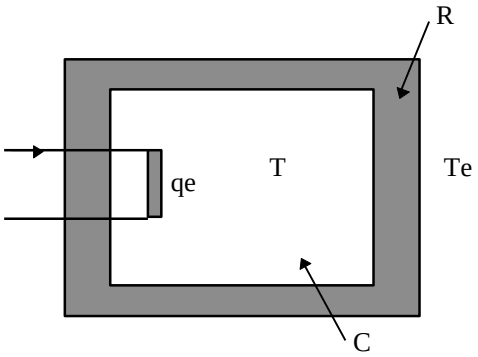
Exercice : Enceinte chauffée

On donne la modélisation simplifiée d'une enceinte chauffée :



A l'intérieure de l'enceinte fermée, la température T est supposée homogène.
La température extérieure Te est supposée constante (Te =10 °C).
C est la capacité calorifique de l'enceinte (C=2000 J/°C).
R est la résistance thermique de l'enceinte (R=0.1 °C/W).
qe est un flux de chaleur apporté à l'enceinte pour élever sa température.
qs est le flux de chaleur perdu par conduction thermique à travers les parois de l'enceinte.

On donne les équations suivantes :

$$T(t) = Te + \frac{1}{C}\int_0^t (qe(t) - qs(t))dt \ ;$$

$$qs(t) = \frac{1}{R}(T(t) - Te).$$

On note T(p), Qs(p) et Qe(p), les transformées de LAPLACE des grandeurs T(t) et qs(t) et qe(t).
Toutes les conditions initiales sont nulles sauf T(O)=Te.
On pose s(t)=T(t)-Te.

Question 1 :

Déterminer la fonction de transfert F(p) telle que : $S(p) = F(p)Qe(p)$ dans le domaine de LAPLACE.
Donner ses paramètres caractéristiques.

Question 2 :

Déterminer la réponse T(t) à une entrée échelon de la forme :
qe(t)=qo.u(t) avec qo=500 W.
Tracer l'allure de la réponse en indiquant ses différentes caractéristiques (asymptotes à t=0 et à l'infini, temps de réponse).

On suppose que l'on a atteint la valeur finale $T(\infty)$. On coupe l'alimentation en chaleur → qe=0 W.

Question 3 :

Donner la réponse T(t).
Tracer son allure en indiquant ses principales caractéristiques.

Question 4 :

Déterminer la réponse T(t) à une entrée rampe de la forme : qe(t)=a.t.u(t) avec a=50 W/s.
Tracer l'allure de la réponse en indiquant ses différentes caractéristiques (asymptotes à t=0 et à l'infini).

Corrigé

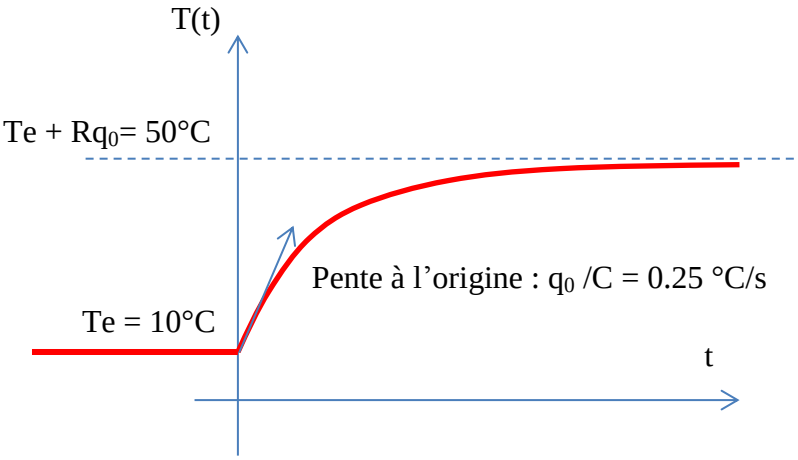
Q1 : $T(t)-Te=\frac{1}{C}\int_0^t (qe(t)-qs(t))dt$ d'où $s'(t)=\frac{1}{C}(qe(t)-qs(t))=\frac{1}{C}\left(qe(t)-\frac{1}{R}(s(t))\right)$

D'où l'équa diff : $RCs'(t)+s(t)=Rqe(t)$ ce qui donne : $F(p)=\frac{R}{RCp+1}$ (C.I. = 0 car s(0)=T(0)-Te=0)

Fonction de transfert d'ordre 1 de gain statique K = R et de constante de temps $\tau = RC$.

Q2 : $S(p)=\frac{R}{RCp+1}.\frac{q_0}{p}=\frac{\frac{Kq_0}{\tau}}{\left(p+\frac{1}{\tau}\right)p}=\frac{A}{p+\frac{1}{\tau}}+\frac{B}{p}=\frac{-Kq_0}{p+\frac{1}{\tau}}+\frac{Kq_0}{p}$ d'où $s(t)=Kq_0(1-e^{-t/\tau})u(t)$

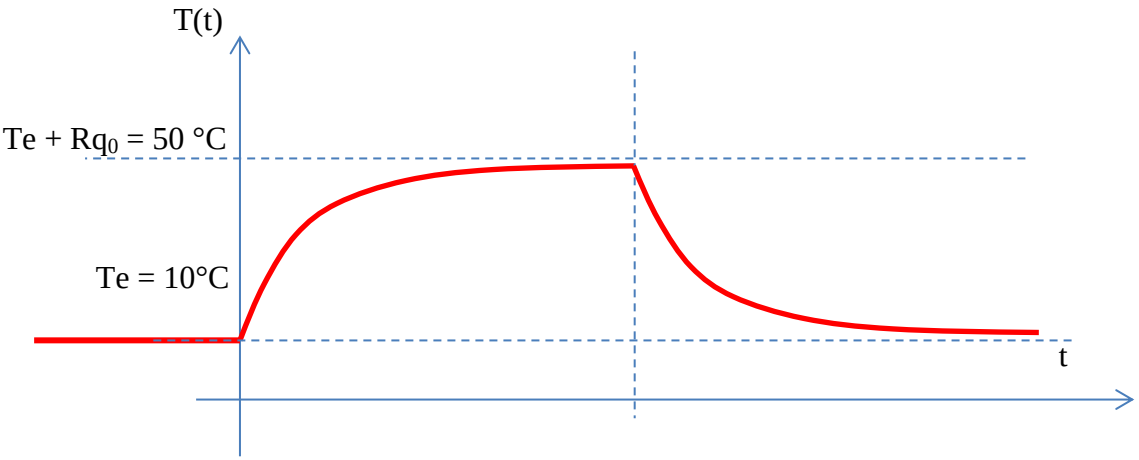
D'où $T(t)=s(t)+Te=Te+Rq_0(1-e^{-t/\tau})u(t)$

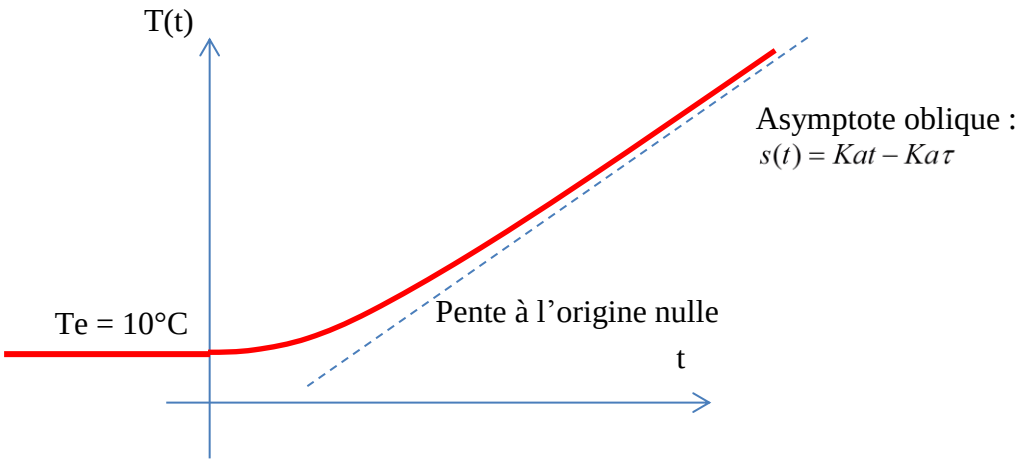


Q3 :

L'équa diff devient : $RCs'(t)+s(t)=0=\tau s'(t)+s(t)$. D'où $\tau(pS(p)-s'(0))+S(p)=0$ (C.I. non nulles. s'(0)=Rq0)

D'où : $S(p)=\frac{\tau Rq_0}{1+\tau p}=Rq_0\frac{1}{\frac{1}{\tau}+p}$ ce qui donne : $s(t)=Rq_0e^{-t/\tau}$ d'où $T(t)=s(t)+Te=Te+Rq_0e^{-t/\tau}$



Q4 : $F(p)=\frac{R}{RCp+1}$ d'où $S(p)=\frac{R}{RCp+1}.\frac{a}{p^2}=\frac{\frac{Ka}{\tau}}{\left(p+\frac{1}{\tau}\right)p^2}=\frac{A}{p+\frac{1}{\tau}}+\frac{B}{p}+\frac{C}{p^2}=\frac{Ka\tau}{p+\frac{1}{\tau}}+\frac{Ka}{p^2}-\frac{Ka\tau}{p}$

D'où $s(t)=Ka(t-\tau+\text{æ}e^{-t/\tau})u(t)$