MPSI

Programme de colle - semaine 03 du 29/09/2025 au 05/10/2025

Les démonstrations bien adaptées sont marquées par un $(*)$.

1 Les complexes

Dans cette première colle, uniquement des exercices avec des petits calculs de base utilisant la forme algébrique, la forme exponentielle ou l'angle moitié.

- Forme algébrique d'un complexe. Partie réelle, imaginaire.
- Opérations de base : somme, produit, inverse, conjugué.
- Module. Propriétés : module d'un produit (*), quotient. Inégalité triangulaire (*), cas d'égalité.
- Exponentielle d'un imaginaire pur, $e^{i(\theta+\theta')} = \dots$, formules d'Euler, de Moivre.
- Argument, exponentielle d'un complexe quelconque (pas d'exercice fait). Forme trigonométrique (ou exponentielle) d'un complexe non nul.
- Angle moitié, mise sous forme trigonométrique de $1 \pm e^{i\theta}$ ou $e^{ia} \pm e^{ib}$: le résultat n'est pas à connaître par cœur mais à savoir retrouver rapidement.
- **NOTIONS PAS ENVORE VUES :** linéarisation, antilinéarisation, calcul de $\sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$, $\sum_{k=0}^{n} \sin(kx)$ et autres sommes, racines carrées sous forme algébrique, équation du second degré à coefficients complexes, racines n^{es}.

2 Primitives et intégrales

Donner à tout le monde un petit calcul d'intégrale (IPP ou changement de variable) ou simplement une recherche de primitive.

- Toute fonction continue sur un intervalle, à valeurs dans $\mathbb{R}$ admet des primitives (admis). Description de l'ensemble des primitives d'une fonction sur un intervalle, connaissant l'une d'entre elles.
- Brève extension des notions de continuité, dérivabilité, primitive aux fonctions à valeurs complexes. Dérivée de $t \longmapsto e^{mt}$ $(m \in \mathbb{C})$, utilisation pour trouver des primitives de $t \longmapsto e^{\alpha t}\cos(\beta t)$ ou $e^{\alpha t}\sin(\beta t)$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
- Définition de l'intégrale : si f est continue sur I (intervalle) et $a, b \in I$, on pose $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$, F étant une primitive de f. Cette définition est cohérente.
  Avoir le réflexe de revenir à la définition si on ne sait pas quoi faire.
- Propriétés élémentaires de l'intégrale : relation de Chasles, linéarité, positivité (*), croissance.
  Si $a \leqslant b$, alors $\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$ (*)
- Théorème fondamental de l'intégration (*) : $x \longmapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de f qui s'annule en a.
- Intégration par parties (*). Changement de variable (*).
- Sur un exemple, dérivation de $x \longmapsto \displaystyle\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$ (formule pas au programme mais avoir le réflexe immédiat d'introduire une primitive).
- **PAS ENCORE VU :** Primitive de $f\,:\,t \longmapsto \dfrac{at+b}{t^2+ct+d}$.

3 Exercices faits

1. Vrai ou faux ?

   a) $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \qquad (a+ib)+i(a-2ib)=0 \Rightarrow \begin{cases} a+ib &= 0 \\ a-2ib &= 0 \end{cases}$

   b) $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \qquad (a+ib)+i(a-ib)=0 \Rightarrow \begin{cases} a+ib &= 0 \\ a-ib &= 0 \end{cases}$

2. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On considère l'équation $(E)\ :\ \dfrac{1+iz}{1-iz} = e^{i\theta}$, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.
   Résoudre (E). On donnera le nombre de solutions en fonction de θ et on simplifiera au maximum les solutions.

3. Calculer les intégrales suivantes :

   a) $\displaystyle\int_0^2 2^x \,\mathrm{d}x$

   b) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln x}{x} \,\mathrm{d}x$

   c) $\displaystyle\int_0^\pi |\cos x| \,\mathrm{d}x$

   d) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{1+\sqrt{x}} \,\mathrm{d}x$ (faisant un changement de variable).