

Programme de colle - semaine 07 du 10/11/2025 au 16/11/2025

Les démonstrations bien adaptées sont marquées par un (*).

1 Théorie des fonctions

- Exercices sur le programme de la semaine dernière (fonction injective, surjective, bijective, image directe, image réciproque,...)

2 Fonctions usuelles

- Théorème de la bijection (aussi appelé corollaire du théorème des valeurs intermédiaires) :
Soit $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ strictement monotone (I : intervalle)
 - $f(I)$ est un intervalle de même nature que I , dont les bornes sont les limites de f aux bornes de I .
 - f définit une bijection de I vers $f(I)$.
 - f^{-1} est continue sur $f(I)$ et a le même sens de variation que f .
 (résultats admis)
- Courbe de f^{-1} . Dans le cas où f est dérivable, étude de la dérivabilité de f^{-1} et expression de sa dérivée (résultats admis mais donner l'interprétation géométrique)
- Définition de arcsin, arccos, arctan. En particulier, il ne faut pas hésiter sur leurs ensembles de départ et d'arrivée. Variations, parité de arcsin (*), de arctan.
- Ensemble de dérivabilité et dérivée des fonctions trigonométriques réciproques
(*) (incluant la simplification $\cos(\arcsin x) = \dots$ pour la dérivée de arcsin)
- Fonctions hyperboliques ch, sh, th : expression, dérivée, variations.
La seule formule exigible est $\text{ch}^2 - \text{sh}^2 = 1$. Les fonctions hyperboliques réciproques sont hors programme (mais la recherche de leur expression peut faire l'objet d'un exercice)
- On pourra donner un calcul d'intégrale faisant intervenir les fonctions trigonométriques réciproques (avec IPP, changement de variable,...).

3 Exercices

1. (fonction à changer)

$$\begin{aligned} \text{Soit } f: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{2x}{1+x^2} \end{aligned}$$

a) f est-elle injective ? Surjective ?

b) Déterminer $f(\mathbb{R})$, $f\left(\left[\frac{1}{2}, +\infty\right]\right)$

c) Déterminer $f^{-1}\left(\left[\frac{1}{2}, +\infty\right]\right)$

d) Soit $g:]0, 1] \longrightarrow]0, 1]$

$$x \longmapsto f(x)$$

Montrer que g est bien définie et qu'elle est bijective. Déterminer l'expression de sa réciproque.

2. Soit $f: x \longmapsto \arccos(\cos x)$ (possible aussi avec $\arcsin(\sin x)$ et $\arctan(\tan x)$)

a) Déterminer l'ensemble de définition de f , sa parité, sa périodicité pour restreindre l'étude à un intervalle I dans lequel l'expression de f est simple.

- b) Déterminer $f\left(\frac{23\pi}{19}\right)$ (valeur à changer) sous la forme $\frac{a\pi}{b}$, où a et b sont deux entiers.
- c) Tracer la courbe de f en expliquant pas à pas la construction de la courbe.

3. Soit $f : x \mapsto \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$.

Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer f' . Que peut-on en déduire ?

4. a) Montrer que la fonction sh est bijective de $\mathbb{R}$ vers un intervalle I à déterminer, puis déterminer l'expression de sa réciproque (notée argsh).
- b) Sans utiliser l'expression de argsh , dire quel est son ensemble de dérivabilité et donner l'expression de sa dérivée.