MPSI

Programme de colle - semaine 05 du 11/10/2025 au 19/10/2025

Les démonstrations bien adaptées sont marquées par un $(*)$.

1 Les complexes

- Exercices sur les équations, racines n^{es},...

2 Équations différentielles

- ED linéaire d'ordre 1 à coefficients non constants, avec second membre, usuellement notée de façon incorrecte $x' + a(t)x = b(t)$.
  a et b sont des fonctions continues de I (intervalle) dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
  - Résolution de l'équation homogène associée (E_0).
    (*) Énoncer proprement le théorème en définissant les objets, en précisant les hypothèses et en donnant la formule.
    Cas particulier où a est constante.
  - Équation complète : expression de l'ensemble des solutions à l'aide d'une solution particulière et de l'ensemble des solutions de l'équation homogène (*).
  - Variation de la constante : **(*) expliquer la méthode dans le cas général.**
  - Problème de Cauchy : **(*) donner un énoncé précis d'existence et d'unicité pour l'équation complète avec condition initiale.**
- ED linéaire d'ordre 2 à coefficients constants : **pas de démonstration**
  - Équation homogène : $x'' + ax' + bx = 0$, avec a, b complexes. Équation caractéristique (expliquer comment on l'obtient)
    Dans le cas où a et b sont réels, expression des solutions réelles.
  - ED d'ordre 2 complète $x'' + ax' + bx = f$: uniquement quand f est exponentielle ou sinusoïdale (pour d'autres types de seconds membres, donner une indication). Théorème de superposition.
    Problème de Cauchy : existence et unicité d'une solution quel que soit le second membre continu (admis).
    La méthode de variation des constantes à l'ordre 2 est hors-programme en sup.

3 Exercices

1. **Banque CCINP, exercice 42**
   On considère les deux équations différentielles suivantes :
   $2xy' - 3y = 0 \quad (H)$
   $2xy' - 3y = \sqrt{x} \quad (E)$
   a) Résoudre l'équation (H) sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
   b) Résoudre l'équation (E) sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
   c) L'équation (E) admet-elle des solutions sur l'intervalle $[0, +\infty[$?

2. **Recollement de solutions** *(le même que le précédent, en plus simple)*
   On considère l'équation différentielle $(E)\ :\ tx'(t) + x(t) = 1$
   a) Résoudre (E) sur $\mathbb{R}^{*+}$ puis sur $\mathbb{R}^{*-}$
   b) En déduire toutes les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$. On donnera en particulier le nombre de solutions.
   Une solution de (E) sur $\mathbb{R}$ doit au minimum être définie et dérivable (donc continue) sur $\mathbb{R}$.

3. **Équation logistique**

On considère l'équation différentielle **non linéaire** suivante :

$$(E) : \, y' = ky(1-y)$$

où k est une constante strictement positive donnée.
Soit $y_0 \in]0,1[$. On admet que (E) admet une unique solution y vérifiant $y(0) = y_0$, définie sur $\mathbb{R}^+$, et que celle-ci ne prend que des valeurs strictement positives.

a) On pose $z = \dfrac{1}{y}$.
   Montrer que z est solution d'une équation différentielle **linéaire** (E').

b) Résoudre (E'), en déduire la solution de (E) qui vérifie $y(0) = y_0$.