MPSI

Programme de colle - semaine 02 du 22/09/2025 au 28/09/2025

— Les colles sont obligatoires. Un élève ne peut pas changer de groupe sans l'accord du professeur.
— La colle commence par une question de cours ($\leqslant$ 15-20 minutes), puis un exercice de compréhension ou d'application directe, et enfin, des exercices plus variés.
— La question de cours contient une définition et/ou l'énoncé d'une propriété avec la démonstration si elle s'y prête bien.
— Sauf mention explicite du contraire, la démonstration de toute propriété du cours est exigible. Je marque d'un $(*)$ les points bien adaptés à une démonstration.

1 Sommes

- Exercices sur le programme précédent (notamment les sommes géométriques qui seront à savoir en permanence).
- Coefficients binomiaux : définition, propriétés élémentaires $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, etc. Expression explicite de $\binom{n}{1}$, $\binom{n}{2}$, savoir trouver rapidement les suivants. Formule de Pascal (*) et triangle. **Pas de dénombrement ni d'interprétation ensembliste**. Formule du binôme de Newton (*)

2 Dérivation

On fera la chasse aux écritures abusives, du genre "$f(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$", "$\big(f(x)\big)' = \dots$".
Aucune démonstration n'est à savoir - aucun exercice théorique, le but est le calcul pratique avec au préalable la justification de la dérivabilité (si nécessaire).
Les fonctions sont définies sur un intervalle (ou une réunion d'intervalles) et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

- Dérivation. La définition par la limite du taux d'accoissement est à connaître mais l'étude de la dérivabilité ponctuelle n'est pas un objectif de ce chapitre.
- Opérations sur les fonctions dérivables : opérations vectorielles, produit, inverse, quotient, **composée** (à chaque fois, donner un énoncé précis avec des objets définis, des hypothèses et une conclusion ; la formule brute ne vaut rien).
- La dérivée de la réciproque n'a pas été vue.
- Lien entre les variations et le signe de la dérivée **(sur un intervalle I)** :

$$\forall x \in I,\ f'(x) \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ est croissante sur } I$$

  Si $\forall x \in I$, $f'(x) > 0$, alors f est strictement croissante sur I (réciproque fausse).
  Si $f' \geqslant 0$ et f' ne s'annule qu'en un nombre fini de points, alors f est strictement croissante.
- Dérivées successives. Fonction de classe $\mathcal{C}^n$, $\mathcal{C}^\infty$ (seule la définition a été vue. Aucun exercice fait).

3 Trigonométrie réelle

- Définition de sin et cos à partir du cercle trigonométrique. Les propriétés élémentaires des fonctions sin, cos, tan sont admises : parité, périodicité, addition, duplication, dérivée, courbe.
- Équations trigonométriques élémentaires : $f(x) = a$, $f(x) = f(x_0)$, avec $f \in \{\sin, \cos, \tan\}$.
  Inéquations (exemple : $\sin x \geqslant \sin x_0$). *S'aider du cercle trigonométrique.*
- Transformation de $a\cos x + b\sin x$ en $r\cos(x - x_0)$ (poser le problème clairement et expliquer la résolution)
- **Remarque :** Pas de trigonométrie basée sur les complexes cette semaine (linéarisation, sommes trigonométriques, etc)

4 Exercices faits

1. Simplifications d'expression du type

   a) $\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

   b) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k$

   c) $\sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k}$ (2 méthodes vues ; doit être guidé).

2. Montrer que $f : x \longmapsto \sqrt{1-x^2}$ est dérivable sur $[0,1[$ et donner f' (avec une vraie justification de la dérivabilité).

3. Montrer une inégalité à partir des variations.

4. a) Donner l'expression par radicaux de $\sin \dfrac{\pi}{12}$.

   b) Résoudre l'équation $\cos x = \sin(4x)$ dans $\mathbb{R}$

   c) Résoudre l'équation $\sin(nx) = 0$ dans $[0, \pi]$ ($n \in \mathbb{N}^*$ fixé). Combien a-t-elle de solutions ?