) F : ensemble des fonctions affines non constantes, sous-groupe de $(\mathcal{S}(\mathbb{R}), \circ)$.
   $\mathcal{S}(\mathbb{R})$: ensemble des bijections de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

5. **Morphisme de groupes**
Dire si les applications f suivantes sont des morphismes de groupes. Si oui, donner l'image et le noyau.
   a) $f\colon \begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^*, \times) & \longrightarrow & (\mathbb{R}^*, \times) \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$
   b) $f\colon \begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^*, \times) & \longrightarrow & (\mathbb{R}^*, \times) \\ x & \longmapsto & 2x \end{array}$
   c) $f\colon \begin{array}{ccc} (\mathbb{R}, +) & \longrightarrow & (\mathbb{C}^*, \times) \\ \theta & \longmapsto & e^{i\theta} \end{array}$

6. Soit $(G, *)$ un groupe, H et K deux sous-groupes de G.
Montrer que si $H \cup K$ est un sous-groupe de G, alors $H \subset K$ ou $K \subset H$.

7. **Sous-groupes de** $(\mathbb{Z}, +)$

   a) Si $m \in \mathbb{N}$, l'ensemble $\{mk \,/\, k \in \mathbb{Z}\}$ est noté $m\mathbb{Z}$.
   Montrer que $m\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$.

   b) Inversement, soit H un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$ non réduit à $\{0\}$. Le but de cette partie est de montrer qu'il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $H = m\mathbb{Z}$.

      i) Montrer qu'il existe dans H un élément strictement positif.

      ii) Montrer que $H \cap \mathbb{N}^*$ admet un plus petit élément. Il est noté m.

      iii) Montrer que $\forall x \in H$, $m|x$.
      Indication : effectuer la division euclidienne de x par m.

      iv) Montrer que $H = m\mathbb{Z}$ (procéder par double inclusion).

8. Soit $(G, *)$ un groupe. Montrer que tous ses éléments sont réguliers à gauche et à droite, c'est-à-dire :

$$\text{pour tous } x, y, z \in G, \quad \begin{cases} \text{si } x * y = x * z, \text{ alors } y = z \\ \text{si } x * y = z * y, \text{ alors } x = z \end{cases}$$

9. Soit $(G, *)$ un groupe d'élément neutre e.

   a) Montrer que si $\forall x \in G$, $x^2 = e$, alors G est abélien.

   b) Montrer que si $\forall x, y \in G$, $(x * y)^2 = x^2 * y^2$, alors G est abélien.

1. **Limites élémentaires**
Donner la limite éventuelle de la fonction au point considéré.
   a) $f(x) = x \sin \dfrac{1}{x}$ en 0 et en $+\infty$
   b) $f(x) = \dfrac{x^2 \cos x}{x^2+1}$ en $+\infty$
   c) $f(x) = \dfrac{(1-e^x)\sin x}{x^2+x^3}$ en 0
   d) $f(x) = \dfrac{x^3+8}{|x+2|}$ en -2
   e) $f(x) = \dfrac{\cos^2 x - \cos x}{2\cos^2 x - 3\cos x + 1}$ en 0
   f) $f(x) = \sqrt{x}\left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor$ en 0 à droite.

Continuité en un point

2. Peut-on prolonger par continuité les fonctions suivantes au point indiqué ?
   a) $h \,:\, x \longmapsto \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$ en 0
   b) $i \,:\, x \longmapsto \dfrac{|x|}{x}$ en 0

3. Déterminer l'ensemble des points où les fonctions suivantes sont continues.
   a) $f \,:\, x \longmapsto \lfloor x \rfloor \sin(\pi x)$
   b) $f \,:\, x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} & \text{si} \quad x \in \mathbb{R}^{*+} \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ \dfrac{e^x - 1}{x} & \text{si} \quad x \in \mathbb{R}^{*-} \end{cases}$

Utilisation de la continuité sur un intervalle

4. **Petits exercices de colle** (questions indépendantes)
   a) Déterminer le nombre de solutions réelles de l'équation $(E) \,:\, \cos x = 2x$.
   b) Soit f et g deux fonctions continues sur $[0,1]$ telles que $f(0) < g(0)$ et $f(1) > g(1)$. Montrer qu'en au moins un point, f et g prennent la même valeur.
   c) Soit $f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ et $I_n = \displaystyle\int_0^1 f(t)t^n \,\mathrm{d}t$.
      i) Montrer que $I_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
      ii) Montrer que si f est de classe $\mathcal{C}^1$ et $f(1) = 0$, alors $I_n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n}\right)$
   d) Montrer que toute fonction polynômiale réelle de degré impair a au moins une racine réelle.
   e) Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ qui admet des limites finies en $-\infty$ et en $+\infty$. Montrer que f est bornée.
   f) Vrai / Faux ? Soit $f \in \mathcal{C}([-1,1],\mathbb{R})$, $g \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
   Si $\forall x \in [-1,1]$, $f(x) > 0$ et $g(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$, alors $f(\sin x)g(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.

5. Soit I un segment, et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue qui ne s'annule pas.

   a) Montrer qu'il existe $m > 0$ tel que $\forall x \in I$, $|f(x)| \geqslant m$.
   Interpréter graphiquement ce résultat.

   b) Montrer que $\dfrac{1}{f}$ est bornée.

   c) Montrer que les deux résultats précédents sont faux en général si I est un intervalle non fermé ou non borné.

6. **CCINP exo 43**
   Soit $x_0 \in \mathbb{R}$.
   On définit la suite (u_n) par $u_0 = x_0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \arctan(u_n)$.

   a) i) Démontrer que la suite (u_n) est monotone et déterminer, en fonction de la valeur de x_0, le sens de variation de (u_n).

      ii) Montrer que (u_n) converge et donner sa limite.

   b) Déterminer l'ensemble des fonctions h, continues sur $\mathbb{R}$, telles que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = h(\arctan x)$.

7. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue en 0, telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(2x) = f(x)$.

   a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f\left(\dfrac{x}{2^n}\right) = f(x)$.

   b) Montrer que f est constante.

   c) Donner l'expression explicite d'une fonction $g : \mathbb{R}^{*+} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue, non constante, telle que $\forall x \in \mathbb{R}^{*+}$, $g(2x) = g(x)$.

8. On allume une bougie haute de 10 cm.
   10 heures plus tard, elle s'éteint, entièrement consumée.
   Montrer qu'il existe un intervalle de temps d'une durée de 5 heures, pendant lequel elle a raccourci d'exactement 5 cm.

9. Soit $f \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ telle que $f(0) = f(1) = 0$ et $\forall x \in \left[0, \dfrac{7}{10}\right]$, $f\left(x + \dfrac{3}{10}\right) \neq f(x)$.
   Montrer que f s'annule au moins 7 fois sur $[0,1]$.

1. Soit $f, g \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
   Montrer que si $\forall x \in \mathbb{Q},\ f(x) = g(x)$, alors $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = g(x)$.

2. **Entiers de Gauss**
   Les complexes de la forme $a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{Z}$ sont appelés les entiers de Gauss.
   L'ensemble des entiers de Gauss est noté $\mathbb{Z}[i]$.
   a) Montrer que $(\mathbb{Z}[i], +, \times)$ est un anneau.
   b) Montrer que si $z \in \mathbb{Z}[i]$, alors $|z|^2 \in \mathbb{N}$.
   c) Montrer que les seuls éléments inversibles de $\mathbb{Z}[i]$ sont 1, -1, i, $-i$.

3. **Exemple de corps quadratique**
   L'ensemble $\left\{a + b\sqrt{2}\,,\ (a, b) \in \mathbb{Q}^2\right\}$ est noté $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$.
   a) Soit $(a, b) \in \mathbb{Q}^2$. Montrer que si $a + b\sqrt{2} = 0$, alors $a = b = 0$.
   b) Montrer que $(\mathbb{Q}[\sqrt{2}], +, \times)$ est un corps. Quel est l'inverse de $2 + \sqrt{2}$?

4. **Utilisation de la caractérisation séquentielle de la borne supérieure**
   Soit A, B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$.
   On note $A + B = \{a + b\,,\ (a, b) \in A \times B\}$.
   Soit $M = \sup(A)$ et $M' = \sup(B)$.
   Montrer que $A + B$ est majorée et que $\sup(A + B) = M + M'$, c'est-à-dire
   $$\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$$

5. **Morphismes de groupes de $(\mathbb{R}, +)$ dans lui-même.**
   a) Vérifier que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $f : x \longmapsto \alpha x$ est un morphisme de groupe de $(\mathbb{R}, +)$ dans lui-même.
   b) Inversement, soit f un morphisme de groupe **continu** de $(\mathbb{R}, +)$ dans lui-même.
      i) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \forall \lambda \in \mathbb{R},\ f(\lambda x) = \lambda f(x)$ (commencer par $\lambda \in \mathbb{N}$ puis $\lambda \in \mathbb{Z}$ puis $\lambda \in \mathbb{Q}$).
      ii) Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \alpha x$.
   c) Donner tous les morphismes de groupes continus
      i) De $(\mathbb{R}, +)$ dans $(\mathbb{R}^{*+}, \times)$.
      ii) De $(\mathbb{R}^{*+}, \times)$ dans $(\mathbb{R}, +)$.
      iii) De $(\mathbb{R}^{*+}, \times)$ dans $(\mathbb{R}^{*+}, \times)$.

6. **Éléments nilpotents d'un anneau**
   Soit $(A, +, \cdot)$ un anneau. On dit qu'un élément $a \in A$ est **nilpotent** lorsqu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $a^n = 0_A$.
   a) Montrer que si a et b sont des éléments nilpotents qui commutent, alors ab et $a + b$ sont nilpotents.
   b) Montrer que si ab est nilpotent, alors ba est nilpotent.
   c) Montrer que si a est nilpotent, alors $1_A - a$ est inversible et donner son inverse.
      On pourra considérer $1_A - a^n$.

7. **Morphismes d'anneau de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$**
   Soit f un morphisme d'anneau $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On veut montrer que $f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$.
   a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{Q},\ f(x) = x$.
      Commencer par $x \in \mathbb{N}$ puis $x \in \mathbb{Z}$ puis $x \in \mathbb{Q}$.
   b) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ f(x) \geqslant 0$.
      En déduire que f est croissante.
   c) Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit a_n (resp. b_n) une approximation décimale par défaut (resp. par excès) de x à 10^{-n} près.
      En considérant les suites (a_n) et (b_n), montrer que $f(x) = x$.

8. **Sous-groupes de** $(\mathbb{R}, +)$
   Soit G un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ non réduit à $\{0\}$.
   Il existe dans G un élément strictement positif et donc $G \cap \mathbb{R}^{*+}$ admet une borne inférieure, notée m.
   a) Premier cas : $m > 0$.
      On veut montrer que dans ce cas, $G = m\mathbb{Z}$, c'est-à-dire $G = \{mk\,,\ k \in \mathbb{Z}\}$.
      i) Soit (a_n) une suite d'éléments de $G \cap \mathbb{R}^{*+}$ qui converge vers m.
         Montrer qu'à partir d'un certain rang, (a_n) est constante. En déduire que $m \in G$.
      ii) Montrer que $G = m\mathbb{Z}$.
   b) Deuxième cas : $m = 0$.
      Montrer que G est dense dans $\mathbb{R}$.
   c) Soit α, β deux réels incommensurables, c'est-à-dire non nuls et tels que $\dfrac{\alpha}{\beta} \notin \mathbb{Q}$.
      On pose $G = \{k\alpha + l\beta\,,\ (k, l) \in \mathbb{Z}^2\}$.
      Montrer que G est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ qui n'est pas de la forme $m\mathbb{Z}$ $(m \in \mathbb{R})$.
   d) Montrer que l'ensemble $A = \{\cos(n)\,,\ n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[-1, 1]$, c'est-à-dire que tout élément de $[-1, 1]$ est limite d'une suite d'éléments de A.

9. Quels sont les éléments inversibles dans l'anneau $(\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), +, \times)$?

10. Soit E l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de la forme $M = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
    Montrer que $(E, +, \times)$ est un anneau. Quels sont les éléments inversibles ?

11. Montrer que tout anneau intègre commutatif fini est un corps.

12. Questions diverses
    a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos(x) + \cos(x\sqrt{2}) = 2$.
    b) Soit $r = \dfrac{p}{q}$ un rationnel > 0 mis sous forme irréductible.
       Montrer que la fonction $f\ :\ x \longmapsto \cos(x) + \cos(rx)$ est périodique et donner sa plus petite période

13. Soit E un ensemble non vide. Si A et B sont des parties de E on définit $A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.
    Montrer que $(\mathcal{P}(E), \Delta, \cap)$ est un anneau commutatif. Est-il intègre ? Quels sont les éléments neutres ? Quels sont les éléments inversibles ?

1. **Dérivabilité d'un raccord**
Donner l'ensemble de dérivabilité de f et l'expression de f', puis dire si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur son ensemble de définition.

 a) $f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x}{1+|x|} \end{array}$

 b) $f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} e^x & \text{si } x \geqslant 0 \\ \cos x & \text{si } x < 0 \end{cases} \end{array}$

2. **Limites, taux d'accroissement, DL d'ordre 1**
Déterminer les limites suivantes, sous réserve d'existence.

 a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \sin x - \sqrt{1+x}}{\ln(1+x) + \cos x - (1+x)^2}$

 b) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x + \cos(\sqrt{x}) - 2}{\sin x}$

 c) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{(\arctan x)^2 - \dfrac{\pi^2}{16}}{\ln x}$

3. La fonction f est-elle lipschitzienne sur I ?

 a) $f : x \longmapsto \sqrt{x}$ $\quad I = [1, +\infty[$.

 b) $f : x \longmapsto x^2$ $\quad I = \mathbb{R}$.

4. En utilisant le théorème (ou l'inégalité) des accroissements finis, montrer les inégalités suivantes :

 a) Pour tous réels x et y tels que $0 \leqslant x < y$: $\dfrac{y-x}{2\sqrt{y}} < \sqrt{y} - \sqrt{x} < \dfrac{y-x}{2\sqrt{x}}$

 b) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $|\arctan(x) - \arctan(y) \leqslant |x-y|$.

 c) $\forall x \in]0,1[$, $x < \arcsin x < \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

5. Soit $f: \begin{array}{rcl} [0, \sqrt{2}] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \arccos(1-x^2) \end{array}$

 a) Montrer que f est dérivable sur $]0, \sqrt{2}[$ et calculer f' sur cet intervalle.

 b) Étudier la dérivabilité de f en 0.

 c) En déduire un équivalent simple de $\arccos(1-y)$ quand y tend vers 0 à droite.

6. Donner l'expression de la dérivée n^{e} de $f : x \longmapsto x^2 e^{2x}$

7. **Généralisation de l'IAF**
Soit a, b deux réels ($a < b$), et soit f et g deux fonctions dérivables sur $[a,b]$, telles que
$\forall x \in [a,b]$, $|f'(x)| \leqslant g'(x)$.
Montrer que $|f(b) - f(a)| \leqslant g(b) - g(a)$.

8. **CCINP exo 4**

   a) Énoncer le théorème des accroissements finis.

   b) Soit $f\,:\,[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in]a,b[$.
   On suppose que f est continue sur $[a,b]$ et que f est dérivable sur $]a,x_0[$ et sur $]x_0,b[$.
   Démontrer que, si f' admet une limite finie en x_0, alors f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$.

   c) Prouver que l'implication : (f est dérivable en x_0) $\Rightarrow$ (f' admet une limite finie en x_0) est fausse.
   Indication : on pourra considérer la fonction g définie par : $g(x) = x^2 \sin \dfrac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et $g(0) = 0$.

9. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, qui admet la même limite finie ℓ en $+\infty$ et en $-\infty$.
   Montrer que f' s'annule au moins une fois.
   On pourra considérer la fonction $g = f \circ \tan$ *sur* $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

10. Soit $P\,:\,\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction polynômiale de degré $n \in \mathbb{N}$.
    Montrer que l'équation $P(x) = e^x$ a au plus $n+1$ solutions réelles.

11. Soit $f\,:\,\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable en un point x_0.
    Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $|f|$ soit dérivable en x_0.

12. Soit f dérivable sur $[1,2]$ telle que $f(1) = f(2) = 0$.
    Montrer qu'il existe une tangente à la courbe qui passe par l'origine.

13. **Version "continue" du théorème de Cesaro**
    Soit $f\,:\,\mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable, et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.
    Montrer que si $f'(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell$, alors $\dfrac{f(x)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell$.

14. **Théorème de Darboux**
    Soit I un intervalle, et $f\,:\,I \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable.
    Le but de l'exercice est de montrer que f' vérifie la propriété des valeurs intermédiaires, c'est-à-dire $\forall x,y \in f'(I),\ x < y \Rightarrow]x,y[\subset f'(I)$.

    a) Soit $a < b$ dans I. On suppose que $f'(a) < 0$ et $f'(b) > 0$. Montrer que $f_{|]a,b[}$ admet un extremum.

    b) Conclure.

15. Soit $f\,:\,\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

    a) Montrer que si f est dérivable en 0, alors $\dfrac{f(x) - f(-x)}{2x} \xrightarrow[x\to 0]{} f'(0)$.

    b) Montrer que $\begin{cases} \dfrac{f(x)-f(-x)}{2x} \xrightarrow[x\to 0]{} \ell \in \mathbb{R} \\ f \text{ est continue en } 0 \end{cases}$ n'entraîne pas la dérivabilité de f en 0.

1. **Inégalité de Young**
   Soit p, q des réels strictement positifs tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.
   Montrer que $\forall x, y \in \mathbb{R}^{*+}$, $xy \leqslant \dfrac{x^p}{p} + \dfrac{y^q}{q}$.
   On pourra utiliser la concavité de ln.

2. Soit $x_0, \dots, x_n$ des réels strictement positifs tels que $x_n = x_0$.
   Montrer que $\dfrac{x_0}{x_1} + \dfrac{x_1}{x_2} + \dots + \dfrac{x_{n-1}}{x_n} \geqslant n$
   On pourra utiliser la concavité de ln.

3. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ convexe et croissante.
   Montrer que si f n'est pas constante, alors $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$.

4. Soit I un intervalle, et $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ convexes.
   Montrer que $\max(f, g)$ est convexe.
   En est-il de même pour $\min(f, g)$?

5. **Suite récurrente avec point fixe** (modèle d'exercice classique)
   On définit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \cos u_n$.
   a) Montrer que la fonction cos a un unique point fixe sur $\mathbb{R}$ (noté α) et que $\alpha \in [0, 1]$.
   b) Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0, 1]$.
   c) À l'aide de l'inégalité des accroissements finis, montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{\sqrt{3}}{2}|u_n - \alpha|$
   d) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leqslant \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$. Que peut-on en déduire ?

6. Sur le modèle de l'exercice précédent, étudier les suites suivantes :
   a) $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\arctan(u_n)$
   b) $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = e^{-\frac{u_n^2}{2}}$
   Indication : commencer par déterminer $\sup\limits_{x \in \mathbb{R}} |f'(x)|$ *avec* $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$.

7. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$
   a) Montrer qu'elle est bien définie sur $\mathbb{N}$ et que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant 2$.
   b) Étudier la monotonie de la suite (u_n).
   c) Montrer que (u_n) converge et donner sa limite.

8. Soit (t_n) la suite réelle définie par

$$t_0 = \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ t_{n+1} = (1-t_n)^2$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = t_{2n}$ et $w_n = t_{2n+1}$.
Soit $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (1-x)^2 \end{array}$

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ et $w_n \in \left[0, \frac{1}{4}\right]$. La suite (t_n) converge-t-elle ?
b) Montrer que $f \circ f$ est croissante sur $[0,1]$.
c) Factoriser la fonction polynômiale $P : x \longmapsto f(f(x)) - x$.
d) Montrer que (v_n) croît et donner sa limite.
e) Montrer que (w_n) décroît et donner sa limite.

9. **Moyenne arithmético-géométrique**
Soit a_0 et b_0 deux réels strictement positifs. On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$$

On admet que les suites (a_n) et (b_n) sont bien définies et que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n > 0 \quad \text{et} \quad b_n > 0$$

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n \leqslant b_n$.
b) Étudier la monotonie de (b_n).
c) Montrer que les suites (a_n) et (b_n) convergent et qu'elles ont la même limite.

*La limite commune des suites (a_n) et (b_n) ne dépend que de a_0 et b_0. On ne peut pas exprimer simplement cette limite en fonction de a_0 et b_0 en utilisant les fonctions usuelles. On l'appelle **moyenne arithmético-géométrique** de a_0 et b_0.*

10. Soit (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$.

a) Montrer que la suite (u_n) est bien définie et que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$.
b) Montrer que $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$.
Indication : que se passe-t-il sinon ?
c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1}^2 - u_n^2 \geqslant 2$ puis que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant \sqrt{1+2n}$.
d) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \leqslant 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2k-1}}$.
e) Montrer que $\forall k \geqslant 2,\ \frac{1}{\sqrt{2k-1}} \leqslant \sqrt{2k-1} - \sqrt{2k-3}$, puis que $\forall n \geqslant 2,\ u_n \leqslant 1 + \sqrt{2n-1}$.
f) Donner un équivalent de (u_n).

1. (Corrigé en ligne)

   a) Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$ les polynômes suivants :

   $$X^3-3 \qquad X^{12}-1 \qquad X^6+1 \qquad X^9+X^6+X^3+1$$

   b) Factoriser les polynômes suivants :

   $$X^2+(3i-1)X-2-i \qquad X^3+(4+i)X^2+(5-2i)X+2-3i$$

2. Effectuer la division euclidienne de A par B.

   a) $A=X^7-1$, $B=X^3-1$.

   b) $A=X^5-X^4+2X^3+X^2+4$, $B=X^2-1$.

   c) $A=X^n$ ($n\in\mathbb{N}^*$), $B=X-1$.

3. (Corrigé en ligne) À quelle condition sur $a,b,c\in\mathbb{R}$ le polynôme X^4+aX^2+bX+c est-il divisible par X^2+X+1 ?

4. a) i) Soit $n\in\mathbb{N}$. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par X^2-3X+2.

   ii) Soit $M=\begin{pmatrix}4 & 3\\ -2 & -1\end{pmatrix}$.

   Vérifier que $M^2-3M+2I_2=0$. En déduire M^n pour tout $n\in\mathbb{N}$.

   b) Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par X^2-2X+1.

5. Questions indépendantes.

   a) Trouver une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que $aX^{n+1}+bX^n-1$ soit divisible par X^2-3X+2.

   b) Trouver une CNS sur a et b pour que $aX^{n+1}+bX^n+1$ soit divisible par $(X-1)^2$.

   c) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, X^2+X+1 divise $(X+1)^{2n+1}+X^{n+2}$.

   d) Montrer que pour tous $n\in\mathbb{N}$ et $\theta\in\mathbb{R}$, $X^2-2(\cos\theta)X+1$ divise $(\sin\theta)X^n-(\sin n\theta)X+\sin(n-1)\theta$.

6. Soit $n\geqslant 2$. Trouver l'ordre de multiplicité de 1 en tant que racine de $P=X^{2n}-nX^{n+1}+nX^{n-1}-1$.

7. a) Appliquer la formule de Taylor à $P=X^4-X^2-2X+2$ pour obtenir $P(X+1)$

   b) Déterminer (si elle existe) $\ell=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-x^2-2x+2}{(x-1)^2}$

8. Soit $P=X^5-5X^4+8X^3-4X^2-X+1$.
   Exprimer $P(X+1)$ avec la formule de Taylor, et en déduire la factorisation de P.

9. Soit f une fonction continue non constante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$.
Montrer que si $\forall t \in \mathbb{R}$, $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k f(t)^k = 0$, alors $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $a_k = 0$.

10. **D'après CCINP exo 85**

    a) Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et $a \in \mathbb{R}$.

       i) Énoncer la formule de Taylor polynômiale.

       ii) Soit $r \in \mathbb{N}^*$. Montrer que si a est racine de P de multiplicité r, alors a est racine de P' de multiplicité $r-1$.

       iii) En déduire que : a est une racine de P d'ordre de multiplicité r si et seulement si $P^{(r)}(a) \neq 0$ et $\forall k \in [\![0, r-1]\!]$, $P^{(k)}(a) = 0$.

    b) Déterminer deux réels a et b pour que 1 soit racine double du polynôme $P = X^5 + aX^2 + bX$ et factoriser alors ce polynôme dans $\mathbb{R}[X]$.

11. **D'après CCINP exo 87**
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_0, \dots, a_n$ des réels distincts.

    a) $\boxed{\text{Dans cette question uniquement, } n = 2}$
    Donner un polynôme L_0 de degré au plus 2 tel que $L_0(a_0) = 1$ et $L_0(a_1) = L_0(a_2) = 0$.

    b) Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Déterminer un polynôme L_k de degré inférieur ou égal à n tel que

$$\forall i \in [\![0, n]\!],\ L_k(a_i) = \begin{cases} 0 \text{ si } i \neq k \\ 1 \text{ si } i = k \end{cases}$$

    c) Montrer que si $b_0, \dots, b_n$ sont $n+1$ réels quelconques, alors il existe un unique polynôme P vérifiant

$$\deg P \leqslant n \quad \text{et} \quad \forall i \in [\![0, n]\!],\ P(a_i) = b_i$$

    d) Prouver que $\forall p \in [\![0, n]\!]$, $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k^p L_k = X^p$.

12. Soit $x_1, \dots, x_{n+1}$ des scalaires 2 à 2 distincts.
Soit $(P_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}_n[X]$.
On suppose que pour tout $k \in [\![1, n+1]\!]$, la suite $\big(P_i(x_k)\big)_{i \in \mathbb{N}}$ converge.
Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, la suite $\big(P_i(x)\big)_{i \in \mathbb{N}}$ converge.

13. a) Soit $P = (X-1)^2(X-2)(X-3)$.
    Montrer **sans calcul** que P' admet 3 racines simples.

    b) Plus généralement, montrer que si $P \in \mathbb{R}[X]$ est scindé de degré $\geqslant 2$, alors P' est scindé aussi.

14. **D'après CCINP exo 90**

    a) On se place dans $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère orthonormé et on considère les trois points $A(0,1)$, $B(1,3)$, $C(2,1)$.
    Déterminer une fonction polynômiale de degré 2 dont la courbe passe par les points A, B et C.

    b) Trouver tous les polynômes P (de degré quelconque) tels que $P(0) = 1$, $P(1) = 3$ et $P(2) = 1$.

15. **Un polynôme de degré $\leqslant n$ qui prend des valeurs rationnelles en $n+1$ rationnels est rationnel.**
Soit $P \in \mathbb{C}_n[X]$.
On suppose que $\forall k \in [\![1, n+1]\!]$, $x_k \in \mathbb{Q}$ et $\forall k \in [\![1, n+1]\!]$, $P(x_k) \in \mathbb{Q}$.
Montrer que les coefficients de P sont rationnels.

16. Soit $f : x \longmapsto e^{-x^2}$.
f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $H_n(x) = f^{(n)}(x)e^{x^2}$.
    a) Donner pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de H_{n+1} en fonction de H_n.
    b) Montrer que H_n est polynômiale, donner son degré et son coefficient dominant.

17. Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $(X+4)P(X) = XP(X+1)$.

18. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ (fixé dans tout l'exercice), et $f \colon \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^n(1-x)^n \end{array}$
    a) Question minute : que valent $f^{(k)}(0)$ et $f^{(k)}(1)$ pour $k \in [\![0, n-1]\!]$?
    b) À l'aide de la formule de Leibniz, calculer $f^{(n)}(0)$ et $f^{(n)}(1)$.
    c) Recommencer la question b), cette fois sans erreur.
    d) Montrer que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $f^{(k)}$ s'annule au moins k fois dans $]0, 1[$.

1. Dire si F est un sous-espace vectoriel de E.
   a) $E = \mathbb{R}^2, \quad F = \{(x+2y, y)\,,\,(x,y) \in \mathbb{R}^2\}$
   b) $E = \mathbb{R}^3, \quad F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,,\, x \geqslant 0\}$
   c) $E = \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}), \quad F = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\,,\, f(0) = f(1)\}$
   d) $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \quad F$: ensemble des suites arithmétiques
   e) $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\, F = \{M \in E\,,\, \mathrm{tr}(M) = 0\}$

2. Exprimer F comme l'ensemble des solutions d'un système d'équations.
   a) $F = \mathrm{Vect}(u,v)$, avec $u = (1,2,3)$, $v = (3,2,0)$
   b) $F = \{(x+3y+z, x+2y+2z, x+y+3z)\,,\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\}$

3. Dans chaque cas, (u_i) est une famille d'éléments de l'espace vectoriel E.
   Dire si la famille (u_i) est libre ou liée. Si elle est liée, exprimer un vecteur comme combinaison linéaire des autres.
   a) $E = \mathbb{R}^3 \quad u_1 = (1,-1,0) \quad u_2 = (2,1,-1) \quad u_3 = (1,5,-1)$
   b) $E = \mathbb{R}^3 \quad u_1 = (1,1,2) \quad u_2 = (2,1,0) \quad u_3 = (3,1,\lambda)$ (λ : paramètre réel)

4. Dans chaque cas, montrer que E est un espace vectoriel et donner une base de E.
   a) $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,,\, x - y + 4z = 0\}$
   b) $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,,\, x - y + 3z = 0 \quad \text{et} \quad 2x - y + z = 0\}$
   c) $E = \{(x+2y-2z, -x+3y-z, x+7y-5z)\,,\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\}$
   d) E : ensemble des $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$ solutions de (S) : $\begin{cases} 2x + y + z - t = 0 \\ x - y + z + t = 0 \\ x + 2y - at = 0 \end{cases}$
      (a : paramètre réel).
   e) $E = \{P \in \mathbb{R}_3[X]\,,\, P(2) = 0 \quad \text{et} \quad P'(1) = 0\}$
   f) $E = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}\,,\, \forall n \in \mathbb{N},\, u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n\}$
   g) $E = \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})\,,\, f'' - 4f' + 4f = 0\}$

5. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On note $C(A)$ l'ensemble des matrices qui commutent avec A, et $V(A)$ le SEV de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ engendré par les puissances de A :
   $$C(A) = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})\,,\, AM = MA\} \quad \text{et} \quad V(A) = \mathrm{Vect}\{A^k,\, k \in \mathbb{N}\}$$
   a) Montrer que $C(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   b) Dans toute la suite, on prend $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.
      Montrer que pour tout $n \geqslant 2$, $A^n \in \mathrm{Vect}(A, I)$.
   c) En déduire une famille génératrice finie de $V(A)$.
   d) A-t-on $C(A) = V(A)$?

6. **Liberté d'une famille de fonctions**
Dans cet exercice, toutes les astuces suivantes peuvent être utilisées :
— Évaluation en un point
— Dérivation
— Équivalent/limite/croissance comparée (+ les DL la semaine prochaine !)

   a) Dans $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, montrer que la famille $(\sin, \cos)$ est libre. Même question avec $(\sin, \cos, \mathrm{sh}, \mathrm{ch})$.
   b) Pour $k \in \mathbb{R}$, soit $f_k\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{*+} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^k \end{array}$.
      i) Montrer que la famille $(f_1, f_{\sqrt{2}}, f_3)$ est libre.
      ii) Généralisation : montrer que la famille $(f_k)_{k\in\mathbb{R}}$ est libre.
   c) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $s_n(x) = \sin(nx)$.
   Montrer que (s_1, s_2) est libre (on pourra dériver 2 fois), puis que $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est libre.

7. Soit $u_1 = (1, 1, 1)$, $u_2 = (1, 2, 1)$, $u_3 = (3, -2, 1)$, $u_4 = (-1, 1, 1)$.
Soit $F = \mathrm{Vect}(u_1, u_2) \cap \mathrm{Vect}(u_3, u_4)$. Donner une base de F.

8. Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ fixée. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on note E_λ l'ensemble

$$E_\lambda = \{X \in \mathcal{M}_{31}(\mathbb{R}) \,,\, AX = \lambda X\}$$

   a) Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, E_λ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{31}(\mathbb{R})$.
   b) On prend $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix}$.
   Dire pour quels $\lambda \in \mathbb{R}$ l'ensemble E_λ n'est pas réduit à $\{\vec{0}\}$, et pour ces valeurs de λ, donner une base de E_λ.

1. **Compréhension des DL**
   Dans chaque cas, dire à quel ordre maximal on peut obtenir le DL de fg, f^2 et g^2.

   a) $f(x) = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^4}{24} + \underset{x\to0}{o}\left(x^4\right)$ $\quad$ $g(x) = 1 - x - \dfrac{x^2}{2} + \underset{x\to0}{o}\left(x^2\right)$

   b) $f(x) = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \underset{x\to0}{o}\left(x^2\right)$ $\quad$ $g(x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{2} + x^4 + \underset{x\to0}{o}\left(x^4\right)$

2. Déterminer le développement limité en 0 de la fonction f, à l'ordre n.
   On précisera pour chaque fonction usuelle composant f, à quel ordre il faut prendre son DL.

a)	$f : x \longmapsto \dfrac{e^x}{1+x}$	$n=2$	f)	$f : x \longmapsto e^x \sin x$	$n=3$
b)	$f : x \longmapsto \arccos x$	$n=5$	g)	$f : x \longmapsto \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin x}$	$n=3$
c)	$f : x \longmapsto \displaystyle\int_1^x \exp(-t^2)\,\mathrm{d}t$	$n=5$	h)	$f : x \longmapsto (\cos x)^{\sin x}$	$n=5$
d)	$f : x \longmapsto \sqrt{e^x}$ (2 méthodes)	$n=2$	i)	$f : x \longmapsto (1+x)^{1/x}$	$n=2$
e)	$f : x \longmapsto \exp(\sin x)$	$n=3$	j)	$f : x \longmapsto \ln(2+x)$	$n=2$

3. Déterminer la limite éventuelle de f en a.

a)	$f : x \longmapsto \dfrac{e^x - \ln(1+x) - \cos x}{\sin x - x}$	$a = 0$	e)	$f : x \longmapsto (3\times 2^x - 2\times 3^x)^{1/x}$	$a = 0$
b)	$f : x \longmapsto \dfrac{x\cos x - \sin x}{x^3}$	$a = 0$	f)	$f : x \longmapsto \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{\sin^2 x}$	$a = 0$
c)	$f : x \longmapsto \dfrac{\sin^2 x - x\ln(1+x)}{e^x + \cos x - \sin x - 2}$	$a = 0$	g)	$f : x \longmapsto \dfrac{x^x - x}{1 - x + \ln x}$	$a = 1$
d)	$f : x \longmapsto x^3 \sin\dfrac{1}{x} - x^2$	$a = +\infty$	h)	$f : x \longmapsto \left(\dfrac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)^{x\ln x}$	$a = +\infty$

4. **Recherche d'asymptote**

   a) i) Soit $f : x \longmapsto (x+1)\exp\left(\frac{1}{x}\right)$, définie sur $\mathbb{R}^{*+}$.
   Montrer qu'il existe des réels a, b, c tels que $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{x}\right)$
   On pourra se ramener en 0 *en posant* $y = \dfrac{1}{x}$

   ii) En déduire que la courbe de f admet une asymptote en $+\infty$ et déterminer la position de la courbe par rapport à l'asymptote pour les grandes abscisses.

   b) Mêmes questions pour $g : x \longmapsto \sqrt[3]{x^3 + x^2 + x}$

5. **CCINP exo 1 (ancien)**

   a) On considère deux suites numériques (u_n) et (v_n) telles que (v_n) est non nulle à partir d'un certain rang et $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$.
   Montrer que u_n et v_n sont de même signe à partir d'un certain rang.

   b) Déterminer le signe, au voisinage de l'infini, de $u_n = \mathrm{sh}\left(\frac{1}{n}\right) - \tan\left(\frac{1}{n}\right)$.

6. **Questions indépendantes diverses**

   a) x étant un réel fixé, donner un équivalent quand n tend vers $+\infty$ de $u_n = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n - e^x$.

   b) Déterminer les réels a, b, c pour que $\lim_{x\to 0} \frac{1 + ae^x + be^{2x} + c\sin x}{x^3}$ existe et soit finie.

   c) Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un intervalle $\mathbb{R}$, et soit $a \in \mathbb{R}$. Déterminer

   $$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) + f(a-h) - 2f(a)}{h^2}$$

7. Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x + x^2 + x^3 \end{array}$

   a) Montrer que f est bijective. Sa réciproque est notée g.

   b) Montrer que g admet un DL à tout ordre en 0 et déterminer le DL_3.

8. **DL en un autre point que** 0

   a) Déterminer le DL_4 en $\frac{\pi}{6}$ de la fonction sin.

   b) Déterminer le DL_2 en 2 de la fonction $f : x \longmapsto \frac{1}{x}$.

9. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $X^{n+1} | 1 + X - P(X)^2$

10. **Étude d'une suite récurrente : le sinus itéré**
    Soit (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sin u_n$.

    a) **Convergence**
    Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]0, 1]$.
    Étudier la monotonie puis la convergence de (u_n).

    b) Trouver $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $(u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha)$ converge dans $\mathbb{R}^*$.

    c) On admet le résultat suivant [4] :
    Soit (v_n) une suite réelle et $\ell \in \mathbb{R}$. Si $v_{n+1} - v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$, alors $\frac{v_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.
    En déduire un équivalent de (u_n).

    d) De même, donner un équivalent des suites (u_n) suivantes :

       i) $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \arctan u_n$. (voir TD 18)

       ii) $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{1 + 2u_n} - 1$.

4. C'est une reformulation du théorème de Cesàro (TD 16).

1. Dans chacun des cas suivants, dire si l'application f de E dans F est linéaire.
   Quand elle est linéaire, décrire le noyau et de l'image (donner une base sauf s'ils sont réduits à $\{\vec{0}\}$).
   a) $E = F = \mathbb{R}^2$, $\quad f(x,y) = (x+2y, 3x-y)$
   b) $E = F = \mathbb{R}^3$, $\quad f(x,y,z) = (x+y+z, 1, 2y-z)$
   c) $E = F = \mathbb{R}^3$, $\quad f(x,y,z) = (x, 2|y|, x-y+2z)$
   d) $E = F = \mathbb{R}_2[X]$, $\quad f(P) = P - XP'$
   e) $E = F = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $\quad f(u) = u'' + 2u' + u$ $\quad$ (seulement le noyau)

2. Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme canoniquement associé à M. Décrire $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$.

3. **Sommes directes, projections**
   a) Soit $E = \mathbb{R}^3$, $F = \operatorname{Vect}(u_1)$ avec $u_1 = (1,1,-1)$, $G = \{(x,y,z) \in E \,/\, x+y+z = 0\}$
   Montrer que $E = F \oplus G$ et donner l'expression analytique de p, la projection sur F parallèlement à G.
   b) $E = \mathbb{K}[X]$, $F = \mathbb{K}_2[X]$, $G = \{P \in \mathbb{K}[X] \,/\, P(1) = P'(1) = P''(1) = 0\}$
   Montrer que $E = F \oplus G$, et décomposer X^3 dans cette somme directe
   c) **Très classique**
   Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, I l'ensemble des fonctions impaires, P l'ensemble des fonctions paires.
   Montrer que I et P sont des SEV de E puis que $E = I \oplus P$.

4. **CCINP exo 60**
   Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par : $f(M) = AM$.
   a) Déterminer une base de $\operatorname{Ker} f$.
   b) f est-il surjectif ?
   c) Déterminer une base de $\operatorname{Im} f$.
   d) A-t-on $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$?

5. Soit E et F deux espaces vectoriels, soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et soit $(x_1,\dots,x_r)$ une famille de vecteurs de E. Montrer que :
   a) Si $\big(f(x_1),\dots,f(x_r)\big)$ est libre, alors $(x_1,\dots,x_r)$ est libre.
   b) Si $(x_1,\dots,x_r)$ est libre et f est injective, alors $\big(f(x_1),\dots,f(x_r)\big)$ est libre.
   c) Si $(x_1,\dots,x_r)$ est génératrice de E et f est surjective, alors $\big(f(x_1),\dots,f(x_r)\big)$ est génératrice de F.
   d) Si $\big(f(x_1),\dots,f(x_r)\big)$ est génératrice de F et f est injective, alors $(x_1,\dots,x_r)$ est génératrice de E.

6. **d'après CCINP exo 62**
Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 - f - 2\,\mathrm{Id} = 0$.
   a) Prouver que f est bijective et exprimer f^{-1} en fonction de f.
   b) Prouver que $E = \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{Id})$.

7. Soit $f\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (2x+y+z, 2y-z, 2z) \end{array}$
Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ l'expression explicite de f^n.

8. Soit E un EV et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer les équivalences :
   a) $\mathrm{Im}\, f \cap \mathrm{Ker}\, f = \{\vec{0}\} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Ker}(f \circ f) = \mathrm{Ker}\, f$
   b) $\mathrm{Im}\, f + \mathrm{Ker}\, f = E \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Im}(f \circ f) = \mathrm{Im}\, f$

9. Soit E un EV, et soit $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que pour tout $x \in E$, la famille $(x, f(x))$ soit liée.
Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f = \lambda\,\mathrm{Id}_E$.

10. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \mathbb{K})$ telle que $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ f(AB) = f(BA)$.
Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f = \lambda\,\mathrm{tr}$.

1. Exercice d'entraînement, à chercher hors séance de TD
   Calculer les intégrales ou primitives suivantes :
   a) $I = \displaystyle\int_1^5 \lfloor \ln x \rfloor \,\mathrm{d}x$
   b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^4(x)\,\mathrm{d}x$
   c) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{\arcsin(x)}{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$
   d) F, primitive de $f\,:\,x \longmapsto \dfrac{x}{x^4-x^2-2}$ sur $]-\sqrt{2},\sqrt{2}[$.

2. Soit $f\,:\,x \longmapsto \displaystyle\int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{1}{1+t+t^2+t^3}\,\mathrm{d}t$.
   Donner une expression explicite de f sur $\mathbb{R}^{*+}$. *Indication : dérivation*

3. **CCINP exo 56 (ancien)** (un grand classique)
   On considère la fonction H définie sur $]1,+\infty[$ par $H(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$.
   a) Montrer que H est $\mathcal{C}^1$ sur $]1,+\infty[$ et calculer sa dérivée.
   b) Montrer que la fonction u définie par $u(x) = \dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{1}{x-1}$ admet une limite en $x=1$.
   c) En utilisant la fonction u de la question b), calculer la limite en 1^+ de la fonction H.

4. En utilisant une formule de Taylor, montrer les inégalités suivantes.
   On précisera quelle fonction on utilise, entre quelles bornes, et à quel ordre.
   a) $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ x - \dfrac{x^3}{6} \leqslant \sin x \leqslant x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120}$
   b) $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ 1 + x + \dfrac{x^2}{2} \leqslant e^x \leqslant 1 + x + \dfrac{x^2}{2}e^x$
   c) $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}^+,\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \leqslant e^x \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^x$

5. **Développement en série entière de** $\ln(1+x)$
   a) Soit $x > 0$ fixé dans tout l'exercice. Appliquer les deux formules de Taylor à ln entre 1 et $1+x$ à l'ordre n ($n \in \mathbb{N}^*$).
   b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1}\frac{x^k}{k}$. Montrer que $|\ln(1+x) - u_n| \leqslant \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$
   c) On suppose que $x \in]0,1]$. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$.

6. Soit $z \in \mathbb{C}$ fixé. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}$.
   En appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange à $f\,:\,t \longmapsto e^{zt}$ de 0 à 1, déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n$.

7. **Petits exercices de colle (questions indépendantes)**

   a) Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_x^{2x}\frac{t+1}{t^2+\cos t}\,\mathrm{d}t$ *Encadrer, intégrer !*

   b) Soit $f\in\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$. On définit $g\colon \begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^1 f(t)\sin(xt)\,\mathrm{d}t\end{array}$

   Montrer que g est lipschitzienne.

   c) Soit $f\in\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ telle que $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}$.
   Montrer que f admet un point fixe.
   Le résultat reste-t-il vrai si $f\in\mathcal{C}_m([0,1],\mathbb{R})$?

   d) Pour $n\in\mathbb{N}$, soit $I_n=\displaystyle\int_0^1 t^n\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)}{t+1}\,\mathrm{d}t$.

      i) Montrer que $I_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$

      ii) Montrer que $I_n\underset{n\to+\infty}{=}o\left(\dfrac{1}{n}\right)$

8. **Sommes de Riemann**
   Déterminer la limite des suites ci-dessous :

   a) $u_n=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\frac{k}{n}+1}$

   b) $v_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}$

   c) $w_n=\left(\dfrac{(2n)!}{(n!)n^n}\right)^{\frac{1}{n}}$

9. Pour $n\geqslant 1$, soit $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}$.
   Donner un équivalent de (S_n).

10. Pour $x\in\mathbb{R}^+$, on définit $f(x)=\displaystyle\int_0^1 e^{-x^2t^2}\,\mathrm{d}t$

    a) Montrer que $\forall u\in\mathbb{R}^+$, $|e^{-u}-1|\leqslant u$. En déduire que f est dérivable en 0 et que $f'(0)=0$.

    b) Montrer que $f(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$. On pourra faire le changement de variable $u=xt$.

11. **Continuité uniforme** (questions indépendantes)

    a) Soit I un intervalle, et $f : I\longrightarrow\mathbb{R}$.
    Montrer que f est uniformément continue sur I si et seulement si pour toutes suites (x_n) et (y_n) d'éléments de I, $x_n-y_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}0\Rightarrow f(x_n)-f(y_n)\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$.

    b) La fonction $f\colon \begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & \sin(x^2)\end{array}$ est-elle uniformément continue ?

    c) Soit $f\in\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ qui admet des limites finies en $-\infty$ et $+\infty$. Montrer que f est uniformément continue.

1. Reprendre les exercices suivants du TD 25 en utilisant la dimension pour gagner du temps.
   — 1. a)
   — 2.
   — 3. a) (sans le calcul de la projection)
   — 4. b) c) d) (CCINP 60)

2. Soit $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$) l'ensemble des matrices symétriques (resp. antisymétriques) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   On pourra commencer avec $n = 3$ puis essayer de généraliser à $n \in \mathbb{N}^*$ quelconque.
   a) Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont des SEV de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et donner leur dimension.
   b) Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ (2 méthodes possibles).

3. Donner le rang de la famille $\mathcal{F}$ d'éléments de E, puis une base du SEV engendré.
   a) $E = \mathbb{R}^3$, $\mathcal{F} = \big((1,2,1),(1,3,-1),(1,1,a)\big)$ (a : paramètre réel)
   b) $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $\mathcal{F} = \left(\mathrm{ch}, \mathrm{sh}, \exp, \frac{1}{\exp}\right)$

4. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ définie par $f(x,y) = (2x+y, x-y)$.
   Soit $u_1 = (1,3)$ et $u_2 = (1,2)$. Vérifier que $\mathcal{B} = (u_1,u_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et déterminer $M = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$.
   Réponse partielle : $M = \begin{pmatrix} -12 & ? \\ ? & ? \end{pmatrix}$

5. **CCINP exo 71**
   Soit p la projection vectorielle de $\mathbb{R}^3$, sur le plan P d'équation $x+y+z=0$, parallèlement à la droite D d'équation $x = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{3}$.
   a) Vérifier que $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$.
   b) Soit $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.
      Déterminer $p(u)$ et donner la matrice de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
   c) Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de p est diagonale.

6. **CCINP exo 90**
   $\mathbb{K}$ désigne le corps des réels ou celui des complexes. Soit a_1, a_2, a_3 trois scalaires distincts donnés dans $\mathbb{K}$.
   a) Montrer que $\Phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}^3 \\ P & \longmapsto & \big(P(a_1), P(a_2), P(a_3)\big) \end{array}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
   b) **Question rajoutée** : donner la matrice de Φ dans les bases canoniques.
   c) On note (e_1,e_2,e_3) la base canonique de $\mathbb{K}^3$ et on pose $\forall k \in \{1,2,3\}$, $L_k = \Phi^{-1}(e_k)$.
      i) Justifier que (L_1, L_2, L_3) est une base de $\mathbb{K}_2[X]$.
      ii) Exprimer les polynômes L_1 L_2 et L_3 en fonction de a_1, a_2 et a_3.
   d) Soit $P \in \mathbb{K}_2[X]$. Déterminer les coordonnées de P dans la base (L_1, L_2, L_3).
   e) **Application** : on se place dans $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère orthonormé et on considère les trois points $A(0,1)$, $B(1,3)$, $C(2,1)$.
      Déterminer une fonction polynômiale de degré 2 dont la courbe passe par les points A, B et C.

7. **Résolution d'une équation différentielle d'ordre 4**
   On note E l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
   Soit $F = \{u \in E,\ u^{(4)} = 16u\}$ où $u^{(4)}$ est la dérivée 4$^{\text{e}}$ de u.
   Soit $F_1 = \{u \in E,\ u'' = 4u\}$ et $F_2 = \{u \in E,\ u'' = -4u\}$

   a) Montrer que $F = F_1 \oplus F_2$.
   b) Donner une base et la dimension de F_1 puis de F_2.
   c) Donner une base (notée $\mathcal{B}$) et la dimension de F.
   d) Soit $d\colon \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & F \\ u & \longmapsto & u' \end{array}$.
      Montrer que $d \in \mathcal{L}(F)$ puis donner la matrice de d dans $\mathcal{B}$. On la note M
   e) Calculer M^4.

8. **Endomorphisme nilpotent**
   Soit E un EV de dimension finie p, et soit $f \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent, c'est-à-dire : il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^n = \mathbb{O}$. ($\mathbb{O}$ désigne l'endomorphisme nul sur E).
   L'indice de nilpotence de f est $n_0 = \min\{n \in \mathbb{N}^*,\ f^n = \mathbb{O}\}$.

   a) Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $f^{n_0-1}(x) \neq \vec{0}$.
   b) Montrer que la famille $\big(x, f(x), \dots, f^{n_0-1}(x)\big)$ est libre, puis que $f^p = \mathbb{O}$.
   c) Montrer que si $\dim E = 3$ et si f est d'indice de nilpotence 3, alors il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

9. **CCINP 64**
   Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie n.

   a) Démontrer que : $E = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f \Rightarrow \operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$.
   b) i) Démontrer que : $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2 \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2$.
      ii) Démontrer que : $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2 \Rightarrow E = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f$.

10. Soit E un EV de dimension finie, et $f \in \mathcal{L}(E)$.

    a) Montrer que si $\forall x \in E,\ \exists p \in \mathbb{N}^*,\ f^p(x) = \vec{0}$, alors f est nilpotente.
    b) Montrer que si $\forall x \in E,\ \exists p \in \mathbb{N}^*,\ f^p(x) = x$, alors $\exists p \in \mathbb{N}^*,\ f^p = \mathrm{Id}_E$.
    c) Montrer que ces propriétés ne sont plus vraies quand E est de dimension infinie.

11. **Noyaux, images itérés**
    Soit E un EV de dimension finie, et $f \in \mathcal{L}(E)$.
    On note $I_n = \operatorname{Im}(f^n)$ et $K_n = \operatorname{Ker}(f^n)$.

    a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $K_n \subset K_{n+1}$ et $I_{n+1} \subset I_n$.
    b) Montrer qu'à partir d'un certain rang n_0 la suite (I_n) est constante.
    c) Montrer que $\forall n \geqslant n_0,\ K_{n+1} = K_n$.
    d) Montrer que $E = I_{n_0} \oplus K_{n_0}$.

12. Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $\quad c = a + ib \quad$ et $\quad f\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & c\overline{z} \end{array}$.
    Vérifier que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{C})$ (où $\mathbb{C}$ est considéré comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel) et donner la matrice de f dans la base $(1, i)$.

13. Soit $f\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (2x+y+z, 2y-z, 2z) \end{array}$
Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ l'expression explicite de f^n.

14. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ non nul, telle que $f^2 = 0$.

Montrer que $\operatorname{rg} f = 1$, puis que la matrice de f dans une base bien choisie est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

15. Soit E un espace vectoriel, F, G et H des SEV de E tels que $E = F \oplus G = F \oplus H$.
Montrer que G et H sont isomorphes.
   i) En supposant que E est de dimension finie.
   ii) Sans supposer que E est de dimension finie.

16. Déterminer les SEV de $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ de dimension finie et stables par produit.

17. **Deux questions très proches**
   a) **Version discrète**
   Soit $M = \big(\sin(i+j)\big)_{\substack{i\in[\![1,n]\!] \\ j\in[\![1,n]\!]}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   On note C_j la j^{e} colonne de M.
   Montrer que $\operatorname{rg}(C_1,\ldots,C_n) = 2$.
   b) **Version continue**
   Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Pour $a \in \mathbb{R}$, on définit $s_a \in E$ par $s_a\ :\ x \longmapsto \sin(x+a)$
   Soit $F = \operatorname{Vect}\big((s_a)_{a\in\mathbb{R}}\big)$
   Montrer que F est de dimension finie, et en donner une base.

18. **Matrice à diagonale dominante**
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\forall i \in [\![1,n]\!],\ |A_{ii}| > \sum\limits_{j\neq i} |A_{ij}|$.
Montrer que A est inversible.

19. Soit $A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, toutes les deux de rang 2.
Montrer que $AB \neq 0$.

20. **Dérivée discrète**
Soit $\Delta\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}[X] \\ P & \longmapsto & P(X+1)-P(X) \end{array}$ et $\Delta_n\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}_n[X] \\ P & \longmapsto & P(X+1)-P(X) \end{array}$
   a) Montrer que Δ_n est bien défini et que $\Delta_n \in \mathcal{L}(\mathbb{K}_n[X])$, puis déterminer $\operatorname{Im}\Delta_n$ et $\operatorname{Ker}\Delta_n$.
   b) Montrer que $\Delta_n^{n+1} = 0$.
   c) En considérant $\delta\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}[X] \\ P & \longmapsto & P(X+1) \end{array}$ déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'expression de $\Delta^n(P)$.
   d) Déterminer $\operatorname{Im}\Delta$ et $\operatorname{Ker}\Delta$.

1. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle sur le corps éventuellement précisé.

   a) $F = \dfrac{X^3+1}{X(X^2-1)}$.

   b) $F = \dfrac{X^3}{X^3-1}$ sur $\mathbb{R}$.

   c) $F = \dfrac{X^2+X+1}{(X+1)^2(X-1)^2}$.

   d) $F = \dfrac{X^3+2}{(X^2+4)(X^2+1)}$ sur $\mathbb{R}$.

   e) $F = \dfrac{X^{n-1}}{X^n-1}$ sur $\mathbb{C}$ ($n \geqslant 2$).

2. Déterminer une primitive de la fonction f sur l'intervalle I précisé.

   a) $f(x) = \dfrac{x^3+x^2}{x^2-1}$ $\quad I =]-1,1[$.

   b) $f(x) = \dfrac{1}{x(x^2-1)}$ $\quad I =]0,1[$.

   c) $f(x) = \dfrac{1}{x(x^2+1)}$ $\quad I = \mathbb{R}^{*+}$.

3. Calculer les sommes suivantes, en utilisant la décomposition en éléments simples et des changements d'indice.

   a) $a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2+k+1}{k^2+k}$

   b) $b_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k^2-1}$

   c) $c_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$

4. Résoudre sur $]1,+\infty[$ l'équation différentielle $(E)\ :\ (x^2-1)y'(x) - (3x-1)y(x) = 0$

5. Montrer qu'il n'existe pas de polynôme P non nul tel que $\dfrac{P'}{P} = \dfrac{1}{1-X^2}$

6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la DES dans $\mathbb{R}(X)$ de $F = \dfrac{1}{X^n-1}$.
   On partira de la DES dans $\mathbb{C}(X)$.
   On fera deux cas, suivant la parité de n.

7. **Anti-décomposition en éléments simples**
   Soit $n \geqslant 2$. Mettre $F = \displaystyle\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \frac{\omega^2}{X-\omega}$ sous la forme $\dfrac{P}{Q}$, avec P et Q polynômes à déterminer.

1. Étudier la nature de la série $\sum_n u_n$:

a) $u_n = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

b) $u_n = \cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1$

c) $u_n = \frac{\ln n}{n\sqrt{n}}$

d) $u_n = e^{\frac{1}{n}} - \cos\left(\frac{1}{n}\right)$

e) $u_n = \frac{(-1)^n}{n^2+\sin n}$

f) $u_n = e^{-\sqrt{n}}$

g) $u_n = \sqrt{n^4+1} - n^2$

h) $u_n = \frac{\sqrt{n}\cos(n)-1}{n^2 - n\sin(n)}$

2. Montrer que les sommes suivantes sont bien définies, et les calculer :
$S = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2-1}$ $\quad T = \sum_{n=0}^{+\infty} q^{2n} \quad (q \in]-1,1[)$ $\quad U = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+2)}$

3. **CCINP exo 7**

a) Soit (u_n) et (v_n) deux suites de nombres réels positifs.
On suppose que (u_n) et (v_n) sont non nulles à partir d'un certain rang.
Montrer que :
$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \Rightarrow \sum u_n \text{ et } \sum v_n \text{ sont de même nature.}$$

b) Étudier la convergence de la série
$$\sum_{n\geqslant 2} \frac{((-1)^n + i)\ln(n)\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{n+3}-1}$$

4. **CCINP exo 46**
On considère la série : $\sum_{n\geqslant 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$.

a) Prouver que, au voisinage de $+\infty$, $\pi\sqrt{n^2+n+1} = n\pi + \frac{\pi}{2} + \alpha\frac{\pi}{n} + \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$, où α est un réel que l'on déterminera.

b) En déduire que $\sum_{n\geqslant 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$ converge.

c) $\sum_{n\geqslant 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$ converge-t-elle absolument ?

5. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $u_n = \ln(n) + a\ln(n+1) + b\ln(n+2)$.
Trouver a, b tels que $\sum_n u_n$ converge, et donner sa somme dans ce cas.

6. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $u_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.
Étudier la nature (et calculer la somme, si elle existe) de $\sum_n u_n$, $\sum_n nu_n$, $\sum_n n^2u_n$.

7. **CCINP exo 5**

   a) On considère la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n(\ln n)^\alpha}$, où $n \geqslant 2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

      i) Cas $\alpha \leqslant 0$
      En utilisant une minoration très simple de u_n, démontrer que la série diverge.

      ii) Cas $\alpha > 0$
      Étudier la nature de la série.
      Indication : on pourra utiliser la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{x(\ln x)^\alpha}$.

   b) Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{\left(e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right) e^{\frac{1}{n}}}{(\ln(n^2+n))^2}$

8. a) Soit $\alpha \in \mathbb{R}^{*+}$. Étudier la convergence de $\displaystyle\sum_n \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ et sa convergence absolue.

   b) Étudier la convergence de $\displaystyle\sum_n x_n$, avec $x_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$

   On pourra utiliser le DL de $x \longmapsto \dfrac{1}{1+x}$.

   c) Donner un équivalent simple de x_n. Que peut-on en déduire ?

9. **Comparaisons séries-intégrales**. Les questions sont indépendantes.

   a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$ (on ne suppose pas connue l'expression explicite de u_n)

   Donner un encadrement de u_n, et en déduire $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n^3}{3}$.

   Généraliser à $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^p$ avec $p \in \mathbb{N}^*$.

   b) Soit $u_n = \dfrac{1}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}}$. Étudier la convergence de $\displaystyle\sum_n u_n$.

   c) Montrer que $\ln(n!) \underset{n\to+\infty}{\sim} n \ln n$ en faisant une comparaison série-intégrale.

10. **Équivalent du reste d'une série de Riemann convergente**

    Soit $\alpha > 1$. On note $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$, et R_n le reste d'ordre n de $\displaystyle\sum_n u_n$: $\quad R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$

    En faisant une comparaison série-intégrale, encadrer R_n, et en déduire que

    $$R_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$$

11. Soit (u_n) une suite réelle. Montrer que s'il existe $k \in]0,1[$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1}| \leqslant k|u_n|$, alors la série de terme général u_n converge.

12. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $u_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}}$
Expliquer pourquoi u_n est bien défini, et étudier la convergence de la série de terme général u_n.

13. **Formule de Stirling (détermination de la constante)**
On a démontré dans le cours qu'il existe $c \in \mathbb{R}^{*+}$ tel que

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} c\frac{n^n}{e^n}\sqrt{n}$$

Le but de l'exercice est de déterminer c.
On considère les intégrales de Wallis : $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\,\mathrm{d}t$, $n \in \mathbb{N}$.
On admettra les résultats suivants (déjà rencontrés) :
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}W_n$ (obtenu avec une IPP).
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n+1)W_{n+1}W_n = \frac{\pi}{2}$ (immédiat d'après la relation précédente).
- $W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$ (utiliser la décroissance de (W_n)).

a) Donner pour tout $n \in \mathbb{N}$ une expression explicite de W_{2n} à l'aide des factorielles.
b) En déduire c.

14. **L'escargot de Gardner**
Léo l'escargot doit parcourir une bande élastique d'une longueur initiale de 100 mètres. Il se déplace de 1 mètre par heure.
Mais toute les heures, un géant étire l'élastique de manière parfaitement homogène, de telle sorte que sa longueur soit augmentée de 100 mètres. La distance restante à parcourir pour Léo augmente, mais la distance qu'il a déjà parcourue aussi.
Léo atteindra-t-il un jour la fin de l'élastique ? Si oui, donner une approximation du temps qu'il lui faudra.

15. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Étudier la série de terme général $u_n = \frac{(\ln n)^\alpha}{n}$.

16. **Série harmonique alternée**
Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $u_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$. On sait que $\sum_n u_n$ converge.
Sa somme se calcule : pour $n \in \mathbb{N}$, soit $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

a) En partant de $\int_0^1 x^k\,\mathrm{d}x$, exprimer S_n sous la forme $\int_0^1 \frac{P_n(x)}{1+x}\,\mathrm{d}x$, où P_n est un polynôme à déterminer.
b) En déduire $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.
c) Justifier l'existence de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+2)}$ et la calculer.
d) Même question pour $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots$

1. **Dénombrements élémentaires**

   Soit $G = [\![1, 100]\!]^2$. Dénombrer les ensembles suivants.

   Quand c'est possible, on exprimera l'ensemble à l'aide de produits cartésiens, réunions et intersections d'ensembles élémentaires.

   a) $A = \{(a, b) \in G \,/\, a \leqslant 50 \text{ et } b > 50\}$
   b) $B = \{(a, b) \in G \,/\, a \leqslant 50 \text{ ou } b \leqslant 50\}$
   c) $C = \{(a, b) \in G \,/\, a = b\}$
   d) $D = \{(a, b) \in G \,/\, a \leqslant b\}$
   e) $E = \{(a, b) \in G \,/\, b \leqslant a^2\}$

2. **Anagrammes et permutations**

   Pour chaque question, donner un procédé de construction (en expliquant pas à pas comment construire tous les anagrammes, une seule fois) puis ensuite, donner une formule mathématique !

   a) Combien d'anagrammes le mot COMBIEN a-t-il ?
   b) Combien d'anagrammes le mot ANAGRAMME a-t-il ?
   c) Un service d'assiettes est composé de 3 assiettes rouges, 4 bleues et 5 jaunes, toutes identiques entre elles à part la couleur. De combien de façons peut-on les empiler ?

3. **Problèmes d'anniversaire**

   On s'intéresse aux dates d'anniversaire des élèves d'une classe de n élèves.

   On négligera les années bissextiles, et on supposera que tous les jours de l'année sont équiprobables (ce qui est bien sûr faux).

   Après avoir modélisé la situation (définir un ensemble représentant toutes les possibilités), calculer les probabilités des événements suivants (donner la valeur exacte puis faire l'application numérique avec $n = 45$) :

   a) Personne n'est né un 3 du mois.
   b) Au moins une personne est née un 30 du mois.
   c) Toutes les dates d'anniversaires sont différentes.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

   a) Combien y a-t-il de fonctions injectives d'un ensemble à n éléments dans un ensemble à $n+1$ éléments ?
   b) (Plus difficile) Combien y a-t-il de fonctions surjectives d'un ensemble à $n+1$ éléments dans un ensemble à n éléments ?

Jeux de cartes

- Dans un jeu de cartes, il y a 4 “couleurs” : pique, coeur, carreau, trèfle.
- Dans un jeu de 32 cartes il y a 8 hauteurs par couleur : par ordre croissant 7 8 9 10 V D R A
- Dans un jeu de 52 cartes il y a 13 hauteurs par couleur : 2 3 4 5 6 en plus des précédentes.

5. On distribue au hasard une main de 8 cartes d'un jeu de 32.

   a) Modéliser l'épreuve (définir un ensemble qui modélise l'ensemble des situations possibles).
   b) Combien y a-t-il de mains possibles ?

c) Quelle est la probabilité de n'avoir que des cartes noires (piques, trèfles) ?

d) Quelle est la probabilité d'avoir les 4 as ou les 2 rois rouges ?

6. On distribue une main de poker fermé (5 cartes d'un jeu de 52). Calculer la probabilité des événements suivants :

   a) Quinte flush : 5 cartes consécutives et de la même couleur. Exemple : $9\diamondsuit\, 8\diamondsuit\, 7\diamondsuit\, 6\diamondsuit\, 5\diamondsuit$.

   b) Quinte : 5 cartes consécutives d'au moins deux couleurs différentes. Exemple : $9\diamondsuit\, 8\heartsuit\, 7\diamondsuit\, 6\clubsuit\, 5\spadesuit$.
   L'as peut servir de plus petite carte ou de plus grande carte dans les quintes et quintes flush.

   c) Couleur : 5 cartes de la même couleur sans quinte. Exemple : $A\diamondsuit\, 8\diamondsuit\, 7\diamondsuit\, 6\diamondsuit\, 3\diamondsuit$.

   d) Simple paire : 2 cartes de la même hauteur et 3 cartes de hauteurs différentes entre elles et différentes de celle de la paire. Exemple : $A\diamondsuit\, A\clubsuit\, R\diamondsuit\, D\diamondsuit\, 7\spadesuit$.

   e) Brelan : 3 cartes de la même hauteur et 2 cartes de hauteurs différentes entre elles et différentes de celle du brelan. Exemple : $A\diamondsuit\, A\clubsuit\, A\heartsuit\, D\diamondsuit\, 7\spadesuit$.

   f) Double paire : Les 2 paires ont des hauteurs différentes entre elles et différentes de la 5ᵉ carte. Exemple : $A\diamondsuit\, A\clubsuit\, D\heartsuit\, D\diamondsuit\, 7\spadesuit$.

   g) Full : 3 cartes de même hauteur et 2 autres cartes de même hauteur. Exemple : $A\diamondsuit\, A\clubsuit\, A\heartsuit\, D\diamondsuit\, D\spadesuit$.

   h) Carré : 4 cartes de la même hauteur. Ex : $A\diamondsuit\, A\clubsuit\, A\heartsuit\, A\spadesuit\, D\spadesuit$.

   i) Rien (“carte haute”) : aucune des combinaisons précédentes.

   Classer ces événements par probabilités croissantes.

7. **CCINP 112**
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et E un ensemble possédant n éléments.
   On désigne par $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.

   a) **Question rajoutée :** Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Déterminer le nombre u_k de couples $(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$ tels que $\operatorname{card} B = k$ et $A \subset B$.

   b) Déterminer le nombre a de couples $(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$ tels que $A \subset B$.

   c) Déterminer le nombre b de couples $(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$ tels que $A \cap B = \emptyset$.

   d) Déterminer le nombre c de triplets $(A, B, C) \in (\mathcal{P}(E))^3$ tels que A, B et C soient deux à deux disjoints et vérifient $A \cup B \cup C = E$.

8. Les deux questions sont indépendantes.
   Dans chaque cas, on commencera par modéliser précisément l'épreuve.

   a) On dispose de p urnes et n boules toutes blanches sauf une qui est rouge. On met les boules au hasard dans les urnes. Quelle est la probabilité que la boule rouge soit seule dans une urne ?

   b) $n + 1$ objets sont placés au hasard dans les n tiroirs d'un meuble. Quelle est la probabilité que tous les tiroirs soient non vides ? *Réponse :* $\dfrac{(n+1)!}{2n^n}$

9. a) On lance successivement 3 fois un dé normal (à 6 faces).

      i) Quelle est la probabilité que les chiffres obtenus forment une suite strictement croissante ?

      ii) Même question si on lance 6 fois un dé à 20 faces (là c'est plus difficile d'énumérer toutes les possibilités !)

   b) On lance simultanément 3 dés normaux (à 6 faces).
   Quelle est la probabilité d'obtenir 3 nombres consécutifs ?

1. **Exercice de compréhension**
   Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme canoniquement associé.
   a) Trouver deux vecteurs colonnes U_1 et U_2 **non nuls** tels que $f(U_1) = U_1$ et $f(U_2) = 2U_2$.
   b) Montrer que A est semblable à $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et donner $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ telle que $D = P^{-1}AP$.

2. Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.
   a) Montrer que M est semblable à $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, et donner une matrice de passage P telle que $A = P^{-1}MP$.
   b) En déduire une méthode pour calculer M^n.
   L'expression explicite des coefficients n'est pas demandée.

3. Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme canoniquement associé à M.
   a) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, déterminer le rang de $M - \lambda I_3$.
   b) Déterminer tous les réels λ tels que l'équation $MX = \lambda X$ admette des solutions $X \in \mathcal{M}_{31}(\mathbb{R})$ non nulles, et pour chacun de ces λ, déterminer une base de l'ensemble des solutions.
   c) Déterminer une base $\mathcal{B}$ de $\mathcal{M}_{31}(\mathbb{R})$ telle que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$ soit diagonale.
   d) Déterminer une matrice P inversible, telle que $P^{-1}MP$ soit diagonale.

4. Soit $E = \{u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \,/\, u'' + 4u' + 4u = 0\}$
   Soit $f\colon \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ u & \longmapsto & u' \end{array}$
   Montrer que $f \in \mathcal{L}(E)$ et calculer $\mathrm{tr}(f)$.

5. Déterminer le rang de $M = \begin{pmatrix} -1-\lambda & -1 & 3 \\ 1 & -3-\lambda & 3 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$.

6. Soit E de dimension finie, et $f \in \mathcal{L}(E)$ de rang 1.
   Montrer que $f^2 = (\mathrm{tr}\, f)f$.
   Indication : considérer la matrice de f dans une base bien choisie.

7. Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   Montrer que M est semblable à A et donner $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que $A = P^{-1}MP$.

8. A et B étant des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ données, on étudie l'équation

$$(E)\ :\ X + (\operatorname{tr} X)A = B \qquad \text{d'inconnue } X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

Soit $\varphi\colon \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ X & \longmapsto & X + (\operatorname{tr} X)A \end{array}$

La question a) peut être traitée indépendamment des questions b) et c).

   a) $\boxed{\text{Cas où } \operatorname{tr} A = 0}$
   En procédant par analyse-synthèse, montrer que (E) a une unique solution et donner son expression.

   b) $\boxed{\text{Cas où } \operatorname{tr} A \neq 0}$ On note H l'ensemble des matrices de trace nulle : $H = \{X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \ /\ \operatorname{tr}(X) = 0\}$.

      i) Montrer rapidement que $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = H \oplus \mathbb{K}A$.
      ii) Soit $\mathcal{B}$ une base adaptée à cette somme directe. Déterminer $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\varphi)$.
      iii) En déduire que φ est bijective si et seulement si $\operatorname{tr} A \neq -1$.
      iv) Exprimer $\operatorname{tr} \varphi$ en fonction de A.

   c) $\boxed{\text{Cas où } \operatorname{tr} A = -1}$

      i) Donner $\operatorname{rg} \varphi$, $\operatorname{Im} \varphi$ et une base de $\operatorname{Ker} \varphi$.
      ii) Décrire en fonction de B l'ensemble des solutions de (E).

9. Le plan $\mathbb{R}^2$ est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Toutes les coordonnées sont prises dans ce repère.
On considère le point $C(5, -2)$ et une droite (D). Soit (Δ) la parallèle à (D) passant par C.
En faisant le moins de calculs possibles, chercher des équations (affine et cartésienne) ainsi qu'un paramétrage de (Δ) dans chacun des cas suivants :

   a) (D) a pour coefficient directeur $m \in \mathbb{R}$.
   b) (D) est la droite (AB), avec $A(3, -2)$, $B(-1, 4)$.

10. Dans cet exercice (et les suivants), l'espace $\mathbb{R}^3$ est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et toutes les coordonnées sont exprimées dans ce repère.
On considère les points $A(1, 2, 0)$, $B(2, 1, 1)$ et $C(2, 2, 2)$.
Déterminer une équation cartésienne du plan P passant par A, B, C.
Remarque : $M \in P \quad \Leftrightarrow \quad (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AM})$ est liée.

11. Déterminer une équation du plan parallèle à (Oy) passant par les points $A(0, -1, 2)$ et $B(-1, 2, 3)$.
(Oy) est la droite passant par O, de vecteur directeur $\vec{j}$.

12. Soit $A(-1, -1, 1)$, $B(0, 0, 2)$, $C(1, 0, 0)$ et $D(1, -2, -6)$.
Déterminer l'intersection des droites (AB) et (CD).

13. Dans $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$, combien y a-t-il de classes d'équivalence pour la relation "A est équivalente à B" ?

14. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ nilpotente.
Montrer que M est semblable à une matrice triangulaire supérieure de diagonale nulle.
Indication : commencer par montrer qu'il existe $X_1 \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$ non nul tel que $MX_1 = 0$, puis procéder par récurrence.

1. **Exercices sur le PGCD** (questions indépendantes)
   a) Calculer le PGCD de $a = 180$ et $b = 105$ et trouver une relation de Bézout.
   b) Soit (F_n) la suite de Fibonacci, définie par $F_0 = F_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.
   Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $F_n \wedge F_{n+1} = 1$.
   c) Montrer que $\forall a, b \in \mathbb{Z}$, $(2a + 3b) \wedge (3a + 4b) = a \wedge b$.
   d) Soit $a, b \in \mathbb{Z}$. Montrer que si a et b sont premiers entre eux, alors $a + b$ et ab sont premiers entre eux.
   On pourra considérer d, un diviseur commun à $a + b$ et à ab.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Vérifier que $(2n+1)\dbinom{2n}{n} = (n+1)\dbinom{2n+1}{n+1}$, et en déduire que $n+1$ divise $\dbinom{2n}{n}$.

3. **Équation diophantienne linéaire**
   Soit a, b, c des entiers (a et b non nuls). Le but de l'exercice est de décrire la méthode générale permettant de résoudre l'équation $(E) : ax + by = c$, d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$.
   a) Montrer que si (E) admet des solutions, alors $a \wedge b | c$.
   $\boxed{\text{Dans toute la suite, on suppose que } a \wedge b | c.}$
   b) Donner $a', b', c' \in \mathbb{Z}$ avec $a' \wedge b' = 1$, tels que (E) soit équivalente à $a'x + b'y = c'$.
   c) Montrer que (E) admet au moins une solution. Dans la suite, on note (x_1, y_1) une solution de (E).
   d) On considère l'équation $(E_0) : a'x + b'y = 0$.
   Montrer que si (x, y) est solution de (E_0), alors $a' | y$.
   e) Décrire l'ensemble des solutions de (E_0) puis l'ensemble des solutions de (E).
   f) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $(E) : 221x + 247y = 13$

4. **CCINP exo 94**
   a) Énoncer le théorème de Bézout dans $\mathbb{Z}$.
   b) Soit a et b deux entiers naturels premiers entre eux. Soit $c \in \mathbb{N}$.
   Prouver que : $(a|c \quad \text{et} \quad b|c) \quad \Leftrightarrow \quad ab|c$.
   c) On considère le système $(S) : \begin{cases} x \equiv 6 & [17] \\ x \equiv 4 & [15] \end{cases}$ dans lequel l'inconnue x appartient à $\mathbb{Z}$.
      i) Déterminer une solution particulière x_0 de (S) dans $\mathbb{Z}$.
      ii) *Déduire des questions précédentes* la résolution dans $\mathbb{Z}$ du système (S).

5. **Autour du petit théorème de Fermat**
   a) Montrer, en utilisant le petit théorème de Fermat, que $2^{60} - 1$ est divisible par 3, 5, 7, 11, 13, 31, 61.
   b) **Réciproque du petit théorème de Fermat**
   Soit $p \geqslant 2$. Montrer que si $\forall a \in [\![1, p-1]\!]$, $a^{p-1} \equiv 1 [p]$, alors p est premier.

6. **Nombres de Mersenne, nombres parfaits**
   a) **Nombres de Mersenne**
   Soit $a, m, n \in \mathbb{N}^*$ $(a \geqslant 2)$.

i) Montrer que $a-1|a^n-1$.
ii) Montrer que si $m|n$, alors $a^m-1|a^n-1$.
iii) On suppose que $n \geqslant 2$. Montrer que si a^n-1 est premier, alors $a=2$ et n est premier. La réciproque est-elle vraie ?

Un nombre premier de la forme 2^n-1 est appelé nombre premier de Mersenne. On ne sait pas s'il en existe une infinité.
Le plus grand nombre de Mersenne premier connu à ce jour vaut $2^{136279841}-1$, validé en 2024.

b) **Nombres parfaits**.
Un nombre $N \geqslant 2$ est dit **parfait** lorsqu'il est égal à la somme de ses diviseurs stricts (autres que N lui-même).
Par exemple, 6 et 28 sont parfaits ($6=1+2+3$, $28=1+2+4+7+14$).
Soit $M=2^p-1$ un nombre premier de Mersenne, et soit $N=2^{p-1}M$.

i) Donner la liste de tous les diviseurs de N.
ii) Montrer que N est parfait.

On peut montrer que tout nombre parfait pair est de cette forme.
En revanche, on ne connaît aucun nombre parfait impair. Il a été démontré que tout nombre parfait impair est supérieur à 10^{1500}, possède au moins 101 facteurs premiers dans sa décompisition (dont au moins 10 facteurs premiers distincts) et admet un facteur premier supérieur à 10^8 !

7. **Questions indépendantes utilisant la valuation p-adique**
   a) Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}$ la valuation 2-adique de $5^{2^n}-1$.
   Regarder pour $n=0, 1, 2$, conjecturer, faire une récurrence...
   b) Soit $x, y \in \mathbb{N}^*$. Montrer que si $x^2|y^2$, alors $x|y$ en utilisant la valuation p-adique.
   De même, montrer que $(x^2) \wedge (y^2) = (x \wedge y)^2$.
   c) Déterminer le nombre de zéros consécutifs à la fin de l'écriture décimale de 2025!.

8. Montrer que $\dfrac{\ln 3}{\ln 2} \notin \mathbb{Q}$.
   Ce résultat se généralise à $\dfrac{\ln b}{\ln a}$ avec $a, b \geqslant 2$, $a \wedge b = 1$.

9. **Divisibilité**
   Montrer les divisibilités suivantes. On pourra utiliser :
   - La décomposition en facteurs premiers du diviseur.
   - Les congruences.
   - Le petit théorème de Fermat.

   a) $\forall n \in \mathbb{N}$, $6|5n^3+n$.
   b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $30|n^5-n$.
   c) $\forall n \in \mathbb{N}$, $120|n^5-5n^3+4n$.

10. Soit $(G, *)$ un groupe commutatif d'élément neutre e.
    On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall x \in G$, $x^n = e$, avec $n = pq$ (p, q entiers premiers entre eux).
    On pose $H = \{x \in G,\, x^p = e\}$ et $K = \{x \in G,\, x^q = e\}$.
    a) Montrer que H et K sont des sous-groupes de G.
    b) Montrer que $H \cap K = \{e\}$.
    c) Soit $f : \begin{array}{ccc} H \times K & \longrightarrow & G \\ (x,y) & \longmapsto & x * y \end{array}$.
    Montrer que f est bijective.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\Omega = [\![1, n]\!]$ et $\mathbf{P}$ une probabilité sur Ω.
On suppose que $\mathbf{P}(\{i\})$ est proportionnel à i : il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\forall i \in \Omega$, $\mathbf{P}(\{i\}) = \alpha i$.
Déterminer α.

2. Un sac contient 4 boules blanches et 2 boules noires. On tire successivement sans remise 3 boules.
   a) Quelle est la probabilité que la troisième boule soit noire ?
   b) Quelle est la probabilité que la premère boule soit noire sachant que la deuxième est blanche ?
   c) Quelle est la probabilité que parmi les deux premières boules il y ait une blanche et une noire ?

3. **Exo CCINP 105**
   a) Énoncer et démontrer la formule de Bayes pour un système complet d'événements.
   b) On dispose de 100 dés dont 25 pipés (c'est-à-dire truqués).
   Pour chaque dé pipé, la probabilité d'obtenir le chiffre 6 lors d'un lancer vaut $\dfrac{1}{2}$.
      i) On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé et on obtient le chiffre 6.
      Quelle est la probabilité que ce dé soit pipé ?
      ii) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
      On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé n fois et on obtient n fois le chiffre 6.
      Quelle est la probabilité p_n que ce dé soit pipé ?
      iii) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n$. Interpréter ce résultat.

4. **D'après exo CCINP 101**
Dans une zone désertique, un animal erre entre trois points d'eau A, B et C.
À l'instant $t = 0$, il se trouve au point A.
Quand il a épuisé l'eau du point où il se trouve, il part avec équiprobabilité rejoindre l'un des deux autres points d'eau. L'eau du point qu'il vient de quitter se régénère alors.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On note A_n (resp. B_n, C_n) l'événement "l'animal est en A (resp. B, C) après son n^{e} trajet."
On pose $\mathbf{P}(A_n) = a_n$, $\mathbf{P}(B_n) = b_n$ et $\mathbf{P}(C_n) = c_n$.
   a) i) Exprimer, en le justifiant, a_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.
      ii) Exprimer, de même, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.
   b) On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.
      i) Montrer que $\mathrm{Ker}(A + \frac{1}{2} I_3)$ n'est pas réduit à $\{\vec{0}\}$ et en donner une base.
      ii) Montrer que A est semblable à une matrice D diagonale de la forme $D = \mathrm{diag}\left(-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}, \alpha\right)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ à déterminer.
      iii) Déterminer une matrice P inversible telle que $D = P^{-1}AP$.
      Remarque : le calcul de P^{-1} n'est pas demandé.
   c) Montrer comment les résultats de la question b) peuvent être utilisés pour calculer a_n, b_n et c_n en fonction de n.
   Remarque : aucune expression finalisée de a_n, b_n et c_n n'est demandée.

5. Un gardien d'immeuble ivrogne possède un trousseau de 10 clés, dont 2 qui peuvent ouvrir la porte d'entrée.
   Pour tout $i \geqslant 1$, on note A_i : "C'est la i^{e} clé essayée qui ouvre la porte"
   a) Les jours où il n'est pas ivre, il essaie les clés une par une, en écartant les clés déjà essayées, jusqu'à ce qu'il ouvre la porte.
      Calculer dans ce cas la probabilité de A_1 puis de A_2 puis de A_i pour tout $i \in [\![1, 10]\!]$.
   b) Les jours où il est ivre, il ne se rappelle plus quelles clés il a déjà essayées, donc il essaie une clé au hasard jusqu'à ce que la porte soit ouverte.
      Même question.
   c) On sait qu'il est ivre un jour sur trois.
      Quelle est la probabilité qu'il soit ivre, sachant que la porte s'est ouverte au bout de 9 clés essayées ?

6. **Exo CCINP 107**
   On dispose de deux urnes U_1 et U_2.
   L'urne U_1 contient deux boules blanches et trois boules noires.
   L'urne U_2 contient quatre boules blanches et trois boules noires.
   On effectue des tirages successifs dans les conditions suivantes :
   on choisit une urne au hasard et on tire une boule dans l'urne choisie.
   On note sa couleur et on la remet dans l'urne d'où elle provient.
   Si la boule tirée était blanche, le tirage suivant se fait dans l'urne U_1.
   Sinon, le tirage suivant se fait dans l'urne U_2.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n l'événement "la boule tirée au n^{e} tirage est blanche". et on pose $p_n = \mathbf{P}(B_n)$.
   a) Calculer p_1.
   b) Prouver que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $p_{n+1} = -\dfrac{6}{35}p_n + \dfrac{4}{7}$.
   c) En déduire, pour tout entier naturel n non nul, la valeur de p_n.

7. Un livre contient N erreurs. Avant de le publier, l'éditeur décide de le faire relire par r relecteurs (indépendants les uns des autres).
   Chaque erreur (indépendamment des autres) a la probabilité p d'être découverte par un relecteur donné.
   Quelle doit être la valeur minimale de r pour que la probabilité que toutes les erreurs aient été découvertes soit supérieure à 99% ?
   Application numérique : $N = 200$, $p = \dfrac{1}{2}$, réponse : $r \geqslant 15$

8. On considère deux urnes : U_1 et U_2
   Dans chacune des urnes se trouvent initialement une boule blanche et une boule noire.
   On prend une boule dans U_1 et une boule dans U_2, et on les permute. On recommence plusieurs fois...
   On note pour $n \in \mathbb{N}$:
   A_n : Après n permutations, dans U_1 il y a 2 boules blanches.
   B_n : Après n permutations, dans U_1 il y a 1 boule blanche.
   C_n : Après n permutations, dans U_1 il y a 0 boule blanche.
   a) Calculer $\mathbf{P}(A_0)$, $\mathbf{P}(B_0)$, $\mathbf{P}(C_0)$, $\mathbf{P}(A_1)$, $\mathbf{P}(B_1)$, $\mathbf{P}(C_1)$
   b) Exprimer $\mathbf{P}(A_{n+1}|A_n)$, $\mathbf{P}(A_{n+1}|B_n)$.
   c) Soit $a_n = \mathbf{P}(A_n)$, $b_n = \mathbf{P}(B_n)$, $c_n = \mathbf{P}(C_n)$.
      Trouver une relation de récurrence entre $(a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1})$ et (a_n, b_n, c_n) puis calculer les 3 suites.

9. **Fiabilité de test** (exercice type)

On applique un test pour dépister une maladie.

- Le test est positif chez 99% des personnes malades.
- Le test est négatif chez 98% des personnes en bonne santé.
- La maladie atteint une personne sur dix.

i) On choisit une personne au hasard. Quelle est la probabilité qu'elle soit malade sachant que le test est positif ?

ii) Quelle est la probabilité qu'elle soit en bonne santé sachant que le test est négatif ?

1. Calculer les déterminants des matrices suivants et les exprimer sous la forme la plus factorisée possible.

   a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

   b) $A = \begin{pmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{pmatrix}$ $\quad a, b, c \in \mathbb{R}$

   c) $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{pmatrix}$ $\quad a, b, c \in \mathbb{R}$

   d) $A = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ x^3 & 1 & x & x^2 \\ x^2 & x^3 & 1 & x \\ x & x^2 & x^3 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad x \in \mathbb{R}$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Donner $\det(A)$ puis $\operatorname{rg} A$ en fonction de x.

3. Calculer le déterminant et la trace des endomorphismes f suivants :

   a) $f\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x - y, y - z, x + z) \end{array}$

   b) $f\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}_n[X] \\ P & \longmapsto & (XP - P)' \end{array}$

   c) $f\colon \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ M & \longmapsto & M^\top \end{array}$

4. a) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note U la matrice de taille $n \times n$ dont tous les coefficients valent 1.
   Pour $x \in \mathbb{K}$, on pose $B(x) = A + xU$ et $d(x) = \det B(x)$.
   Montrer que la fonction d est affine. *On pourra faire un développement.*

   b) $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux valent a, les coefficients au-dessus de la diagonale ($i < j$) valent b, ceux sous la diagonale ($i > j$) valent c.

      i) Expliciter $d(x)$ puis $\det A$ dans le cas où $b \neq c$.

      ii) Calculer $\det A$ lorsque $b = c$.

5. **D'après CCINP exo 63 (ancien)**
   Soit un entier $n \geqslant 1$. On considère la matrice carré d'ordre n à coefficients réels :

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

   Pour $n \geqslant 1$, on note D_n le déterminant de A_n.

   a) Démontrer que $D_{n+2} = 2D_{n+1} - D_n$.

b) Déterminer D_n en fonction de n.

c) Existe-t-il un vecteur colonne X non nul telle que $A_n X = 0$?

6. **Valeurs propres d'une matrice**

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

a) Montrer l'équivalence entre les deux propriétés suivantes :

i) Il existe $X \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$ **non nul** tel que $MX = \lambda X$.

ii) $\det(M - \lambda I_n) = 0$.

Dans ce cas, on dit que λ est une valeur propre de M.

b) Soit $M = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculer $\det(M - \lambda I_3)$, en déduire les valeurs propres de M (il y en a deux et elles sont entières), puis pour chacune d'entre elles, donner l'ensemble des solutions de l'équation $MX = \lambda X$ puis montrer que M est semblable à une matrice diagonale.

7. Pour les matrices M suivantes, calculer le déterminant puis le rang de $M - \lambda I$ ($\lambda \in \mathbb{R}$).

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \qquad M = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -3 \\ -3 & 2 & 3 \\ 3 & -3 & -4 \end{pmatrix} \qquad M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

8. **Rang de la comatrice**

a) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que si $\operatorname{rg} M = n$, alors $\operatorname{rg}(\operatorname{com} M) = n$.

b) Montrer que si $\operatorname{rg} M \leqslant n - 2$, alors $\operatorname{rg}(\operatorname{com} M) = 0$.

c) Montrer que si $\operatorname{rg} M = n - 1$, alors $\operatorname{rg}(\operatorname{com} M) = 1$.

9. a) Soit $Q, R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $Q + iR$ soit inversible. Montrer qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $Q + xR$ soit inversible.

Indication : que peut-on dire de la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & \det(Q + xR) \end{array}$ *?*

b) Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ deux matrices $\mathbb{C}$-semblables (c'est-à-dire avec une matrice de passage complexe). Montrer qu'elles sont $\mathbb{R}$-semblables.

10. Danc chaque cas, décomposer σ en produit de cycles à supports disjoints et déterminer sa signature :

a) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 5 & 1 & 7 & 6 & 2 & 8 & 4 & 9 \end{pmatrix}$

b) $\sigma = (1 \quad 3 \quad 2) \circ (1 \quad 5 \quad 3)^{-1} \circ (5 \quad 7 \quad 6)^2 \circ (1 \quad 3 \quad 4 \quad 2)$

11. Soit $n \in \mathbb{N}$ impair.

a) Montrer que l'équation $M^2 = -I_n$ n'a pas de solution dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b) Montrer que les matrices antisymétriques de taille n ne sont pas inversibles.

c) Montrer que ces résultats sont faux quand n est pair.

12. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, soit $f_\lambda : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^{\lambda x} \end{array}$

    Montrer **en utilisant le déterminant de Vandermonde** que la famille $(f_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ est libre.

13. $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ désigne l'ensemble des matrices carrées de taille n, à coefficients dans $\mathbb{Z}$ $\quad (n \geqslant 1)$.

    a) Montrer que $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$, $\det M \in \mathbb{Z}$.

    b) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. Montrer que M est inversible **et d'inverse dans** $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ si et seulement si $\det M = \pm 1$.

14. **Ordre d'une permutation**

    a) Soit $\sigma \in S_n$. Montrer que l'ensemble $\{p \in \mathbb{N}^* \,/\, \sigma^p = \mathrm{Id}\}$ est un ensemble non vide.
    Le plus petit élément de cet ensemble est appelé l'ordre de σ.

    b) Quel est l'ordre d'un p-cycle ?

    c) Déterminer l'ordre des permutations σ de l'exercice 10.

15. Soit E un EV de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, et $\mathcal{B}$ une base de E. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

    a) Montrer que l'application

    $$\varphi : \begin{array}{ccl} E^n & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (u_1, \dots, u_n) & \longmapsto & \quad \det_{\mathcal{B}}(f(u_1), u_2, u_3, \dots, u_n) \\ & & + \ \det_{\mathcal{B}}(u_1, f(u_2), u_3, \dots, u_n) \\ & & \quad \vdots \\ & & + \ \det_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, \dots, u_{n-1}, f(u_n)) \end{array}$$

    est n-linéaire alternée.

    b) Montrer que $\varphi = \mathrm{tr}(f) \times \det_{\mathcal{B}}$

16. **Le centre de S_n est trivial pour $n \geqslant 3$**

    Si $(G, *)$ est un groupe, son centre est l'ensemble (noté $Z(G)$) formé des éléments qui commutent avec tout :

    $$Z(G) = \{g \in G \,/\, \forall h \in G,\ h * g = g * h\}$$

    a) Soit $\sigma \in S_n$, et $a, b \in [\![1, n]\!]$ $(a \neq b)$. Montrer que $\sigma \circ \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \circ \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \sigma(a) & \sigma(b) \end{pmatrix}$.

    b) Montrer que si $n \geqslant 3$, alors le centre de $(S_n, \circ)$ est $\{\mathrm{Id}\}$.

17. a) Montrer que toute permutation de S_n est le produit d'au plus $n-1$ transpositions.

    b) Soit $n \geqslant 3$. Montrer que toute permutation paire de S_n se décompose en produit de 3-cycles.

18. L'espace $\mathbb{R}^3$ est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et toutes les coordonnées sont exprimées dans ce repère.
    On considère les points $A(1,2,0)$, $B(2,1,1)$ et $C(2,2,2)$.
    Déterminer une équation cartésienne du plan P passant par A, B, C.
    Remarque : $M \in P \quad \Leftrightarrow \quad (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AM})$ est liée.

1. On considère un dé à 6 faces, truqué de telle sorte que la probabilité d'obtenir un chiffre soit proportionnelle à ce chiffre. Soit X le chiffre obtenu.

   a) Déterminer la loi de X.

   b) Calculer $\mathbf{E}(X)$.

   c) On pose $Y = \dfrac{1}{X}$. Déterminer la loi de Y et $\mathbf{E}(Y)$.

2. Soit $\theta \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right[$, et X une variable aléatoire réelle à valeurs dans $[\![0,3]\!]$, dont la loi de probabilité est définie par $\begin{cases} \mathbf{P}(X=0) = \mathbf{P}(X=3) = \theta \\ \mathbf{P}(X=1) = \mathbf{P}(X=2) = \dfrac{1}{2} - \theta \end{cases}$

   a) On pose $R = X(X-1)(X-2)(X-3)$. Donner la loi de probabilité de R.

   b) Mêmes questions avec $S = \dfrac{(1-X)(2-X)(3-X)}{6}$ et $T = \dfrac{X(3-X)}{2}$.

   c) Calculer $\mathbf{E}(X)$ et $\mathbf{V}(X)$.

3. **CCINP exo 95**
   Une urne contient deux boules blanches et huit boules noires.

   a) Un joueur tire successivement, avec remise, cinq boules dans cette urne.
      Pour chaque boule blanche tirée, il gagne 2 points et pour chaque boule noire tirée, il perd 3 points.
      On note X la variable aléatoire représentant le nombre de boules blanches tirées.
      On note Y le nombre de points obtenus par le joueur sur une partie.

      i) Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.

      ii) Déterminer la loi de Y, son espérance et sa variance.

   b) Dans cette question, on suppose que les cinq tirages successifs se font sans remise.

      i) Déterminer la loi de X.

      ii) Déterminer la loi de Y.

4. **CCINP exo 104**
   Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.
   On dispose de n boules numérotées de 1 à n et d'une boîte formée de trois compartiments identiques également numérotés de 1 à 3.
   On lance simultanément les n boules.
   Elles viennent toutes se ranger aléatoirement dans les 3 compartiments.
   Chaque compartiment peut éventuellement contenir les n boules.
   On note X la variable aléatoire qui à chaque expérience aléatoire fait correspondre le nombre de compartiments restés vides.

   a) Préciser les valeurs prises par X.

   b) i) Déterminer la probabilité $\mathbf{P}(X = 2)$.

      ii) Finir de déterminer la loi de probabilité de X.

   c) i) Calculer $\mathbf{E}(X)$.

ii) Déterminer $\lim_{n\to+\infty} \mathbf{E}(X)$. Interpréter ce résultat.

5. **CCINP exo 109**
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient n boules blanches numérotées de 1 à n et deux boules noires numérotées 1 et 2.
On effectue le tirage une à une, sans remise, de toutes les boules de l'urne.
On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule blanche.
On note Y la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule numérotée 1.

   a) Déterminer la loi de X.
   b) Déterminer la loi de Y.

6. Dans une urne contenant 10 boules portant les numéros 1 à 10, on effectue 3 tirages sans remise.
On note X le plus grand numéro obtenu et Y le plus petit numéro obtenu.

   a) Déterminer la loi de X de deux façons différentes :
      i) Pour $i \in [\![1, 10]\!]$, calculer $\mathbf{P}(X \leqslant i)$ puis en déduire $\mathbf{P}(X = i)$.
      ii) Calculer $\mathbf{P}(X = i)$ directement.
   b) Déterminer la loi de Y.
   c) Montrer que X et $11 - Y$ ont la même loi.
   d) Soit Z le numéro intermédiaire. Quelle est la loi de Z ?

7. **Marche aléatoire**
Une puce se déplace sur un axe, par sauts indépendants et d'amplitude 1, aléatoirement vers la gauche ou vers la droite.
Soit X_n sa position après n sauts (elle commence à la position 0)
Soit Y_n le nombre de fois où elle a sauté vers la droite au cours des n premiers sauts.

   a) Donner la loi de Y_n.
   b) Exprimer X_n en fonction de Y_n.
   c) Donner la loi de X_n.
   d) On suppose n pair, $n = 2m$. Quelle est la probabilité p_n que la puce revienne à son point de départ après n sauts ? Étudier la convergence de la suite (p_n).

8. Une urne contient n boules ; m sont blanches et les autres sont noires ($1 \leqslant m < n$)
On effectue des tirages sans remise jusqu'à épuisement.
On note Y le nombre de tirages effectués jusqu'à ce qu'on ait eu toutes les boules blanches.

   a) Pour $i \in [\![0, n]\!]$, on note X_i le nombre de boules blanches obtenues au cours des i premiers tirages. Quelle est la loi de X_i ?
   b) Exprimer, pour $k \in [\![2, n]\!]$, l'événement $Y \leqslant k$ en fonction de X_k.
   c) En déduire la loi de Y.
   d) On suppose $m = 1$. Donner explicitement la loi de Y.
   e) Même question si $m = 2$.

1. Dans chaque cas, montrer que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire sur E.
   a) $E = \mathcal{M}_{np}(\mathbb{R})$, $\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}\big(A^\top B\big)$ (produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{R})$)
   b) $E = \mathbb{R}[X]$, $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)(1-t^2)\,\mathrm{d}t$
   c) $E = \mathbb{R}^2$, $\langle (x,y),(x',y')\rangle = xx' + yy' + \dfrac{xy' + x'y}{2}$
   d) $E = \mathbb{R}[X]$, $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P(k)Q(k)}{2^k}$

2. Montrer les inégalités suivantes.
   a) $\forall f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, $\displaystyle\int_0^1 t f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\int_0^1 f(t)^2\,\mathrm{d}t}$
   b) $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\operatorname{tr}(A)^2 \leqslant n \operatorname{tr}(A^\top A)$

3. Soit $u_1 = (1,1,1)$, $u_2 = (1,-1,1)$ et $u_3 = (1,0,0)$.
   Vérifier que (u_1,u_2,u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$, et l'orthonormaliser (pour le produit scalaire canonique).

4. Soit $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x + y - z = 0\}$.
   Donner une base orthonormée de F, puis la matrice dans la base canonique de p, la projection orthogonale sur F.

5. **CCINP exo 76**
   Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire $(|)$.
   On pose $\forall x \in E$, $\|x\| = \sqrt{(x|x)}$
   a) i) Énoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
      ii) Dans quel cas a-t-on égalité ? Le démontrer.
   b) Soit $E = \{f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}) \,/\, \forall x \in [a,b],\ f(x) > 0\}$.
      Prouver que l'ensemble $\left\{\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \times \int_a^b \frac{1}{f(t)}\,\mathrm{d}t\ ,\ f \in E\right\}$ admet une borne inférieure m et déterminer la valeur de m.

6. **CCINP exo 81**
   On définit dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'application φ par $\varphi(A,A') = \operatorname{tr}(A^\top A')$, où $\operatorname{tr}(A^\top A')$ désigne la trace du produit de la matrice $A^\top$ par la matrice A'.
   On admet que φ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   On note $\mathcal{F} = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix},\ (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\}$.
   a) Démontrer que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   b) Déterminer une base de $\mathcal{F}^\perp$.

c) Déterminer la projection orthogonale de $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sur $\mathcal{F}^\perp$.

d) Calculer la distance de J à $\mathcal{F}$.

7. **CCINP exo 77**
Soit E un espace euclidien.
   a) Soit A un sous-espace vectoriel de E.
   Démontrer que $(A^\perp)^\perp = A$.
   b) Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
      i) Démontrer que $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.
      ii) Démontrer que $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.

8. Soit E un espace préhilbertien.
Si F et G sont deux SEV de E, on dit que $F \perp G$ lorsque $\forall u \in F,\ \forall v \in G,\ \langle u, v\rangle = 0$
   a) Soit x, y deux vecteurs de E tels que $\forall t \in \mathbb{R},\ \|x\| \leqslant \|x + ty\|$. Montrer que $x \perp y$.
   b) Soit p un projecteur de E qui réduit la norme : $\forall x \in E,\ \|p(x)\| \leqslant \|x\|$.
   Montrer que p est un projecteur orthogonal, c'est-à-dire $\operatorname{Im} p \perp \operatorname{Ker} p$.
   c) Soit s une symétrie de E. Montrer que si s est une isométrie ($\forall x \in E,\ \|s(x)\| = \|x\|$), alors s est une symétrie orthogonale, c'est-à-dire $\operatorname{Ker}(s + \mathrm{Id}_E) \perp \operatorname{Ker}(s - \mathrm{Id}_E)$.

9. Dans $\mathbb{R}^4$, soit $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,/\, x + y + z + t = x - y + z - t = 0\}$.
Déterminer une base orthonormée de F, une base orthonormée de $F^\perp$, puis calculer la distance de $u = (1, 2, 3, 4)$ à F.

10. Calculer $\displaystyle\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_{-1}^{1} (x^2 - ax - b)^2 \,\mathrm{d}x$ en utilisant une projection orthogonale.

11. **Représentation des formes linéaires dans un espace euclidien**
Soit E un espace euclidien.
   a) Pour $v \in E$, on définit l'application "scalaire v" notée $\langle \cdot, v\rangle$ par
   $$\langle \cdot, v\rangle : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ u & \longmapsto & \langle u, v\rangle \end{array}$$
   Vérifier que $\langle \cdot, v\rangle \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$.
   b) Montrer que pour toute $f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$, il existe un unique $v \in E$ tel que $f = \langle \cdot, v\rangle$.
   Indication : on pourra considérer l'application $\varphi : v \longmapsto \langle \cdot, v\rangle$.
   c) Montrer qu'il existe un unique $P \in \mathbb{R}_3[X]$ tel que :
   $$\forall Q \in \mathbb{R}_3[X],\ \int_2^{\pi} \frac{Q(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)(1-t^2)\,\mathrm{d}t$$
   d) Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ Q & \longmapsto & Q(1) \end{array}$
   Montrer que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}[X], \mathbb{R})$ mais qu'il n'existe pas $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que
   $$\forall Q \in \mathbb{R}[X],\ f(Q) = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)(1-t^2)\,\mathrm{d}t$$

12. **d'après CCINP exo 39**
On note ℓ^2 l'ensemble des suites $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des nombres réels telles que la série $\sum x_n^2$ converge.

a) i) Démontrer que, pour $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$ et $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$, la série $\sum x_n y_n$ est convergente.
On pose alors $(x|y) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n y_n$.

ii) Démontrer que ℓ^2 est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites de nombres réels.

Dans la suite de l'exercice, on admet que $(|)$ est un produit scalaire sur ℓ^2.
On suppose que ℓ^2 est muni de ce produit scalaire et de la norme euclidienne associée.

b) On considère l'ensemble F des suites réelles presque nulles, c'est-à-dire l'ensemble des suites réelles dont tous les termes sont nuls sauf peut-être un nombre fini de termes.
Déterminer $F^\perp$ (au sens de $(|)$).
Comparer F et $(F^\perp)^\perp$.

13. **Conditions suffisantes de linéarité**
Soit E un espace préhilbertien, et $f : E \longrightarrow E$.

a) Montrer que si $\forall u, v \in E$, $\langle f(u), v\rangle = \langle u, f(v)\rangle$, alors f est linéaire.

b) Montrer que si $\forall u, v \in E$, $\langle f(u), f(v)\rangle = \langle u, v\rangle$, alors f est linéaire.

1. Une cage contient neuf papillons : trois mâles (deux blancs et un jaune) et six femelles (quatre blanches et deux jaunes). On prend simultanément et au hasard deux papillons.
   Soit X le nombre de papillons mâles que l'on a pris, et Y le nombre de papillons jaunes que l'on a pris.
   Déterminer les lois de probabilités de X, de Y et du couple (X, Y). Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

2. Soit K une variable aléatoire qui suit $\mathcal{U}([\![0, 3]\!])$. On pose $\Theta = K\dfrac{\pi}{2}$ puis $X = \cos\Theta$ et $Y = \sin\Theta$.
   a) Donner la loi de X et de Y, puis du couple (X, Y).
   b) Calculer $\mathbf{cov}(X, Y)$. X et Y sont-elles indépendantes ?

3. **Variables aléatoires de Bernoulli**
   a) Soit X et Y deux variables de Bernoulli, indépendantes, de paramètres respectifs p_1 et p_2.
   Donner la loi de XY, sa variance et son espérance.
   b) Soit Z et T deux variables de Bernoulli.
   Montrer que si Z et T sont de covariance nulle, alors elles sont indépendantes.

4. **Sur les min/max**
   Les deux parties sont indépendantes.
   a) On lance deux dés (à 6 faces). On note X le plus grand chiffre obtenu, et Y le plus petit.
      i) Déterminer la loi du couple (X, Y).
      ii) Déterminer la loi de Y et la loi de X.
      iii) Montrer que X et $7 - Y$ ont la même loi.
   b) Soit n, p deux entiers strictement positifs, et soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires uniformes sur $[\![1, p]\!]$, mutuellement indépendantes.
      i) Soit $Y = \max(X_1, \ldots, X_n)$.
      Déterminer la loi de Y.
      ii) De même, on pose $Z = \min(X_1, \ldots, X_n)$. Déterminer la loi de Z.

5. **Loi trinomiale**
   Une urne contient 2 boules blanches, 3 boules noires et 5 boules rouges. On effectue n tirages avec remise.
   On note X (resp. Y, Z) le nombre de fois où on a obtenu une boule blanche (resp. noire, rouge).
   a) Dans cette partie uniquement, on prend $n = 6$.
      i) Calculer la probabilité d'obtenir dans cet ordre : Blanc, Noir, Noir, Rouge, Rouge, Rouge.
      ii) Calculer la probabilité de l'événement A : "$X = 1 \cap Y = 2 \cap Z = 3$".
   b) Soit i, j, k trois entiers positifs tels que $i + j + k = n$. Calculer la probabilité de l'événement "$X = i \cap Y = j \cap Z = k$".
   c) Déterminer la loi du couple (X, Y) et ses lois marginales.
   d) Soit $j \in [\![0, n]\!]$. Déterminer la loi de X sachant $Y = j$. Reconnaître une loi usuelle.
   e) Soit $T = X + Y$. Déterminer la loi de T.

6. Dans une urne contenant n ($\in \mathbb{N}^*$) boules numérotées de 1 à n, on effectue un tirage. On note X le chiffre obtenu.
   Dans une autre urne contenant X boules (numérotées de 1 à X), on effectue un tirage, et on note Y le chiffre obtenu.

   a) Quelle est la loi de X ?
   b) Déterminer pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ la loi de Y sachant $X = i$.
   c) Donner la loi de Y (on ne cherchera pas à simplifier l'expression).
   d) Calculer $E(Y)$ (l'expression se simplifie).

7. Dans une urne contenant n ($\in \mathbb{N}^*$) boules numérotées de 1 à n, on effectue un tirage. On note X le chiffre obtenu.
   On lance ensuite X fois un dé bien équilibré. On appelle Y le nombre de fois où on a obtenu 6 avec le dé.

   a) Quelle est la loi de X ?
   b) Déterminer la loi jointe de X et Y, puis donner la loi de Y (on ne cherchera pas à simplifier l'expression).
   c) Calculer $E(Y)$ (l'expression se simplifie).

8. **CCINP exo 99**

   a) Rappeler l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
   b) Soit (Y_n) une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, de même loi.
      On pose $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} Y_k$.
      Prouver que : $\forall a \in]0, +\infty[$, $\mathbf{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mathbf{E}(Y_1)\right| \geqslant a\right) \leqslant \frac{\mathbf{V}(Y_1)}{na^2}$.
   c) **Application** : On effectue des tirages successifs, avec remise, d'une boule dans une urne contenant 2 boules rouges et 3 boules noires.
      À partir de quel nombre de tirages peut-on garantir à plus de 95% que la proportion de boules rouges obtenues restera comprise entre 0,35 et 0,45 ?
      Indication : considérer la suite (Y_i) de variables aléatoires de Bernoulli où Y_i mesure l'issue du i^{e} tirage.

1. Calculer les dérivées partielles des fonctions suivantes :

   a) $f(x,y) = \ln(xy^4+1)$

   b) $f(x,y) = \cos(x\sin y)$

2. **CCINP exo 33**

   On pose : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $f(x,y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ et $f(0,0)=0$.

   a) Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

   b) Démontrer que f admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$.

   c) f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$? Justifier.

3. Soit $a, b \in \mathbb{N}^*$.

   On définit f sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^a y^b}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   a) En partant de $\forall u = (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $|x| \leqslant \|u\|$ et $|y| \leqslant \|u\|$, montrer que si $a+b>2$, alors f est continue en $(0,0)$.

   b) Montrer que si $a+b \leqslant 2$, alors f n'est pas continue en $(0,0)$.

   c) Montrer que si $a+b>3$, alors $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ existent et sont continues en $(0,0)$.

4. a) Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x>y\}$. On admet que D est ouvert.

   Existe-t-il des fonctions $f : D \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telles que

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{x}{x-y} + \ln(x-y) - x \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{x}{y-x} \end{cases}$$

   Si oui, les trouver toutes.

   b) Résoudre de même :

$$\begin{cases} f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ \dfrac{\partial f}{\partial x} = 2xy \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = y^2 + x \end{cases}$$

5. On note f la fonction définie sur $]0,+\infty[^2$ par : $f(x,y) = x+y+\dfrac{1}{xy}$.

   a) Justifier que la fonction ln est concave et en déduire que $\forall a,b,c \in]0,+\infty[$, $(abc)^{\frac{1}{3}} \leqslant \dfrac{a+b+c}{3}$.

   b) Démontrer que f admet un unique point critique sur l'ouvert $]0,+\infty[^2$, puis démontrer que f admet un extremum global que l'on déterminera.

6. a) Montrer que l'ensemble $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x > 0\}$ est ouvert.
   b) Plus généralement, montrer que si $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue, alors l'ensemble

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, f(x,y) > 0\}$$

   est ouvert.

7. **Fonction qui admet en un point une dérivée selon tout vecteur mais non continue**
   Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq 0 \text{ et } y = x^2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   Montrer que f n'est pas continue en $(0,0)$ mais que $D_v f(0,0)$ existe pour tout $v \in \mathbb{R}^2$.

8. **Équation d'advection**
   Soit $c > 0$ une constante fixée.
   Le but de l'exercice est de trouver toutes les fonctions $f : (x,t) \longmapsto f(x,t)$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ telles que :

$$(E) : \frac{\partial f}{\partial t} - c\frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

   Pour la résoudre, on fait le changement de variable linéaire $\begin{cases} u = x + ct \\ v = x - ct \end{cases}$ c'est-à-dire $\begin{cases} x = \dfrac{u+v}{2} \\ t = \dfrac{u-v}{2c} \end{cases}$

   Une fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ étant donnée, on définit $g\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (u,v) & \longmapsto & f(x,t) = f\left(\dfrac{u+v}{2}, \dfrac{u-v}{2c}\right) \end{array}$

   Les variables de f seront donc notées x et t, celles de g notées u et v.

   a) Exprimer les dérivées partielles de g en fonction de celles de f.
   b) Montrer que si f est solution de (E), alors il existe une fonction $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,t) = h(x+ct)$$

   c) Donner toutes les solutions de (E).

9. Soit f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = 2x^3 + 6xy - 3y^2 + 2$.
   a) Montrer que f admet deux points critiques. On les notera (x_1, y_1) et (x_2, y_2) avec $x_1 > x_2$.
   b) f admet-elle un extremum local en (x_1, y_1) ? *On pourra considérer $f(x,0)$.*
   c) i) Pour $(h,k) \in \mathbb{R}^2$, on pose $g(h,k) = f(x_2 + h, y_2 + k) - f(x_2, y_2)$. Simplifier $g(h,k)$.
      ii) Pour $(h,k) \in B\big((0,0),1\big)$, donner le signe de $g(h,k)$.
      Indication : montrer que $h^3 \leqslant h^2$.
      iii) f admet-elle un extremum local en (x_2, y_2) ?
      iv) f admet-elle un extremum global sur $\mathbb{R}^2$?
   d) On pose $K = [0,1]^2$ et $C =]0,1[^2$.
      i) Illustrer par un dessin que C est ouvert et que K ne l'est pas.
      ii) Montrer que si $f_{|K}$ admet un extremum, alors cet extremum est atteint sur $K \setminus C$.
      iii) Montrer que $f_{|K}$ admet un maximum et un minimum et préciser en quels points ils sont atteints.

1. Soit $q \in \mathbb{C}$, $|q| < 1$.
   Montrer que la famille $(q^{|n|})_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable, et calculer sa somme.

2. Soit $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$. Justifier l'existence de $S = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}(n+1)z^n$, puis l'expliciter par deux méthodes différentes.

   a) Première méthode : partir de $(n+1)z^n = \sum\limits_{k=0}^{n} z^n$, écrire S comme somme double et sommer par paquets.

   b) Deuxième méthode : considérer $\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} z^n\right)^2$ et faire le produit de Cauchy.

3. **Fonction zêta de Riemann**
   Pour $k \geqslant 2$, on définit $\zeta(k)$ par
$$\zeta(k) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^k}$$
   Calculer $S = \sum\limits_{k=2}^{+\infty}\big(\zeta(k) - 1\big)$
   On l'écrira comme une somme double et on utilisera le théorème de Fubini.

4. Soit $(u_{ij})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ définie par :
$$\forall i,j \in \mathbb{N},\ u_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ -1 & \text{si } i = j+1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
   a) Calculer $\sum\limits_{j=0}^{+\infty}\left(\sum\limits_{i=0}^{+\infty} u_{ij}\right)$

   b) Calculer $\sum\limits_{i=0}^{+\infty}\left(\sum\limits_{j=0}^{+\infty} u_{ij}\right)$

   c) La famille $(u_{ij})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ est-elle sommable ?

5. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour $(i,j) \in \mathbb{N}^2$, on définit
$$u_{ij} = \frac{1}{(i+j+1)^\alpha}$$
   a) En faisant une sommation par paquets avec $I_k = \{(i,j) \in \mathbb{N}^2 \,/\, i+j = k\}$ $(k \in \mathbb{N})$, montrer que la famille $(u_{ij})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable si et seulement si $\alpha > 2$.

   b) Quand $\alpha > 2$, exprimer $\sum\limits_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} u_{ij}$ à l'aide de la fonction ζ.

6. Calculer $S = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\sum\limits_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k!}$

7. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit d_n le nombre de chiffres dans l'écriture décimale de n.
Soit $a \in \mathbb{R}^{*+}$.
Étudier la convergence (et donner la somme, le cas échéant) de $\sum\limits_{n \geqslant 1} u_n$, avec $u_n = a^{d_n}$.

8. **Somme des inverses des nombres premiers**
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note p_n le n^{e} nombre premier par ordre croissant : $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, etc.

   a) Soit $x_1, \ldots, x_n$ des réels dans $]-1, 1[$.
   Montrer que $\prod\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{1 - x_k} = \sum\limits_{(i_1, \ldots, i_n) \in \mathbb{N}^n} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_n^{i_n}$

   b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit
   $$E_n = \left\{ p_1^{i_1} p_2^{i_2} \cdots p_n^{i_n} \,/\, (i_1, \ldots, i_n) \in \mathbb{N}^n \right\}$$
   Montrer que $[\![1, n]\!] \subset E_n$.

   c) Montrer que
   $$\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1 - \dfrac{1}{p_k}} = \sum_{i \in E_n} \frac{1}{i}$$

   d) En déduire que $\prod\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{1 - \dfrac{1}{p_i}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$

   e) En déduire la nature de la série de terme général $\dfrac{1}{p_n}$.