MPSI

Programme de colle - semaine 10 du 01/12/2025 au 07/12/2025

1 Limites de fonctions

- Exercices sur le programme précédent : recherche de limite par croissance comparée, équivalent, DL d'ordre 1, manipulation des $o(.)$,...

2 Systèmes linéaires et inversion de matrices

- Pas de théorie mais méthodes à connaître
- Généralités : système linéaire d'équations scalaires à coefficients dans $\mathbb{K}$ ($= \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), système homogène associé. Forme matricielle d'un système linéaire ($AX = B$).
- Résolution des systèmes : cas des systèmes triangulaires à coefficients diagonaux non nuls (une unique solution). Cas général : transformation en système échelonné par pivot de Gauss, opérations élémentaires sur les lignes, résolution d'un système échelonné : vérification de la compatibilité puis introduction d'autant de paramètres qu'il y a d'inconnues secondaires.
- **Système homogène** : il est toujours compatible.
  Pour un système avec second membre compatible, description de l'ensemble des solutions à partir d'une solution particulière et de la solution générale du système homogène associé.
- Les réflexes suivants doivent être acquis :
  - Commencer par mettre le système sous forme "normalisée" (inconnues à gauche alignées verticalement, second membre à droite).
  - Échelonner le système sans effectuer d'opérations interdites (du genre $L_i \leftarrow \lambda L_i + L_j$).
  - Quand le système est triangulaire, regarder si un des coefficients diagonaux est nul.
- Étude d'inversibilité de matrice et inversion (le cas échéant) : pas de théorie, simplement savoir appliquer la méthode, à tester uniquement sur des matrices de taille 3 maximum avec des coefficients numériques.

3 Suites particulières

- Suite arithmético-géométrique. Calcul du terme général.
  Les suites arithmétiques et géométriques n'ont pas été revues mais sont bien évidemment à connaître sans hésitation.
- Suite récurrente linéaire d'ordre 2 :

$$(E) \,:\, \forall n \in \mathbb{N},\, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \text{ avec } (a,b) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}^*.$$

  Équation caractéristique.
  Expression des solutions de (E) (cas où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), expression des solutions à valeurs réelles (cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$).
- La démonstration de l'expression générale n'est pas à savoir, mais il faut savoir démontrer les propriétés élémentaires comme :
  - (r^n) est solution de (E) ssi $r^2 = ar + b$.
  - Si u et v sont deux solutions de (E) telles que $u_0 = v_0$ et $u_1 = v_1$ alors $u = v$.
  - L'ensemble des solutions de (E), noté ici $\mathcal{S}_{(E)}$, est stable par combinaison linéaire (la signification de cette phrase doit être connue).

4 Exercices

Donner à tout le monde un système à paramètre, où une discussion sur le paramètre est nécessaire.

1. On donne une matrice 2×2 ou 3×3 (pas trop compliquée).
   Soit λ un paramètre réel. On considère le système (S) : $MX = \lambda X$, d'inconnue X (matrice colonne).
   Résoudre (S) en discutant suivant la valeur de λ.

2. Une matrice 3×3 à inverser (pas trop de calculs ! Si l'inverse est à coefficients entiers c'est mieux).

3. **D'après CCINP exercice 55**
   Soit a un nombre complexe.
   On note H l'ensemble des suites à valeurs complexes telles que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 2au_{n+1} + 4(ia-1)u_n \qquad \text{avec } (u_0, u_1) \in \mathbb{C}^2.$$

   a) Prouver que H est stable par combinaison linéaire (à traduire d'abord en quantificateurs).
   b) Dans cette question, on considère une suite de H définie par : $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$.
   Exprimer, pour tout entier naturel n, le nombre complexe u_n en fonction de n.
   Indication : discuter suivant les valeurs de a.

   Remarque : ne pas y passer trop de temps.