

DS N°1

- Durée 2 heures
- Calculatrices autorisées
- Aucun document autorisé
- Le devoir comporte un problème
- Les questions de la partie V du problème sont en bonus. Elles ne seront abordées qu'après avoir traité toutes les questions précédentes.
- Vous disposez des annexes sur les transformées de Laplace et la décomposition en éléments simples en fin de sujet.

Problème : Imprimante Zuta

I Mise en situation

I.1 Contexte

Pour les travailleurs nomades, une imprimante portable est nécessaire : commerciaux qui doivent rédiger des contrats chez le client, cadres en déplacement qui doivent travailler à l'hôtel... On se propose d'étudier la dernière née : l'imprimante de poche ZUtA.

I.2 Présentation de l'imprimante

Une imprimante classique combine le mouvement de la tête d'impression, de gauche à droite, à celui de la feuille de papier, de haut en bas. ZUtA Labs, une start-up israélienne, s'est écartée de cette idée : seule l'imprimante est en mouvement ; la feuille reste immobile. L'imprimante devient ainsi un robot miniature qui se déplace sur une page pour y déposer de l'encre.

Ce produit a été primé au CES 2015 « Best of innovation » dans la catégorie Computer accessories.

I.3 Eléments constitutifs

Pour réduire au maximum son encombrement, l'imprimante de poche de ZUtA Labs s'est débarrassée de presque tous les composants d'une imprimante traditionnelle. Elle n'a conservé que la partie la plus importante : la tête d'impression. C'est un procédé jet d'encre de type goutte à la demande avec procédé d'éjection piézo-electrique : le réservoir d'encre est en contact avec un

crystal piézo-electrique dont la paroi se déforme (très légèrement, de l'ordre du micromètre) sous les impulsions électriques. Cela crée une surpression et donc l'éjection d'une goutte via la buse de la tête d'impression.

La partie robotique est quant à elle minimisée au strict nécessaire. Dans cette première version, il n'y a par exemple pas de capteur de stabilisation. La surface d'impression doit donc être parfaitement plane, sans bosse, ni inclinaison.

Le diagramme de définitions de blocs ci-après présente l'architecture de l'imprimante.



Figure 1 : impression nomade

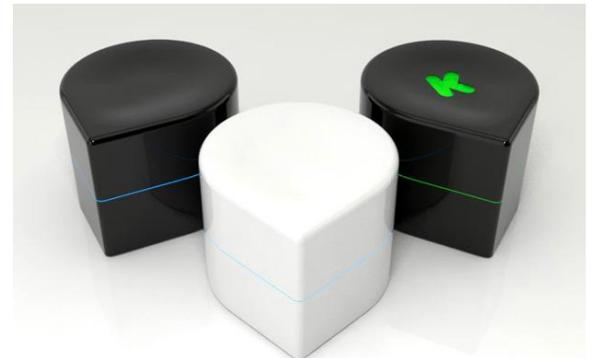


Figure 2 : L'imprimante ultraportable ZUtA

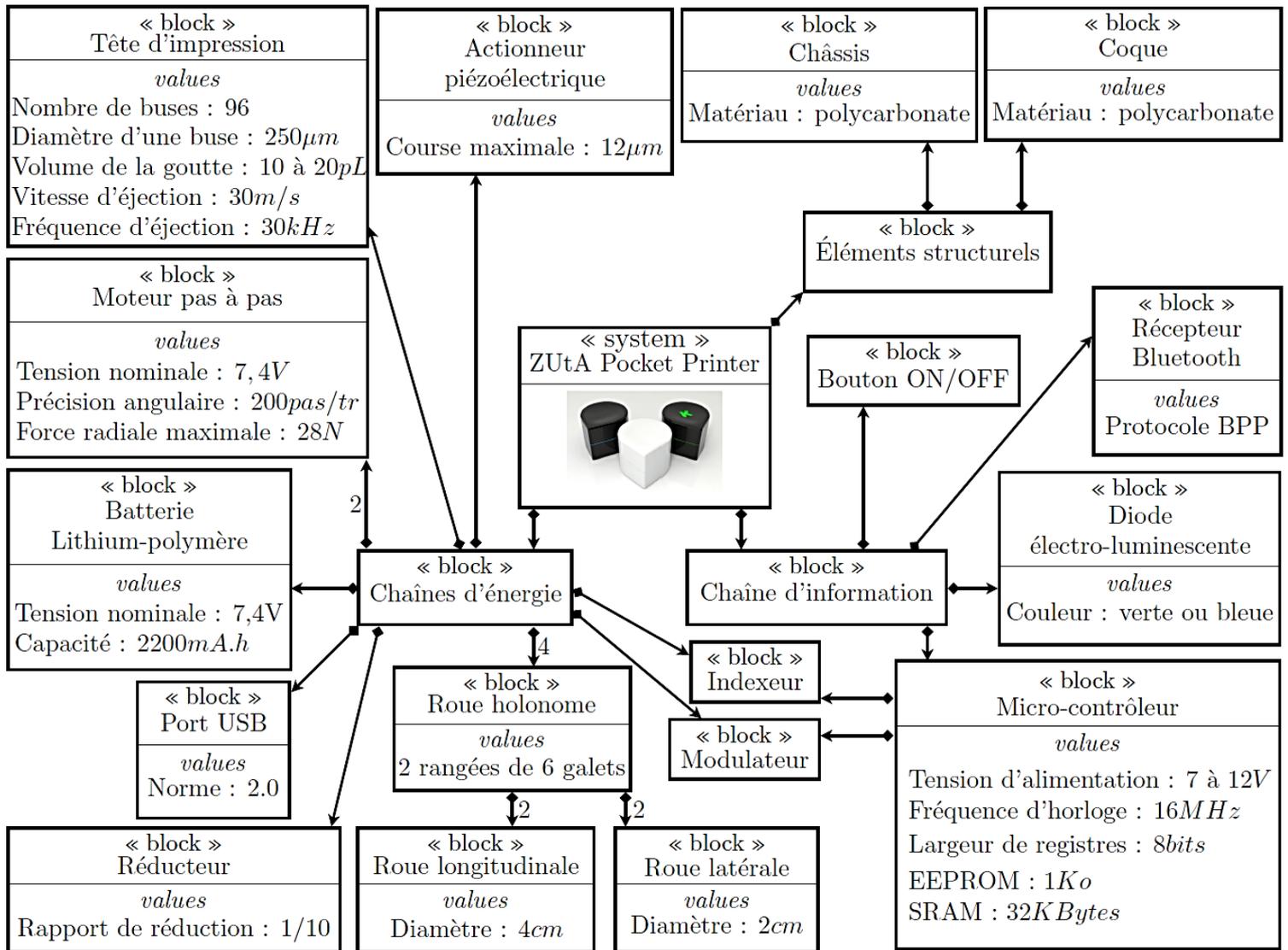


Figure 3 : Diagramme de définitions de blocs

I.4 Fonctionnement

L'imprimante est activée via un bouton situé derrière une languette, sous l'appareil. S'y trouvent également l'accès à la cartouche d'encre pour son remplacement et au connecteur USB pour le rechargement de la batterie.

L'extrémité pointue est conçue pour indiquer où positionner l'imprimante sur la page. Il suffit de la placer en haut à gauche d'une feuille (cf. figure 1), puis de lancer, via une application dédiée, l'impression du document depuis son ordinateur, son smartphone ou sa tablette.

Le robot se met alors en action. Quatre roues omnidirectionnelles, dites aussi roues holonomes, lui permettent de tourner et de se déplacer dans toutes les directions. On les aperçoit sur la figure 4.

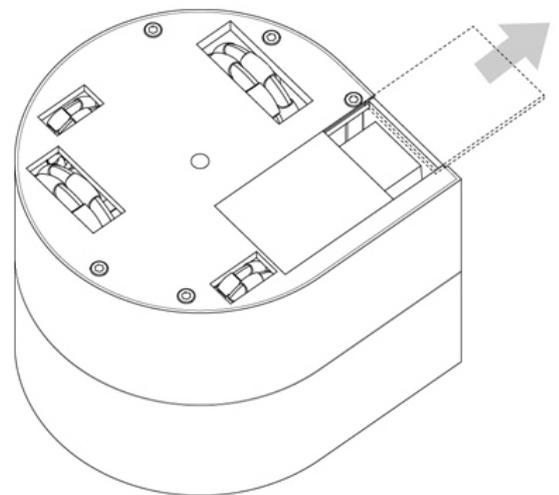


Figure 4 : Vu de dessous

Ce type de roue est très utilisé en robotique. Elle se compose de galets, disposés sur deux rangées. Par exemple, sur la photographie ci-contre, on retrouve huit galets par rangée, soit seize galets. Chaque galet peut tourner sur son axe, limitant les glissements entre la roue et le sol lorsque le robot ne se déplace pas dans la direction de cette roue. Ainsi, un robot holonome va être capable de se déplacer de façon latérale, sans changer la direction des roues !



Figure 5 : Roue autonome

Alors qu'un robot non-holonome, utilisant des roues normales, ne dispose que de deux des trois degrés de liberté contrôlables : le déplacement avant/arrière et la rotation.

L'imprimante de poche ZUtA peut se déplacer le long d'une ligne (déplacement longitudinal, dans la largeur de la feuille) puis changer de ligne (déplacement latéral, dans la longueur de la feuille), tout en restant parfaitement positionnée : le texte sera bien parallèle d'une ligne à l'autre.



Figure 6 : imprimante en action

Q1. A partir du diagramme de définition de blocs donné figure 3, compléter les chaînes fonctionnelles de la figure du document réponses en :

- précisant les composants techniques manquants dans les blocs ;
- précisant les informations entrant dans la chaîne d'informations ;
- reliant les chaînes entre elles via les « ordres ».

I.5 Performances et cahier des charges

Exigences	Critère		Niveau	Limite
Être portable	Masse (g)		350	maxi
	Dimensions (cm)	largeur	8	maxi
		longueur	8	maxi
		hauteur	6	maxi
Réaliser une impression assez rapide et d'assez bonne qualité	Capacité d'impression sur format A4 (page/min)		1	mini
	Qualité d'impression (dpi)	latérale	96	mini
		longitudinale	192	mini
Gérer différents formats d'impression	Format du papier		A0 à A5	-
Posséder une bonne autonomie	Temps d'utilisation (min)		50	mini
	Temps de rechargement (h)		3	maxi
	Nombre de pages A4 imprimables		1000	mini
Se recharger de façon compatible avec un mode nomade	Prise pour chargement		Micro USB	-
Posséder une connexion sans fil	Type de connexion		Bluetooth	-
	Profil d'application		BPP	-
Être compatible avec les principaux OS	Types de système d'opération		Android, Linux, OSX, Windows, iOS	-
S'adapter aux cartouches standard	Type de cartouche		HP	-
Être résistant aux chocs	Matériau de la coque		Polycarbonate	-
Être esthétique	Couleurs		Noir/Blanc	-
	Matériau extérieur		Silicone	-
Limiter l'impact environnemental	Type de batterie		Lithium polymère	-

Tableau 1 : Extrait du cahier des charges

II Validation de la qualité d'impression latérale

Objectif : on se propose dans cette partie de valider le choix réalisé par le constructeur pour la tête d'impression vis-à-vis de la précision latérale annoncée dans le cahier des charges.

II.1 Qualité d'impression

La qualité d'impression est principalement définie par la résolution en points par pouce (ou dpi pour dot per inch) : c'est la densité de points qui peuvent être imprimés dans un pouce pour former un texte ou un graphisme imprimé. Plus il y a de points par pouce, plus la résolution de l'image imprimée est élevée. Un pouce vaut 2,54cm.



Figure 7 : illustration de la résolution d'impression

Pour une imprimante jet d'encre, le nombre de dpi qui sont perpendiculaires au sens du déplacement du support imprimé (déplacement latéral) est fixe et directement lié au nombre de buses par pouce que comporte la tête d'impression.

II.2 Détermination du diamètre maximal des buses et validation du choix technologique

Q2. Relever la résolution latérale cherchée dans le cahier des charges et le nombre n_b de buses présentes par tête d'impression dans le diagramme de définition de blocs.

Par construction, les buses possèdent forcément un espacement entre elles. On l'estime à 10 micro mètres : $e = 10 \mu m$. On note ϕ_b le diamètre d'une buse.

Q3. Déterminer alors le diamètre maximal $\phi_{b,max}$ d'une buse permettant de respecter la résolution latérale annoncée et conclure sur Les buses choisies vis-à-vis du cahier des charges ?

III Détermination de la capacité d'impression

Objectif : On se propose dans cette partie de valider la capacité d'impression annoncée dans le cahier des charges.

III.1 Hypothèses de l'étude

On se place dans un cas classique de document à imprimer : un texte, rédigé sous le logiciel Word avec les réglages par défaut suivants : format A4 (21cm *29,7cm), marges de 2,5cm, police Times New Roman, taille des caractères de 12 pt, intervalle simple (cf. figure 8 (gauche)). Ce qui donne lieu à 50 lignes de texte. Puisque l'imprimante étudiée possède deux têtes d'impression, deux lignes peuvent être imprimées simultanément, donnant lieu à la trajectoire définie sur la figure 8 (droite).

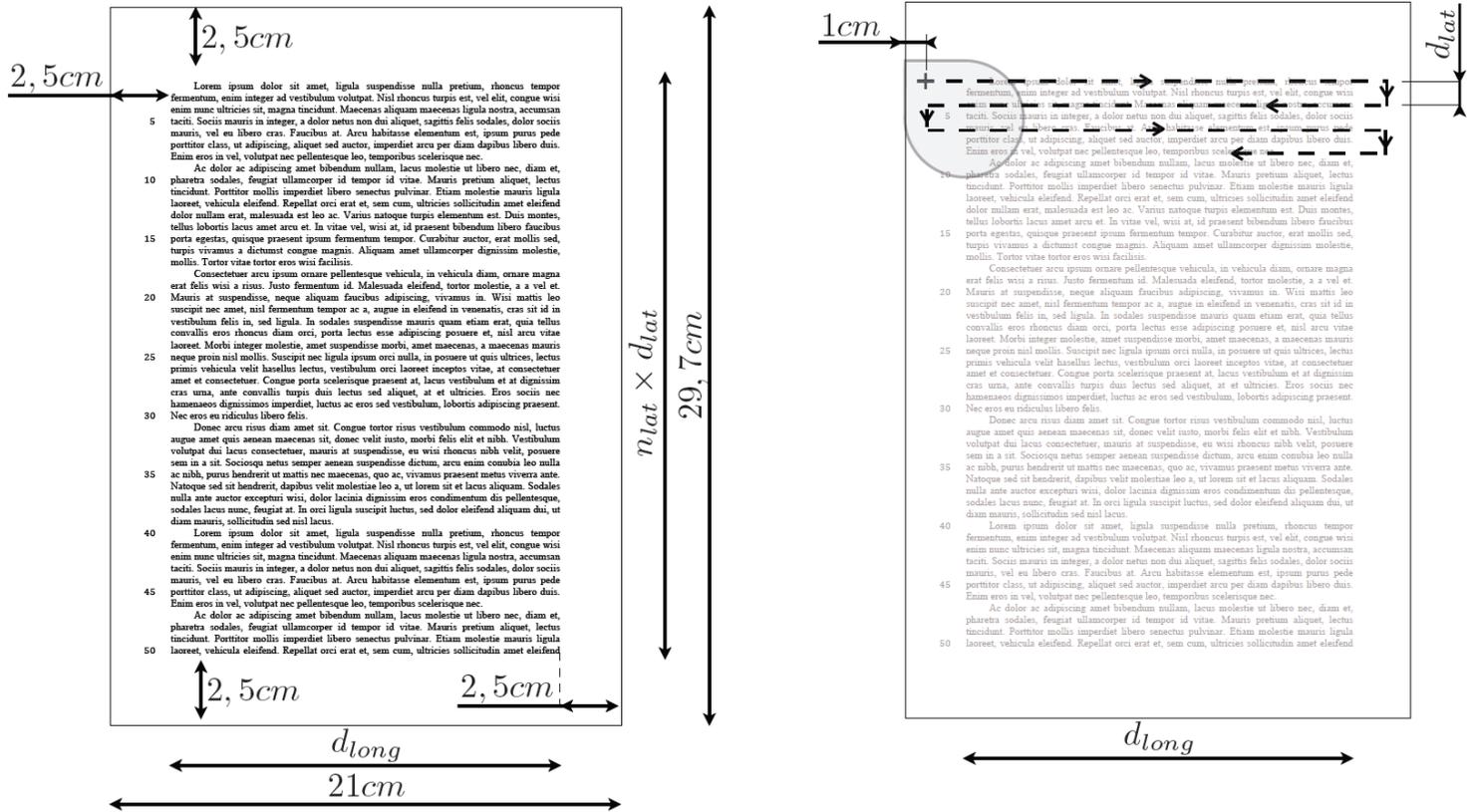


Figure 8 : Document de références (à gauche) et début du trajet (à droite) de l'une des têtes d'impression (représentée par + en position initiale)

On appelle déplacement longitudinal le déplacement de gauche à droite (dans la largeur de la feuille) et déplacement latéral celui de haut en bas (dans la longueur de la feuille).

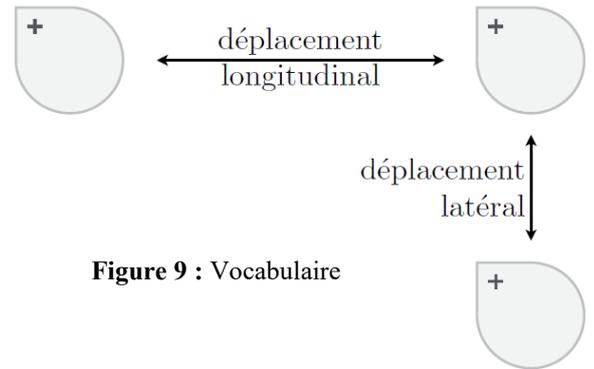


Figure 9 : Vocabulaire

III.2 Etude des déplacements et estimation de la durée d'impression d'une page A4

Q4. D'après la figure 8, combien de déplacements longitudinaux devra parcourir le robot pour imprimer un document de ce type ? Quel nombre n_{lat} de déplacements latéraux d_{lat} faut-il donc effectuer pour imprimer ce document ? On déduire la durée totale t_{lat} mise par le robot pour effectuer l'ensemble des déplacements latéraux sachant qu'on estime à 0,3 s le temps mis pour réaliser le déplacement latéral d_{lat} entre deux lignes.

En tenant compte du format et des marges, la distance d_{long} correspondant à la longueur d'une ligne de texte vaut : $d_{long} = 16\text{ cm}$

On suppose le robot aligné sur le bord gauche de la feuille et la tête d'impression située à 1cm de ce bord (cf. figure 8). On prend cette position comme position initiale pour l'étude.

On cherche à réaliser un déplacement à vitesse constante du robot sur la partie imprimable de la feuille. On retient alors le modèle suivant pour le déplacement longitudinal sur une ligne (cf. figure 10) :

- Une première phase consiste en une accélération constante a (en ms^{-2}), dans la marge de gauche, jusqu'à atteindre la vitesse v_{max} compatible avec une impression de texte ;
- la deuxième phase est la phase d'impression à la vitesse constante $v_{max} = 0,12 \text{ ms}^{-1}$ sur la distance $d_{long} = 16 \text{ cm}$. Cette valeur est retenue suite à une étude, non menée ici, qui permet d'obtenir la résolution d'impression longitudinale recherchée de 192 dpi ;
- une troisième phase permet le freinage à décélération constante $-a$ en fin de ligne donc dans la marge de droite. Le robot pourra ensuite se déplacer latéralement pour imprimer la ligne suivante (non étudié dans cette partie).

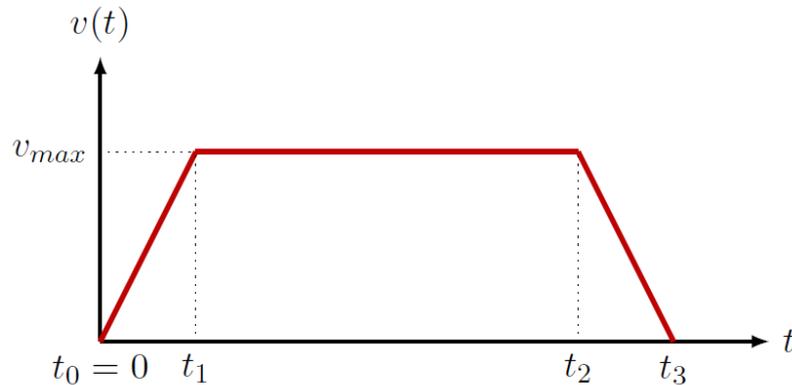


Figure 10 : Evolution temporelle retenue de la vitesse lors du déplacement longitudinal correspondant à l'impression d'une ligne de texte

On considère les conditions initiales nulles : à $t_0 = 0 \text{ s}$, la vitesse et la position du robot sont nulles.

On rappelle les équations de la cinématique (mouvement uni axial rectiligne) associées au modèle étudié :

« la vitesse est la dérivée par rapport au temps de la position » : $v(t) = \frac{d}{dt}x(t)$

« l'accélération est la dérivée par rapport au temps de la vitesse » : $a(t) = \frac{d}{dt}v(t)$

Q5. Déterminer l'expression de la vitesse en fonction du temps, $v(t)$, lors de la première phase ($t \in [t_0; t_1]$). En déduire une expression de v_{max} en fonction de a et de t_1 .

Q6. Déterminer l'expression de la position en fonction du temps, $x(t)$, lors de cette même phase ($t \in [t_0; t_1]$). En déduire une expression de l'accélération a en fonction de la position $x(t_1)$ du robot à l'instant t_1 et de la vitesse maximale v_{max} .

Q7. Combien doit valoir $x(t_1)$ pour que les marges soient respectées, c'est-à-dire que le robot ait atteint la vitesse maximale au bon endroit ? On note $x(t_1)_{max}$ cette valeur, cas limite permettant de respecter l'impression du document. En déduire la valeur numérique a_{min} de l'accélération correspondant à ce cas limite.

Q8. En fonction de v_{max} , $x(t_1)$ et d_{long} , déterminer une expression analytique de la durée $t_{long} = t_3 - t_0$ mise pour parcourir la distance nécessaire à l'impression d'une ligne. Faire l'application numérique pour le cas limite cité ci-avant.

Dans le cas le plus défavorable, toutes les lignes contiendront du texte à imprimer sur toute leur longueur (pas d'alinéa, pas de retour à la ligne). On considère donc que tous les déplacements longitudinaux sont conformes à l'étude menée.

Q9. Estimer alors la durée t_{tot} de l'impression d'une page A4 telle que présentée dans le document de référence, figure 8. Cette valeur satisfait-elle le cahier des charges ?

IV Etude de l'automatisation du déplacement longitudinal

Objectif : on propose dans cette partie de valider le choix technologique fait vis-à-vis de la valeur d'accélération a_{min} déterminée précédemment.

IV.1 Description du système

A partir des informations reçues par Bluetooth, le microcontrôleur élabore une consigne de vitesse latérale $v_c(t)$. L'**indexeur** en déduit le signal de commande en tension $u_m(t)$ et le transmet au **moteur**. Le rotor de celui-ci entraîne alors l'entrée d'un **réducteur** à la vitesse de rotation $\omega_m(t)$. Le réducteur réduit cette vitesse de rotation et transmet ainsi aux **roues** une vitesse de rotation $\omega_r(t)$, permettant le déplacement du robot à une vitesse $v(t)$.

Q10. A partir du texte précédent, compléter le schéma-blocs fonctionnel du contrôle en vitesse longitudinale présenté dans le document réponses. Préciser les unités (Système International) des grandeurs physiques. Peut-on parler de système asservi ? Justifier.

IV.2 Modélisation du système

IV.2.1 Ensemble < indexeur + moteur >

L'ensemble <indexeur + moteur> peut être modélisé, sous l'hypothèse faite ici d'une fréquence de commande suffisamment élevée, par un système du premier ordre d'équation différentielle : $\tau_m \frac{d}{dt} \omega_m(t) + \omega_m(t) = K_m v_c(t)$ donnant une fonction de transfert Laplacienne : $H_m(p) = \frac{\Omega_m(p)}{V_c(p)} = \frac{K_m}{1 + \tau_m p}$.

Q11. Comment nomme-t-on τ_m ? Quelle est son unité (S.I.) ? Quel régime de la réponse $\omega_m(t)$ ce coefficient caractérise-t-il : transitoire ou permanent ? répondre aux mêmes questions concernant le coefficient K_m .

Q12. Déterminer la solution $\omega_m(t)$ de cette équation lorsque l'entrée est un échelon d'amplitude v_0 : $v_c(t) = v_0 u(t)$ avec $u(t)$ l'échelon unitaire. On utilisera la démarche du cours par transformation de Laplace et on considèrera la condition initiale nulle : $\omega_m(t = 0^+) = 0$.

Q13. Déterminer, en fonction de K_m et v_0 et en utilisant le théorème de la valeur finale, la limite à convergence $\omega_{m\infty} = \lim_{t \rightarrow \infty} \omega_m(t)$.

Q14. A partir du résultat de la question 12, établir la relation du cours suivante : $t_{R5\%} \approx 3\tau_m$ où $t_{R5\%}$ est le temps de réponse à 5% du système étudié.

On réalise un test expérimental sur cet ensemble en le soumettant à un échelon d'amplitude $v_0 = 0,5 \text{ ms}^{-1}$. Le résultat de ce test est présenté sur la figure du document réponses.

Q15. A partir des conclusions faites aux questions précédentes, déterminer graphiquement les valeurs des coefficients K_m et τ_m . Préciser leurs unités. Illustrer la démarche en annotant la figure du document réponses.

IV.2.2 Réducteur et roues

Q16. Sur le diagramme de blocs, Relever :

- la valeur du rapport de réduction du réducteur (constitué d'engrenages) notée $K_r (< 1)$ tel que $\omega_r(t) = K_r \omega_m(t)$.
- La valeur du rayon des roues assurant le déplacement longitudinal, noté R_{long} .

Q17. En supposant que les roues ne dérapent pas sur la feuille, quelle distance parcourt le robot lorsque les roues tournent d'un tour ? D'un demi-tour ? D'un quart de tour ? en déduire une relation générale lorsque les roues tournent d'un angle quelconque $\theta_r(t)$, entre cet angle $\theta_r(t)$ et la distance $x(t)$ parcourue par le robot. Raisonner avec les unités du système international (radian et non tour). Quelle est alors la relation entre $\omega_r(t)$ et $v(t)$, respectivement, la vitesse de rotation des roues et la vitesse de translation du robot.

IV.2.3 Bilan

Q18. Combiner les différentes équations déterminées pour exprimer la fonction de transfert $\frac{V(p)}{V_c(p)}$. La mettre sous forme canonique et déterminer ses caractéristiques. Faire les applications numériques.

IV.3 Simulation du système

On simule le système ainsi modélisé avec une consigne en échelon $v_c(t) = v_{max} u(t)$ avec $v_{max} = 0,12 \text{ ms}^{-1}$. On obtient ainsi le résultat présenté sur la figure du document réponses.

Q19. Relever le temps de montée t_m , c'est-à-dire le temps à partir duquel le régime permanent est considéré atteint (c'est donc le temps de réponse à 5%). Annoter la figure du document réponses.

On assimile ce temps à la durée de la première phase de la figure 10, c'est-à-dire $t_m = t_1$.

Q20. Tracer alors la droite passant par les points d'ordonnées $v(t = 0^+)$ et $v(t_m)$. En déduire la valeur d'accélération constante a réelle à retenir pour atteindre v_{max} à $t_m = t_1$. La comparer à la valeur trouvée à la Q7. Conclure.

V Programmation de la trajectoire [Bonus]

Objectif : on s'intéresse au trajet de la tête d'impression défini par la figure 8. On propose d'écrire le code à imposer au robot.

V.1 Fonctionnement d'un moteur pas à pas (figure 11)

Ce sont les variations de tensions aux bornes des bobinages du moteur qui engendrent une rotation. Ces tensions sont alternatives carrées (moteurs bipolaires ici) et sont générées par l'indexeur. La vitesse de rotation dépend de la fréquence des variations de tensions aux bornes des bobinages.

Chaque variation de tension fait tourner le moteur d'un pas. Si l'alimentation des bobinages est maintenue sans variation, le moteur est arrêté ; il est maintenu dans sa position par les champs magnétiques des aimants. Le sens de rotation peut être inversé suivant un décalage de la variation de tension d'un bobinage avant l'autre, permettant d'entraîner les roues dans l'autre sens.

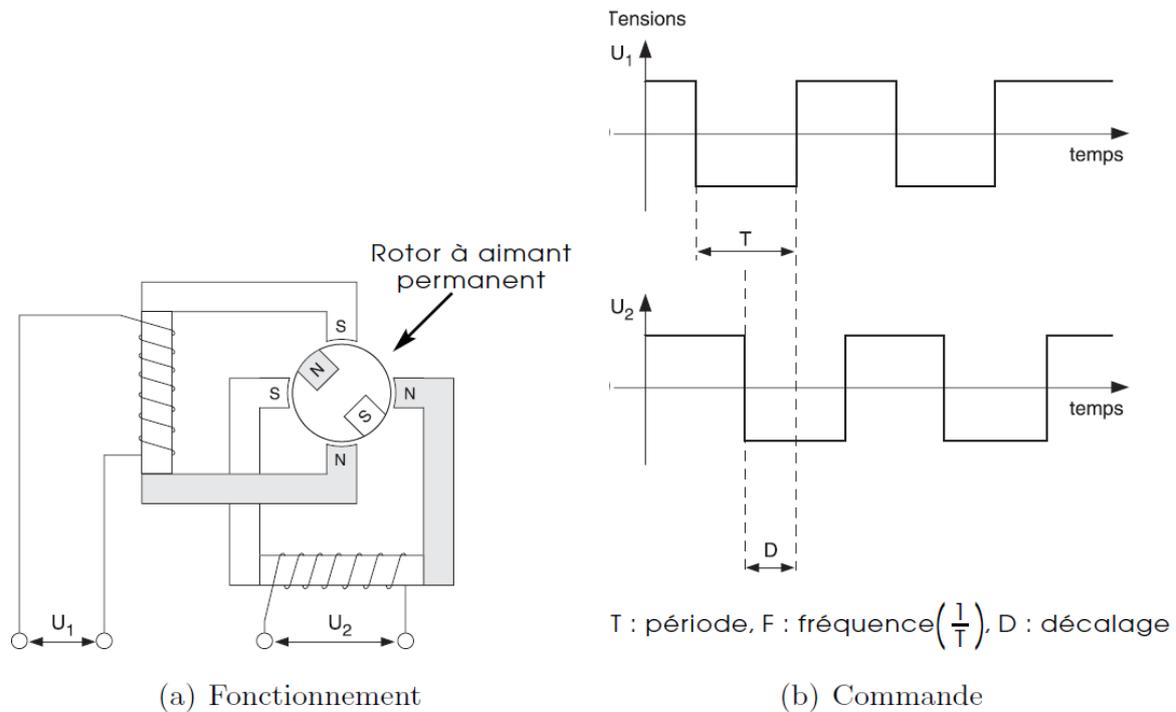


Figure 11 : Schéma de principe d'un moteur pas à pas de 4 pas par tour

V.2 Détermination du nombre de pas pour le déplacement latéral

On a vu que le déplacement longitudinal devait être commandé en vitesse. Pour le déplacement latéral, une commande en position est suffisante.

La figure 8 nous permet de déterminer le déplacement latéral $d_{lat} = \frac{29,7-5}{4} = 1,03\text{cm}$.

Q21. Relever le nombre de pas moteur puis déterminer la résolution angulaire θ_{min} c'est-à-dire la plus petite valeur d'angle commandable (par exemple, pour un moteur de 4 pas par tour, la résolution angulaire est de 90°).

Cette résolution θ_{min} va correspondre à un déplacement latéral $y_{min} = \theta_{min} R_{lat} = \frac{\pi}{100} \text{cm}$ du fait du non glissement des roues holonomes sur le papier.

Q22. En déduire le nombre entier n_{pas} de pas latéraux à effectuer pour parcourir la distance latérale d_{lat} .

V.3 Script

On définit les commandes suivantes, à importer à partir du package robot :

`p_lat()` : déplacement d'un pas vers le bas

`deplacement_long(+)` : déplacement longitudinal complet vers la droite

`deplacement_long(-)` : déplacement longitudinal complet vers la gauche

On ne s'occupe ainsi pas de la composition de la fonction `deplacement_long()` : la commande en vitesse est incluse dedans et n'est pas à programmer.

Q23. A l'aide de boucles définies (ou boucles `for`) et du début de trajet proposé figure 8, écrire un script en langage Python qui permettent au robot d'écrire tout le document de référence présenté figure 8. On le commentera correctement pour améliorer la lisibilité.

ANNEXES

Transformées de Laplace

$f(t)$	$F(p)$
$f(at)$	$\frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right)$
$f(t-\tau)$	$e^{-p\tau} F(p)$
$\frac{df(t)}{dt}$	$pF(p) - f(0^+)$
$\frac{d^2f(t)}{dt^2}$	$p^2 F(p) - pf(0^+) - f'(0^+)$
$\frac{d^n f(t)}{dt^n}$	$p^n F(p)$ avec C.I. = 0
$\int_0^t f(u) du$	$\frac{F(p)}{p}$ avec C.I. = 0
$\delta(t)$	1
$u(t)$	$\frac{1}{p}$
$\frac{t^n}{n!} \cdot u(t)$	$\frac{1}{p^{n+1}}$
$e^{-at} \cdot u(t)$	$\frac{1}{p+a}$
$t e^{-at} \cdot u(t)$	$\frac{1}{(p+a)^2}$
$\sin \omega t \cdot u(t)$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$
$\cos \omega t \cdot u(t)$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$

Théorème de la valeur initiale : (si la limite existe)

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} p \cdot F(p)$$

Théorème de la valeur finale : (si la limite existe)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot F(p)$$

COMPLEMENT DE COURS
décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle

Ce complément de cours présente quelques techniques de calcul de la décomposition en éléments simples de fractions rationnelles rencontrées dans le cours SLCI. L'objectif de la décomposition est de transformer une fraction rationnelle en une somme de fractions rationnelles simples dont on pourra facilement déterminer la transformée de Laplace inverse (voir chapitre 4 du cours SLCI).

On se limitera volontairement aux fractions rationnelles $\frac{N(p)}{D(p)}$ telles que :

- $\deg N(p) < \deg D(p)$
- $D(p) = \prod_i (p - p_i)$ avec
 - soit p_i réels
 - soit un ou plusieurs p_i complexes. On considère alors le ou les complexes conjugués $\overline{p_i}$. On a alors $(p - p_i)(p - \overline{p_i}) = p^2 - 2\alpha p + \alpha^2 + \beta^2$ avec $p_i = \alpha + i\beta$. $D(p)$ est alors un produit de polynômes réels de $\deg \leq 2$.

Etude des cas typiques

Etape 1 : forme de la décomposition

➤ Cas n°1 : $D(p)$ n'a que des racines simples réelles :

$$\frac{N(p)}{D(p)} = \frac{N(p)}{\prod_i (p - p_i)} = \sum_i \frac{A_i}{p - p_i} \quad \text{Ex 1 : } S(p) = \frac{2p+1}{(p+4)(p+1)}$$

➤ Cas n°2 : $D(p)$ n'a que des racines réelles dont une multiple :

$$\frac{N(p)}{D(p)} = \frac{N(p)}{(p - p_k)^n \prod_{i \neq k} (p - p_i)} = \sum_{i \neq k} \frac{A_i}{p - p_i} + \sum_{j=1}^n \frac{B_j}{(p - p_k)^j} \quad \text{Ex 2 : } S(p) = \frac{3p^2 + 2p + 1}{(p+2)^3(p+3)}$$

➤ Cas n°3 : $D(p)$ a une racine complexe :

$$\frac{N(p)}{D(p)} = \frac{N(p)}{(p - p_k)(p - \overline{p_k}) \prod_{i \neq k} (p - p_i)} = \sum_{i \neq k} \frac{A_i}{p - p_i} + \frac{Bp + C}{p^2 - 2\alpha p + \alpha^2 + \beta^2} \quad \text{Ex 3 : } \frac{1}{(p^2 + 2p + 5)(p+1)}$$

Etape 2 : détermination de coefficients

➤ Par identification : on recompose la fraction rationnelle à partir de la forme décomposée puis on identifie avec la fraction d'origine.

➤ Par calcul de limite (quand cela est possible) : $A_i = \lim_{p \rightarrow p_i} \frac{N(p)}{D(p)} (p - p_i)$

➤ Par utilisation de valeurs particulières : 0, 1, -1 ...

Exemple 1 :

$$S(p) = \frac{2p+1}{(p+4)(p+1)} = \frac{A}{p+4} + \frac{B}{p+1}$$

$$A = \lim_{p \rightarrow -4} (p+4).S(p) = \frac{7}{3} \quad \text{et} \quad B = \lim_{p \rightarrow -1} (p+1).S(p) = -\frac{1}{3}$$

$$S(p) = \frac{7/3}{p+4} + \frac{-1/3}{p+1}$$

Exemple 2 :

$$S(p) = \frac{3p^2+2p+1}{(p+2)^3(p+3)} = \frac{A}{(p+2)^3} + \frac{B}{(p+2)^2} + \frac{C}{p+2} + \frac{D}{p+3}$$

$$A = \lim_{p \rightarrow -2} (p+2)^3.S(p) = 9 \quad \text{et} \quad D = \lim_{p \rightarrow -3} (p+3).S(p) = -22$$

$$\lim_{p \rightarrow \infty} p.S(p) = 0 = C + D \Rightarrow C = 22$$

$$p=0 : \frac{1}{24} = \frac{9}{8} + \frac{B}{4} + \frac{22}{2} - \frac{22}{3} \Leftrightarrow B = -19$$

$$S(p) = \frac{9}{(p+2)^3} + \frac{-19}{(p+2)^2} + \frac{22}{p+2} + \frac{-22}{p+3}$$

Exemple 3 :

$$S(p) = \frac{1}{(p^2+2p+5)(p+1)} = \frac{Ap+B}{p^2+2p+5} + \frac{C}{p+1}$$

$$C = \lim_{p \rightarrow -1} (p+1).S(p) = \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad \lim_{p \rightarrow \infty} p.S(p) = 0 = A + C \Rightarrow A = -\frac{1}{4}$$

$$p=0 : \frac{1}{5} = \frac{B}{5} + \frac{1}{4} \Leftrightarrow B = -\frac{1}{4}$$

$$S(p) = -\frac{1/4 \cdot p + 1/4}{p^2+2p+5} + \frac{1/4}{p+1}$$