MPSI

Programme de colle - semaine 04 du 04/10/2025 au 12/10/2025

Les démonstrations bien adaptées sont marquées par un $(*)$.

1 Les complexes

- Notions de base sur les complexes (opérations, forme trigonométrique, angle moitié)
- Transformations trigonométriques (linéarisation, antilinéarisation, transformation de somme en produit).
  Calcul de $\sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$ et $\sum_{k=0}^{n} \sin(kx)$ (transformation de ces sommes en une expression réelle explicite).
  Pour toutes ces transformations, il n'y a pas de formule à connaître, mais la méthode doit être connue.
- Racines carrées d'un complexe : définition et calcul (sous forme algébrique) $(*)$. Tout complexe non nul a deux racines carrées opposées.
  Équation du second degré à coefficients complexes $(*)$.
- Racines n^{es} d'un complexe ($n \in \mathbb{N}^*$) : définition et expression $(*)$.
  Tout complexe non nul admet exactement n racines n^{es}.
  Racines n^{es} de l'unité. Notation $\mathbb{U}_n$.
- **À titre indicatif** (vu en cours mais ne pas interroger dessus) : Utilisation des complexes en géométrie.
  Interprétation du module et de l'argument de $\dfrac{c-a}{b-a}$. Caractérisation de l'alignement et de l'orthogonalité.
  Transformation $z \longmapsto az + b$ ($a \in \mathbb{C}^*$), interprétation géométrique. Cas particuliers $a = 1$, $a \in \mathbb{U} \setminus \{1\}$, $a \in \mathbb{R}^*$.

2 Primitives et intégrales

- Questions de cours sur le programme précédent (positivité, valeur absolue de l'intégrale, définition de l'intégrale par primitive, théorème fondamental, etc) : **pas de démonstration**, mais on attend un énoncé clair.
- Exercices sur le programme précédent, en commençant par quelque chose de simple (par exemple, donner un changement de variable).
- Primitive de $f\ :\ t \longmapsto \dfrac{at+b}{ct+d}$, avec $(a, b, d, c) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^*$.
- Primitive et intégrale de $f\ :\ t \longmapsto \dfrac{at+b}{t^2+ct+d}$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.
  La fonction arctan a été définie spécialement pour l'occasion en tant que primitive de $x \longmapsto \dfrac{1}{x^2+1}$ qui s'annule en 0 (connaître son expression sous forme intégrale).
  La relation $\forall x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, $\arctan(\tan x) = x$ a été vue $(*)$, uniquement pour calculer des valeurs particulières d'arctan. **L'étude de la fonction** arctan **n'est pas un objectif de cette colle.**

3 Exercices faits

1. a) Donner une primitive de $t \longmapsto \dfrac{1}{1-t^2}$ (ensemble à choisir).

   b) Soit $f : x \longmapsto \displaystyle\int_x^{2x} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$. Parité, variations de f ?

2. a) Linéariser $\sin^5(x)$.

   b) Déterminer une fonction P telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos(5x) = P(\cos x)$.

3. **Banque CCINP exercice 84**

   a) Donner la définition d'un argument d'un nombre complexe non nul (on ne demande ni l'interprétation géométrique, ni la démonstration de l'existence d'un tel nombre).

   b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner, en justifiant, les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^n = 1$ et préciser leur nombre.

   c) En déduire, pour $n \in \mathbb{N}^*$, les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $(z+i)^n = (z-i)^n$ et démontrer que ces nombres sont réels.

   Ne pas passer beaucoup de temps sur les 2 premières questions !

4. **Banque CCINP exercice 89**
   Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. On pose $z = e^{i\frac{2\pi}{n}}$.

   a) On suppose $k \in [\![1, n-1]\!]$.
   Déterminer le module et un argument du complexe $z^k - 1$.

   b) On pose $S = \sum\limits_{k=0}^{n-1} |z^k - 1|$. Montrer que $S = \dfrac{2}{\tan \frac{\pi}{2n}}$.