

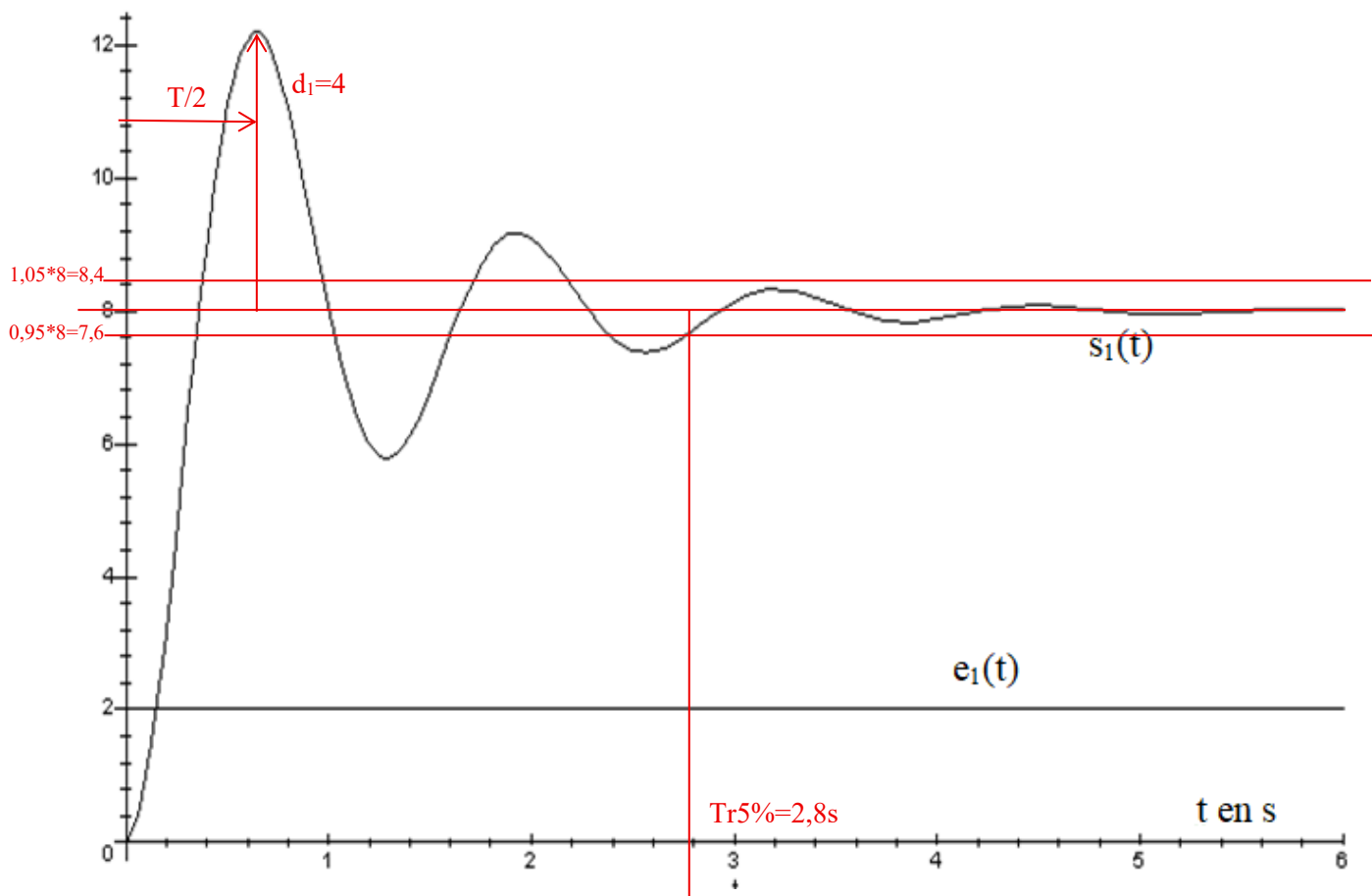
Exercice 8: modèle comportemental à partir d'une identification temporelle

Q3. Quelle est, en régime permanent, la différence entre la température réelle à un instant donné et la température lue sur la graduation ? ce thermomètre est-il précis dans la lecture d'une température variable ?

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} (\text{tempr}(t) - \text{tempg}(t)) &= \lim_{p \rightarrow 0} p (\text{Tempr}(p) - \text{Tempg}(p)) \\ &= \lim_{p \rightarrow 0} p \left(\frac{a}{p^2} - \frac{1}{1 + \tau p} \frac{a}{p^2} \right) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{a}{p} \left(1 - \frac{1}{1 + \tau p} \right) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{a}{p} \left(\frac{1 + \tau p - 1}{1 + \tau p} \right) = a \cdot \tau \end{aligned}$$

Exercice 9: modèles comportementaux à partir d'identifications temporelles

Q1. Déterminer les expressions numériques de $H_1(p)$ et $H_2(p)$ et vérifier le temps de réponse.

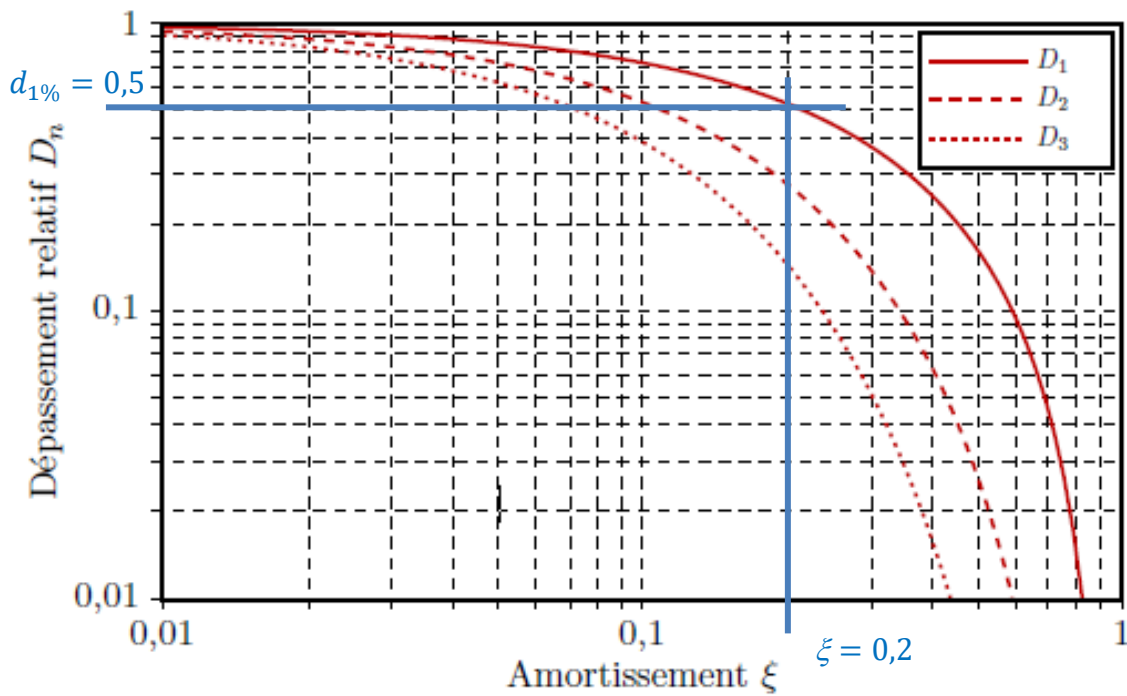


Modèle 2ieme ordre car pente de tangente à 0 = 0 et pseudo oscillation $\Rightarrow H_1(p) = \frac{K}{1 + \frac{2m}{\omega_0}p + \frac{1}{\omega_0^2}p^2}$.

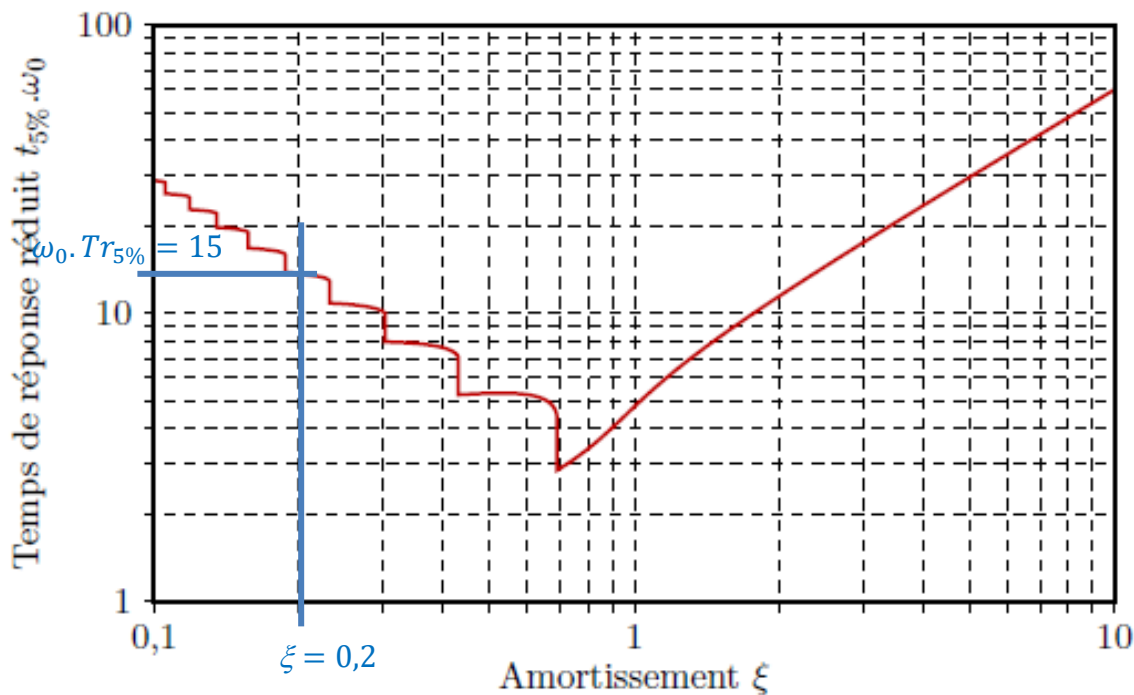
- $K = \frac{s_1(\infty)}{e_1(\infty)} = \frac{8}{2} = 4$

- Pour m on peut utiliser la formule du cours (donnée dans le cas d'un devoir) : $d_{1\%} = e^{\frac{-\pi m}{\sqrt{1-m^2}}} = \frac{12-8}{8} = 0,5$.

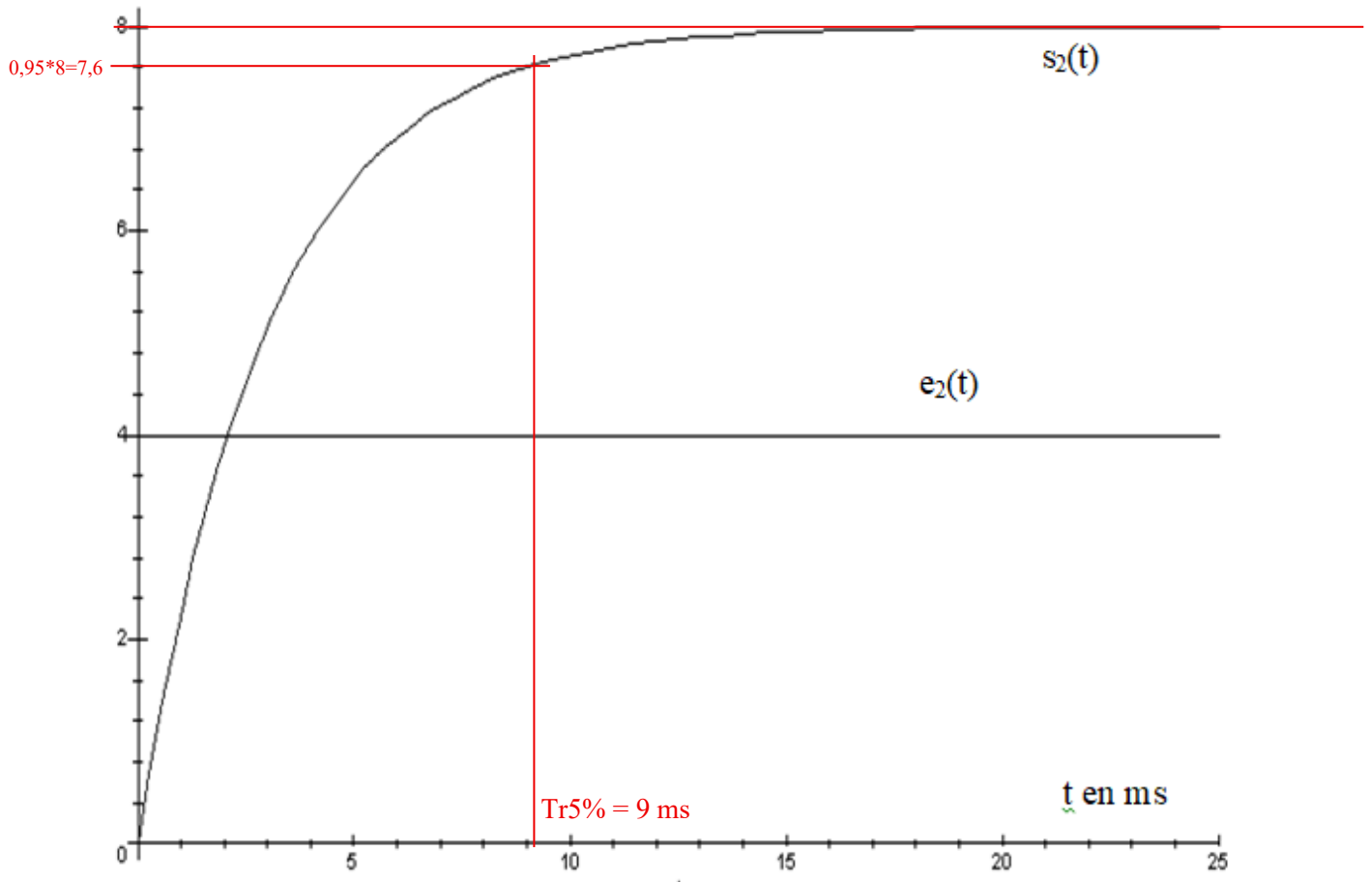
Ce qui donne : $m = \frac{|\ln d_{1\%}|}{\sqrt{\pi^2 + (\ln d_{1\%})^2}} \approx 0,2$ ou utiliser l'abaque (à échelles logarithmiques) donnant les dépassements relatifs en fonction de ξ . Tracés ci-dessous.



- Pour ω_0 : on peut mesurer la pseudo période ($T \approx 1,2 \text{ s}$) et utiliser la formule (donnée dans le cas d'un devoir) $T = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1-m^2}}$ ce qui donne $\omega_0 \approx 5 \text{ rad/s}$ ou mesurer le temps de réponse à 5% ($Tr_{5\%} = 2,8 \text{ s}$) et utiliser l'abaque donnant le temps de réponse réduit ($\omega_0 \cdot Tr_{5\%}$) en fonction de ξ . Tracés ci-dessous.



$$\text{D'où } H_1(p) = \frac{4}{1 + \frac{0.4}{5}p + \frac{1}{25}p^2}$$



Modèle 1er ordre car pente de tangente à 0 $\neq 0$ et pas de pseudo oscillation $\Rightarrow H_2(p) = \frac{K}{1+\tau p}$.

- $K = \frac{s_2(\infty)}{e_2(\infty)} = \frac{8}{4} = 2$
- Pour τ , on peut par exemple utiliser le temps de réponse ($Tr_{5\%} \approx 3 \cdot \tau \approx 9 \text{ ms}$) d'où $\tau \approx 0,003 \text{ s}$.

$$\text{D'où } H_2(p) = \frac{2}{1+0,003 p}$$

Q2. Choisir (en justifiant) $H_3(p)$ parmi les propositions suivantes :

$$H_{31}(p) = \frac{5}{1+0,5p+0,25p^2}$$

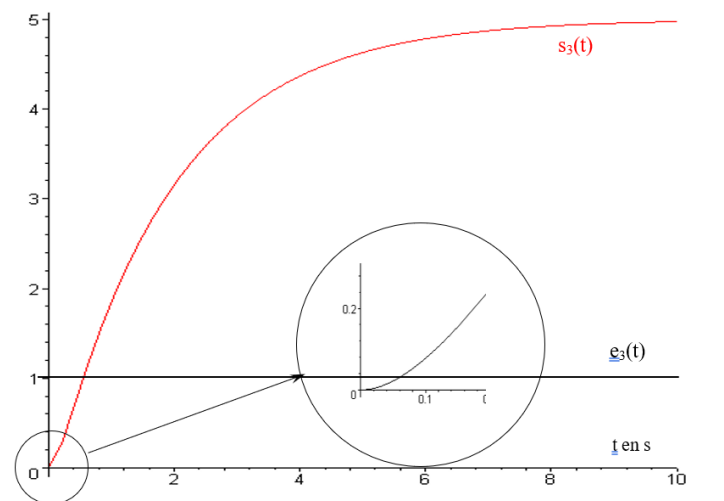
$$H_{32}(p) = \frac{5}{1+2p}$$

$$H_{33}(p) = \frac{500}{100+500p+25p^2} = \frac{5}{1+5p+0,25p^2}$$

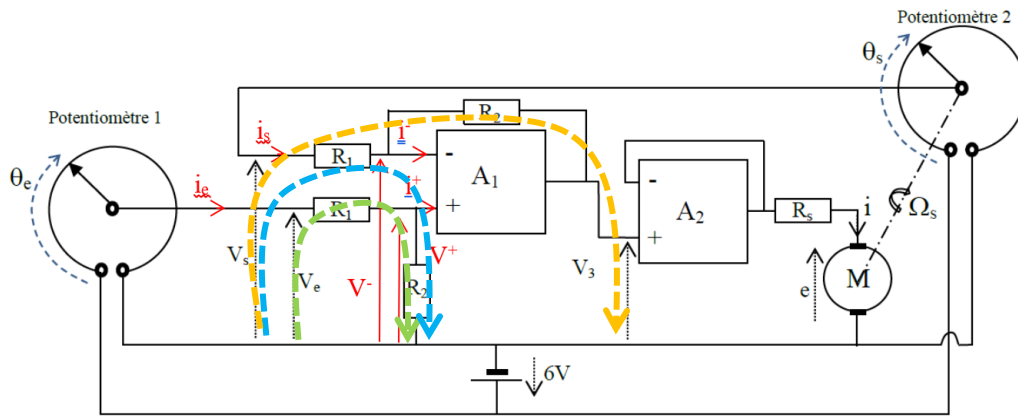
Modèle 2^{ème} ordre car pente de la tangente à 0 = 0.

Pas de pseudo oscillations donc $\xi > 1$. Donc on élimine $H_{32}(p)$.

- Les gains statiques de $H_{31}(p)$ et $H_{33}(p)$ sont de 5 (en prenant soin de mettre $H_{33}(p)$ sous forme canonique).
- On calcule ω_0 qui sont identiques pour ces deux fonctions de transfert. $\frac{1}{\omega_0^2} = 0,25 \Rightarrow \omega_0 = 2 \text{ rad/s}$.
- On calcule les facteurs d'amortissement pour chaque FT : $\frac{2m_{31}}{\omega_0} = 0,5 \Rightarrow m_{31} = 0,5 < 1$ donc donnerait un régime pseudo périodique $\frac{2m_{33}}{\omega_0} = 5 \Rightarrow m_{33} = 5 > 1$. C'est donc $H_{33}(p)$ la fonction de transfert associée aux tracés fournis



Exercice 10: un peu d'histoire... correction d'un asservissement de position angulaire analogique



Q1. Exprimer la tension $V_3(p)$ en fonction de $V_e(p)$ et de $V_s(p)$. Traduire l'équation obtenue sous la forme d'un schéma bloc.

Loi des nœuds : $i_+ = i_- \approx 0$ A donc les intensités traversant R_1 et R_2 sont i_e et i_s (respectivement « branches » basse et haute)

Loi des mailles : (1) $V_e - R_1 i_e - V_+ = 0$ (en temporel ou Laplacien c'est pareil puisqu'il n'y a pas de composant intégrateur ou dérivateur. Donc équ diff de degré 0)

$$(2) V_s - R_1 i_s - V_- = 0 \quad \text{et} \quad (3) V_s - (R_1 + R_2) i_s - V_3 = 0$$

On note également que (4) $V_+ = R_2 i_e = V_-$

$$(1) \text{ et } (4) \text{ donnent } i_e = \frac{V_e}{R_1 + R_2} \quad (2) \text{ donne } i_s = \frac{1}{R_1} \left(V_s - R_2 \frac{V_e}{R_1 + R_2} \right)$$

$$(3) \text{ donne } V_s - (R_1 + R_2) \frac{1}{R_1} \left(V_s - R_2 \frac{V_e}{R_1 + R_2} \right) = V_3 \text{ ce qui permet d'écrire : } V_3(p) = \frac{R_2}{R_1} (V_e(p) - V_s(p))$$

Q2. Etablir la transmittance (ou fonction de transfert) des potentiomètres de commande et de recopie. Donner les schémas bloc correspondants.

Si l'entrée du potentiomètre vaut $\theta_e = 0$ rad alors la sortie est à $V_e = 0$ V.

Si l'entrée du potentiomètre vaut $\theta_e = 6$ rad alors la sortie est à $V_e = 6$ V.

La relation entrée /sortie est proportionnelle donc la Fonction de transfert du potentiomètre est 1 (en V/rad)

Q3. Etablir une relation entre le courant $I(p)$ dans le moteur, sa vitesse $\Omega_s(p)$ et la tension $V_3(p)$.

$$\text{Loi des mailles : } V_3 - 0 - (R_s + R_m) i - e = 0. \text{ Or } e = K \omega_s \quad \text{D'où : } V_3(p) = (R_s + R_m) I(p) + K \Omega_s(p) = 0$$

La loi fondamentale de la dynamique s'écrit, si on néglige tous les frottements mécaniques : $C(t) = J \frac{d\omega_s(t)}{dt}$

Q4. En appliquant cette loi et en utilisant le résultat de la question précédente, montrer que la transmittance de l'ensemble (ampli A_2 + moteur) s'écrit : $H(p) = \frac{\Omega_s(p)}{V_3(p)} = \frac{5}{1 + 0.075p}$

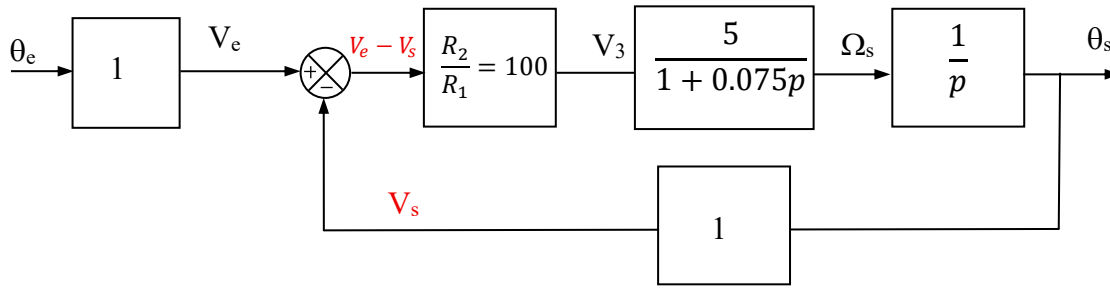
Par Laplace : $C(p) = Jp \Omega_s(p)$. Or $C(p) = K I(p)$.

$$\text{D'où : } V_3(p) = (R_s + R_m) \frac{Jp}{K} \Omega_s(p) + K \Omega_s(p) = \left((R_s + R_m) \frac{Jp}{K} + K \right) \Omega_s(p)$$

Ce qui donne :

$$H(p) = \frac{\Omega_s(p)}{V_3(p)} = \frac{1}{(R_s + R_m) \frac{Jp}{K} + K} = \frac{1/K}{\frac{(R_s + R_m)Jp}{K^2} + 1} = \frac{5}{1 + 0.075p}$$

Q5. Compléter le schéma fonctionnel du système ci-dessous et en déduire sa transmittance en boucle ouverte $H_{bo}(p) = \frac{V_s(p)}{V_e(p) - V_s(p)}$.



$$H_{bo}(p) = \frac{V_s(p)}{V_e(p) - V_s(p)} = 100 \cdot \frac{5}{1 + 0.075p} \cdot \frac{1}{p} = \frac{500}{(1 + 0.075p)p}$$

Q6. Donner l'expression de la transmittance en boucle fermée de l'asservissement $H_{bf}(p) = \frac{\theta_s(p)}{\theta_e(p)}$ et calculer son amortissement m .

$$H_{bf}(p) = \frac{\theta_s(p)}{\theta_e(p)} = \frac{\frac{500}{(1 + 0.075p)p}}{1 + \frac{500}{(1 + 0.075p)p}} = \frac{500}{p + 0.075p^2 + 500} = \frac{1}{1 + \frac{1}{500}p + \frac{0.075}{500}p^2}$$

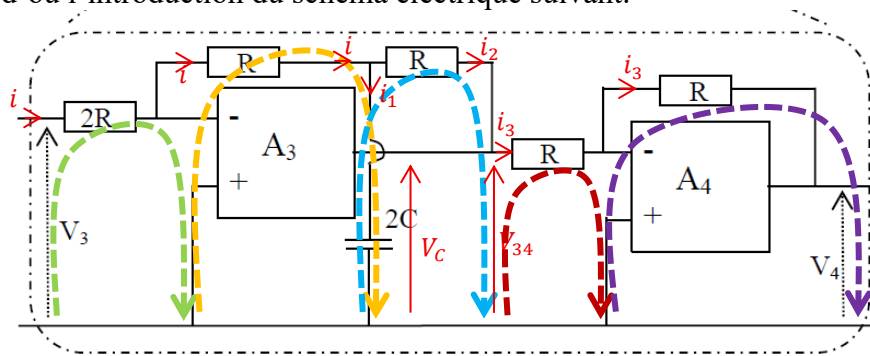
Ce qui donne une pulsation propre : $\omega_0 = \sqrt{\frac{500}{0.075}} \approx 81 \text{ rad/s}$ et $\xi = \frac{1}{2} \frac{1}{500} \omega_0 = 0,081$

Q7. Conclure quant à son comportement en réponse à un échelon.

Donc très faible facteur d'amortissement ce qui donne tr5% grand et bcp de dépassement ($d_{1\%}$). Réponse indicielle très oscillante.

D'après les abaques de l'exo précédent en prenant $\xi \approx 0,1$: $d_{1\%} \approx 80\%$ et $\omega_0 \cdot Tr_{5\%} \approx 30$ donc $Tr_{5\%} \approx 0,37s$ ce qui bcp dans la plupart des applications en robotique.

Il faut corriger le système d'où l'introduction du schéma électrique suivant.



Q8. Etablir la relation entre $v_4(t)$ et $v_3(t)$ puis la transmittance $\frac{V_4(p)}{V_3(p)}$.

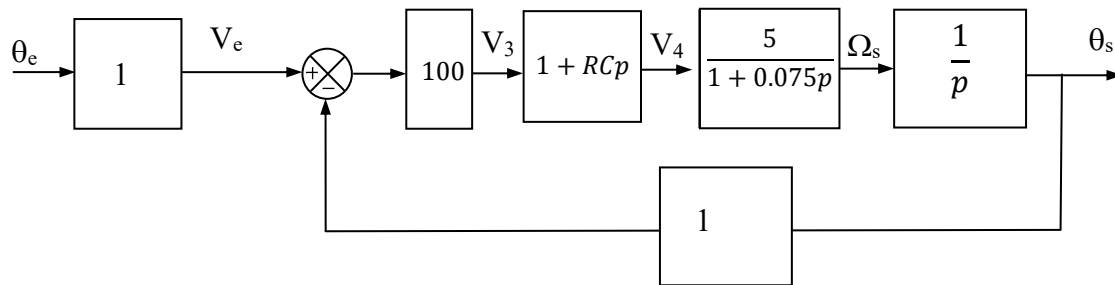
$$\begin{aligned} V_3 - 2Ri - V_- &= 0 \quad \text{avec } V_- = V_+ = 0 \Rightarrow i = \frac{V_3}{2R} \\ V_+ - Ri - V_C &= 0 \Rightarrow i = \frac{-V_C}{R} \\ V_C - Ri_2 - V_{34} &= 0 \Rightarrow i_2 = \frac{V_C - V_{34}}{R} \\ V_{34} - Ri_3 - V_+ &= 0 \quad \text{avec } V_+ = 0 \\ V_+ - Ri_3 - V_4 &= 0 \end{aligned} \quad \left. \begin{aligned} & \\ & \end{aligned} \right\} \begin{aligned} V_C &= -\frac{V_3}{2} \\ V_4 &= -V_{34} \end{aligned}$$

Loi de nœuds : $i = i_1 + i_2$ et loi de comportement du condo : $i_1 = 2C \frac{dV_C}{dt}$

$$\text{D'où : } i = \frac{V_3}{2R} = i_1 + i_2 = 2C \frac{dV_C}{dt} + \frac{V_C - V_{34}}{R} = -C \frac{dV_3}{dt} - \frac{V_3}{2R} + V_4$$

Ce qui donne l'équation : $V_3 + RC \frac{dV_3}{dt} = V_4 \Rightarrow \frac{V_4(p)}{V_3(p)} = 1 + RCp$

D'où le nouveau schéma bloc :



Q9. Donner l'expression de la nouvelle transmittance en boucle ouverte $H_{boc}(p) = \frac{V_s(p)}{V_e(p) - V_s(p)}$ du système corrigé. Sachant que $R = 39 \text{ k}\Omega$, calculer la valeur de la capacité C pour que la transmittance en boucle ouverte se réduise à un simple intégrateur.

$$H_{boc}(p) = \frac{V_s(p)}{V_e(p) - V_s(p)} = \frac{500(1 + RCp)}{(1 + 0.075p)p}$$

On veut : $H_{boc}(p)$ de type $\frac{K}{p}$ donc $1 + RCp = 1 + 0.075p \Rightarrow RC = 0,075 \Rightarrow C = \frac{0,075}{R} \approx 1,9 \cdot 10^{-6} \text{ F}$

C'est une méthode dite de compensation de pôle

Q10. En déduire l'expression de la nouvelle transmittance en boucle fermée $H_{bfc}(p) = \frac{\theta_s(p)}{\theta_e(p)}$ et caractériser la réponse indicielle du système ainsi corrigé. Conclure sur l'effet de la correction apportée.

$$H_{bfc}(p) = \frac{\theta_s(p)}{\theta_e(p)} = \frac{\frac{500}{p}}{1 + \frac{500}{p}} = \frac{500}{p + 500} = \frac{1}{1 + \frac{1}{500}p}$$

La réponse indicielle est celle d'un premier ordre de gain statique 1 et de temps de réponse $Tr_{5\%} \approx \frac{3}{500} \approx 6 \text{ ms}$ ne présentant aucun dépassement. Le correcteur (appelé montage dérivateur) a rendu le système rapide et très stable.