

## DS N°2

- Durée 2 heures
- Calculatrices autorisées
- Aucun document autorisé
- Le devoir comporte un exercice et un problème.
- Vous disposez des annexes sur les transformées de Laplace en fin de sujet.

### Exercice : Evaluation de performances et identification (temps conseillé : 15 min)

Sur le graphique du document réponses, sont représentés la consigne et la réponse (grandeurs sans dimension) d'un système linéaire continu invariant asservi.

Travail demandé :

1. *Evaluer les performances du système (erreur statique, temps de réponse et 1er dépassement en pourcentage de la valeur à convergence). Vous réaliserez les tracés nécessaires sur le document réponse.*
2. *Donner par identification, la fonction de transfert Laplacienne du système. Son expression numérique sera donnée sous forme canonique. Justifier le modèle de fonction de transfert avant de développer la démarche et les calculs utilisant entre autres, les deux abaques du document réponses. Vous pouvez également utiliser les formules données sur le document réponses.*

### Problème : Assistance pour le maniement de charges dans l'industrie (extrait Centrale TSI 2017)

#### IMise en situation

##### I.1 Contexte

L'exosquelette est un appareil qui apporte à un l'être humain des capacités qu'il ne possède pas ou qu'il a perdues à cause d'un accident. Ce type d'appareil peut permettre à une personne de soulever des charges lourdes et diminuer considérablement les efforts à fournir sans la moindre fatigue (Figure 1).

Après avoir revêtu un exosquelette adapté à sa morphologie et à sa taille, l'utilisateur peut faire ses mouvements en bénéficiant d'une grande fluidité.



FIGURE 1 – Maniement de charges

## I.2 Présentation du système

L'exosquelette (Figure 2) présente les constituants principaux de l'exosquelette étudié.

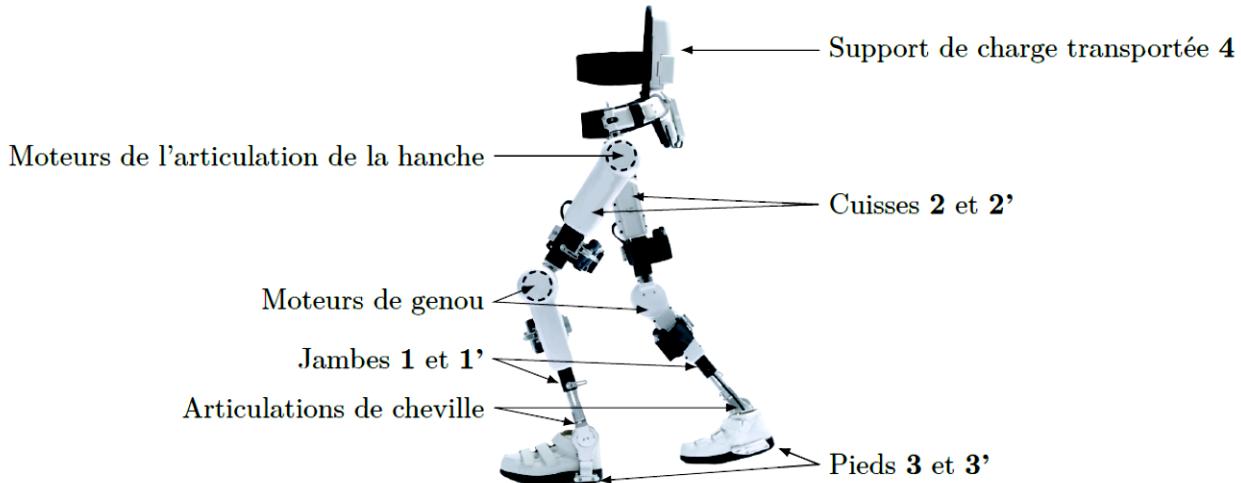


FIGURE 2 – Constituants de l'exosquelette

Les actionneurs équipant chaque axe (genoux et hanches) de l'exosquelette sont des moteurs à courant continu couplés à des réducteurs de vitesse de type « Harmonic Drive » à grand rapport de réduction. Chaque moteur est alimenté par une carte de positionnement incluant un onduleur triphasé, la source d'énergie étant un pack de batteries. La carte de positionnement exploite les signaux des capteurs à effet Hall intégrés dans le moteur, ainsi que ceux d'un codeur incrémental monté sur l'axe moteur. Elle comprend trois asservissements :

- un asservissement de courant qui correspond à un asservissement de couple avec correction intégrale ;
- un asservissement de vitesse angulaire avec un correcteur proportionnel et intégral ;
- un asservissement de position angulaire offrant des fonctions d'anticipation de vitesse.

## I.3 Performances attendues

La demande de mouvement de l'utilisateur de l'exosquelette se traduit par une consigne de vitesse de type trapézoïdale pour le mouvement vertical. Cette demande se traduit finalement en consigne de position des axes moteur genou gauche et droit qui peuvent être approchées par des constantes (échelons) et des rampes. On définit ainsi deux sous-critères pour la précision de l'asservissement (voir table 1).

Exigences	Critères d'appréciation	Niveau
Gérer le mouvement vertical	Précision de l'asservissement de position : <ul style="list-style-type: none"> <li>- erreur statique pour une consigne en échelon (<math>\varepsilon_s</math>)</li> <li>- erreur statique pour une consigne en rampe (<math>\varepsilon_t</math>)</li> </ul>	0 rad 0 rad
	Robustesse de l'asservissement de position : erreur statique pour une perturbation en échelon ( $\varepsilon_p$ )	0 rad
	Rapidité de l'asservissement de position : temps de réponse à 5% ( $t_{5\%}$ )	< 500 ms

TABLE 1 – Extrait du cahier des charges associé à l'exigence « Gérer le mouvement vertical »

Objectif : Valider les réglages de la commande asservie des moteurs genou droit et gauche permettant d'assurer un mouvement vertical ne déséquilibrant pas le porteur de l'exosquelette puis valider les performances attendues listées par le cahier des charges (Table 1).

## II Détermination des performances de l'asservissement de position d'un axe

### II.1 Modélisation du système

Un premier modèle de l'asservissement de la position angulaire d'un axe est défini Figure 3.

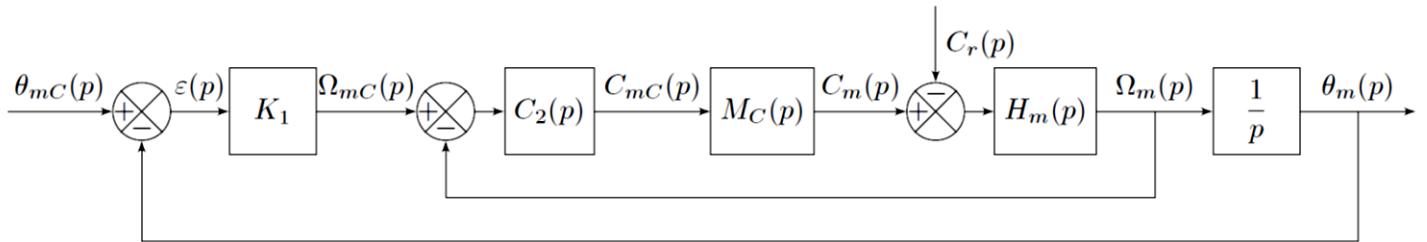


FIGURE 3 – Premier modèle

$\theta_{mC}(p)$	consigne de position de l'axe moteur (variable temporelle : $\theta_{mC}(t)$ en rad)
$\theta_m(p)$	position de l'axe moteur (variable temporelle : $\theta_m(t)$ en rad)
$C_{mC}(p)$	consigne de couple moteur (variable temporelle : $c_{mC}(t)$ en N·m)
$C_m(p)$	couple moteur (variable temporelle : $c_m(t)$ en N·m)
$C_r(p)$	couple résistant perturbateur (variable temporelle : $c_r(t)$ en N·m)
$K_1$	gain proportionnel du correcteur de l'asservissement de position (en $s^{-1}$ )
$\Omega_{mC}(p)$	consigne de vitesse de l'axe moteur (variable temporelle : $\omega_{mC}(t)$ en $rad \cdot s^{-1}$ )
$\Omega_m(p)$	vitesse de l'axe moteur (variable temporelle : $\omega_m(t)$ en $rad \cdot s^{-1}$ )
$C_2(p)$	correcteur de l'asservissement de vitesse
$M_C(p)$	modélise la boucle d'asservissement en couple du moteur (étudiée ci-après)

TABLE 2 – Définition des notations utilisées

On considère dans tout le devoir les conditions de Heaviside (Conditions initiales nulles) remplies.

**Question 1.** Rappeler le lien entre la vitesse de rotation  $\omega_m(t)$  (en rad/s) et la position angulaire  $\theta_m(t)$  (en rad).

Justifier alors l'expression de la fonction de transfert  $\frac{\theta_m(p)}{\Omega_m(p)}$ . A quel modèle de système (fondamental) a-t-on affaire ?

### II.2 Etude de la boucle d'asservissement en couple du moteur

La fonction de transfert  $M_C(p)$  correspond à une boucle d'asservissement en couple du moteur ( $C_m(t)$ ), qui passe par le pilotage de l'intensité  $i(t)$  du moteur (transformée de Laplace  $I(p)$ ). On adopte la représentation de la Figure 4 afin d'en détailler le fonctionnement.

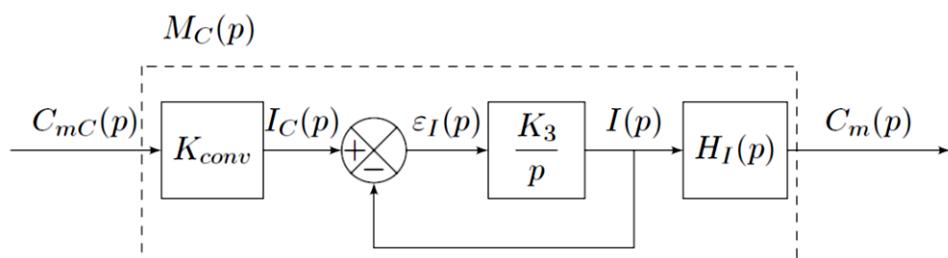


FIGURE 4 – Modélisation de l'asservissement en couple  $M_C(p)$

On rappelle ci-après les équations modélisant le comportement d'un moteur à courant continu :

- (1)  $u_m(t) = e(t) + R \cdot i(t) + L \frac{di}{dt}(t)$
- (2)  $C_m(t) = k_c \cdot i(t)$
- (3)  $e(t) = k_e \cdot \omega_m(t)$
- (4)  $J \frac{d\omega_m}{dt}(t) = C_m(t) - C_r(t) - f \cdot \omega_m(t)$

où  $u_m(t)$  est la tension aux bornes du moteur. On définit les valeurs des paramètres constants suivants :

$$R = 2 \Omega ; L = 0,62 \text{ mH} ; k_e = 0,5V/\text{tour}^{-1}\text{min} ; k_c = 0,0525 \text{ NmA}^{-1}$$

Les valeurs de  $J$ , le moment d'inertie rapporté à l'axe moteur, et de  $f$ , le coefficient de frottement visqueux équivalent à l'ensemble en mouvement, ne sont pas connues.

**Question 2.** A l'aide de l'une des quatre équations précédentes, montrer que la fonction de transfert  $H_l(p)$  est assimilable à un gain pur. Donner son expression littérale et sa valeur numérique. Préciser son unité.

**Question 3.** Exprimer  $\varepsilon_l(p)$  en fonction de  $C_{mc}(p)$  et  $C_m(p)$  puis déterminer l'expression de  $K_{conv}$  en fonction d'une des constantes du moteur pour que la boucle d'asservissement de la Figure 4 soit bien asservie, c'est-à-dire que l'écart  $\varepsilon_l(p)$  soit nul lorsque le couple du moteur est égal à la consigne de couple (voir Table 2).

**Question 4.** Exprimer la fonction de transfert  $M_C(p) = \frac{C_m(p)}{C_{mc}(p)}$  en fonction de  $K_{conv}$ ,  $K_3$ ,  $p$  et  $H_l(p)$ . Montrer alors qu'elle se met sous la forme :  $M_C(p) = \frac{K_3}{K_3 + p}$ . Préciser l'ordre du système ainsi modélisé.

On souhaite que la dynamique globale du système soit indépendante de l'asservissement en courant. Pour cela, on fixe la valeur de la constante de temps de  $M_C(p)$  inférieure à 1 ms.

**Question 5.** Exprimer la constante de temps de  $M_C(p)$  et en déduire la valeur limite de  $K_3$ . Préciser son unité.

En négligeant sa constante de temps, on pourra ainsi assimiler  $M_C(p)$  à un gain pur unitaire soit :  $M_C(p) = 1$ .

### II.3 Etude de la boucle d'asservissement en vitesse

On s'intéresse maintenant à la boucle d'asservissement en vitesse des motorisations.

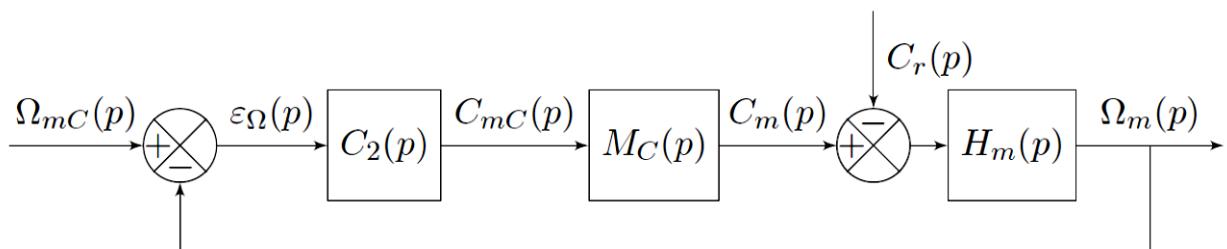


FIGURE 5 – Modélisation de l'asservissement en vitesse

La boucle d'asservissement en vitesse utilise un correcteur proportionnel-intégral de fonction de transfert  $C_2(p)$  telle que :

$$C_2(p) = K_2 \frac{1 + T_2 p}{T_2 p}$$

**Question 6.** A l'aide de l'une des équations modélisant le comportement du moteur (équations (1) à (4), voir page précédente), montrer que la fonction de transfert  $H_m(p) = \frac{\Omega_m(p)}{C_m(p) - C_r(p)}$  peut se mettre sous la forme d'un premier ordre. Exprimer son gain  $K_m$  et sa constante de temps  $\tau_m$  en fonction des paramètres  $f$  et  $J$ . Préciser leurs unités ( $J$  : moment d'inertie en  $\text{kg.m}^2$  et  $f$  : coeff de frottement visqueux en  $\text{N.m.s}$ ).

Afin d'obtenir les valeurs numériques associées à  $K_m$  et  $\tau_m$ , on applique au moteur un échelon de couple  $C(t) = C_m(t) - C_r(t)$  d'amplitude **50 Nm**. La Figure 8 du document réponses illustre alors la vitesse  $\omega_m(t)$  mesurée.

**Question 7.** Après avoir validé la forme du modèle de  $H_m(p)$ , identifier les valeurs numériques de  $K_m$  et  $\tau_m$ . Préciser les unités et faire apparaître les constructions sur le document réponses. En déduire les valeurs numériques des paramètres  $f$  et  $J$  avec leurs unités.

### II.3.1 Etude du système non perturbé

On considère dans cette partie que l'asservissement de vitesse est non perturbé :  $C_r(p) = 0$ .

**Question 8.** Exprimer la fonction de transfert  $H_{BO\Omega}(p) = \frac{\Omega_m(p)}{\varepsilon_\Omega(p)} \Big|_{C_r(p)=0}$  en fonction de  $C_2(p)$ ,  $M_C(p)$  et  $H_m(p)$  puis en fonction de  $K_m$ ,  $\tau_m$ ,  $T_2$  et  $K_2$  en considérant  $M_C(p) = 1$ .

**Question 9.** Donner alors l'ordre, le gain et la classe de cette fonction de transfert. Préciser également la racine de son numérateur (appelée zéro), notée  $z$ , et les racines de son dénominateur (appelées pôles) notées  $p_1$  et  $p_2$ .

On souhaite réduire l'ordre de  $H_{BO\Omega}(p)$  sans modifier sa classe. Pour cela, on compense le pôle non nul avec le zéro en réglant le correcteur de manière à ce que  $T_2 = \tau_m$ .

**Question 10.** Donner l'expression simplifiée de  $H_{BO\Omega}(p)$  avec ce choix de correcteur.

**Question 11.** En déduire l'expression de la fonction de transfert  $H_{BF\Omega}(p) = \frac{\Omega_m(p)}{\Omega_{mC}(p)} \Big|_{C_r(p)=0}$  en fonction de  $H_{BO\Omega}(p)$ . Montrer qu'elle s'écrit  $H_{BF\Omega}(p) = \frac{1}{1 + \tau_v p}$ . Préciser l'expression de  $\tau_v$  en fonction de  $K_m$ ,  $\tau_m$  et  $K_2$ .

### II.3.2 Validation de la robustesse

On souhaite étudier l'influence du couple résistant  $C_r(t)$  sur la sortie  $\omega_m(t)$ .

On considère donc à présent  $\omega_{mC}(t) = 0$ .

**Question 12.** Montrer que la fonction de transfert en boucle fermée  $H_{per}(p) = \frac{\Omega_m(p)}{C_r(p)} \Big|_{\Omega_{mC}(p)=0}$  s'écrit :

$$H_{per}(p) = \frac{-\frac{\tau_m}{K_2}p}{1 + \left(\tau_m + \frac{\tau_m}{K_m K_2}\right)p + \frac{\tau_m^2}{K_m K_2}p^2}$$

On supposera le système modélisé par  $H_{per}(p)$  stable.

**Question 13.** Calculer  $\lim_{t \rightarrow \infty} \omega_m(t)$  lorsque  $C_r(t)$  est un échelon d'amplitude constante  $C_0$ . Préciser la démarche et le(s) théorème(s) utilisé(s). Conclure vis-à-vis du cahier des charges (Table 1).

Pour la suite,  $C_r(t)$  n'ayant pas d'influence sur le comportement du système, on le négligera.

#### II.4 Etude de la boucle d'asservissement en position

Les études précédentes permettant d'aboutir au modèle simplifié de la Figure 6 pour l'asservissement en position, avec  $\tau_v = 33 \text{ ms}$  et  $K_1 = 100 \text{ s}^{-1}$ .

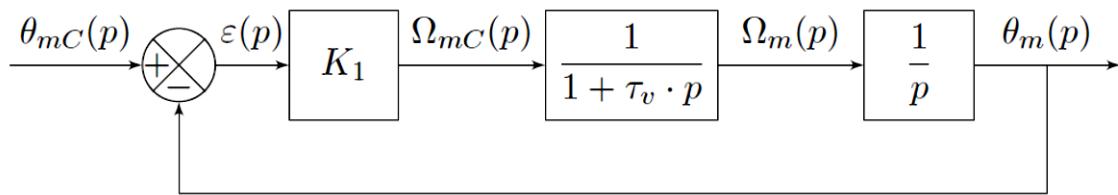


FIGURE 6 – Premier modèle simplifié

**Question 14.** Exprimer la fonction de transfert en boucle fermée du système  $H_{BF}(p) = \frac{\theta_m(p)}{\theta_{mc}(p)}$  en fonction de  $K_1$  et  $\tau_v$ . La mettre sous forme canonique.

##### II.4.1 Validation de la stabilité

Un système est stable si les pôles de sa fonction de transfert (racines du dénominateur) sont à partie réelle strictement négative.

**Question 15.** Donner les pôles de  $H_{BF}(p)$  et conclure sur la stabilité du système.

Pour la suite, on considère l'asservissement de position angulaire stable.

##### II.4.2 Validation de la rapidité

**Question 16.** Donner les expressions du facteur d'amortissement  $\xi$  et de la pulsation propre non amortie  $\omega_0$  du système modélisé par la fonction de transfert  $H_{BF}(p)$ . Faire les applications numériques.

**Question 17.** En utilisant l'abaque du document réponses (celui de l'exercice), estimer le temps de réponse à 5% de la réponse indicielle de l'asservissement en position ainsi corrigé. Conclure vis-à-vis du cahier des charges (Table 1).

##### II.4.3 Détermination de la précision

La précision du système s'évalue à travers son erreur statique :  $\lim_{t \rightarrow \infty} (\theta_{mc}(t) - \theta_m(t))$ .

Puisque la consigne peut s'approcher par des constantes et des rampes, on définit deux sous-critères :

- l'erreur statique de position, notée  $\varepsilon_s$  : elle correspond à l'erreur statique du système sollicité par un échelon unitaire  $\theta_{mC}(t) = u(t)$ . Où  $u(t)$  et l'échelon unitaire (fonction d'Heaviside)
- l'erreur statique de vitesse (ou de trainage), notée  $\varepsilon_t$  : elle correspond à l'erreur statique du système sollicité par une rampe unitaire  $\theta_{mC}(t) = t \cdot u(t)$ .

**Question 18.** Déterminer l'erreur statique de position  $\varepsilon_s$  du système. Conclure vis-à-vis du cahier des charges (Table 1).

**Question 19.** Déterminer l'erreur de trainage  $\varepsilon_t$  en appliquant le théorème de la valeur finale. On sera attentif aux formes indéterminées. Conclure vis-à-vis du cahier des charges.

### III. Nouvelle modélisation du système

Pour satisfaire l'exigence d'une erreur de trainage nulle, on propose un second modèle avec anticipation (par programmation d'une action dérivée dans l'algorithme du microcontrôleur) pour la vitesse (Figure 7).

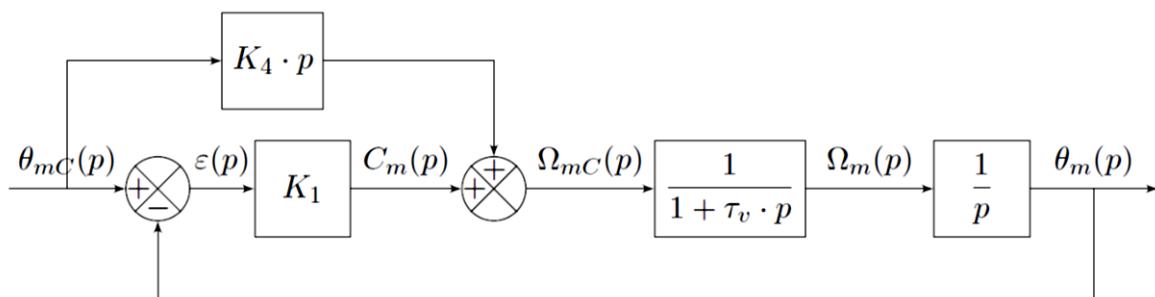


FIGURE 7 – Deuxième modèle

**Question 20.** Montrer que la nouvelle fonction de transfert en boucle fermée  $H_{BFnew}(p) = \frac{\theta_m(p)}{\theta_{mC}(p)}$  s'écrit :

$$H_{BFnew}(p) = \frac{1 + \frac{K_4}{K_1}p}{1 + \frac{1}{K_1}p + \frac{\tau_v}{K_1}p^2}$$

**Question 21.** Déterminer la nouvelle expression de l'erreur de trainage  $\varepsilon_t$ , en fonction de  $K_1$  et  $K_4$ . Conclure quant au réglage de  $K_4$  permettant d'annuler  $\varepsilon_t$

#### Quelques Transformées de Laplace au cas où

$\underline{f(t)}$	$F(p)$
$f(t-\tau)$	$e^{-\tau p} F(p)$
$\frac{d^n f(t)}{dt^n}$	$p^n F(p)$ avec C.I. = 0
$\delta(t)$	1
$u(t)$	$\frac{1}{p}$
$\frac{t^n}{n!} \cdot u(t)$	$\frac{1}{p^{n+1}}$

Théorème de la valeur initiale : (si la limite existe) :  
 $\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} p \cdot F(p)$

Théorème de la valeur finale : (si la limite existe) :  
 $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot F(p)$