

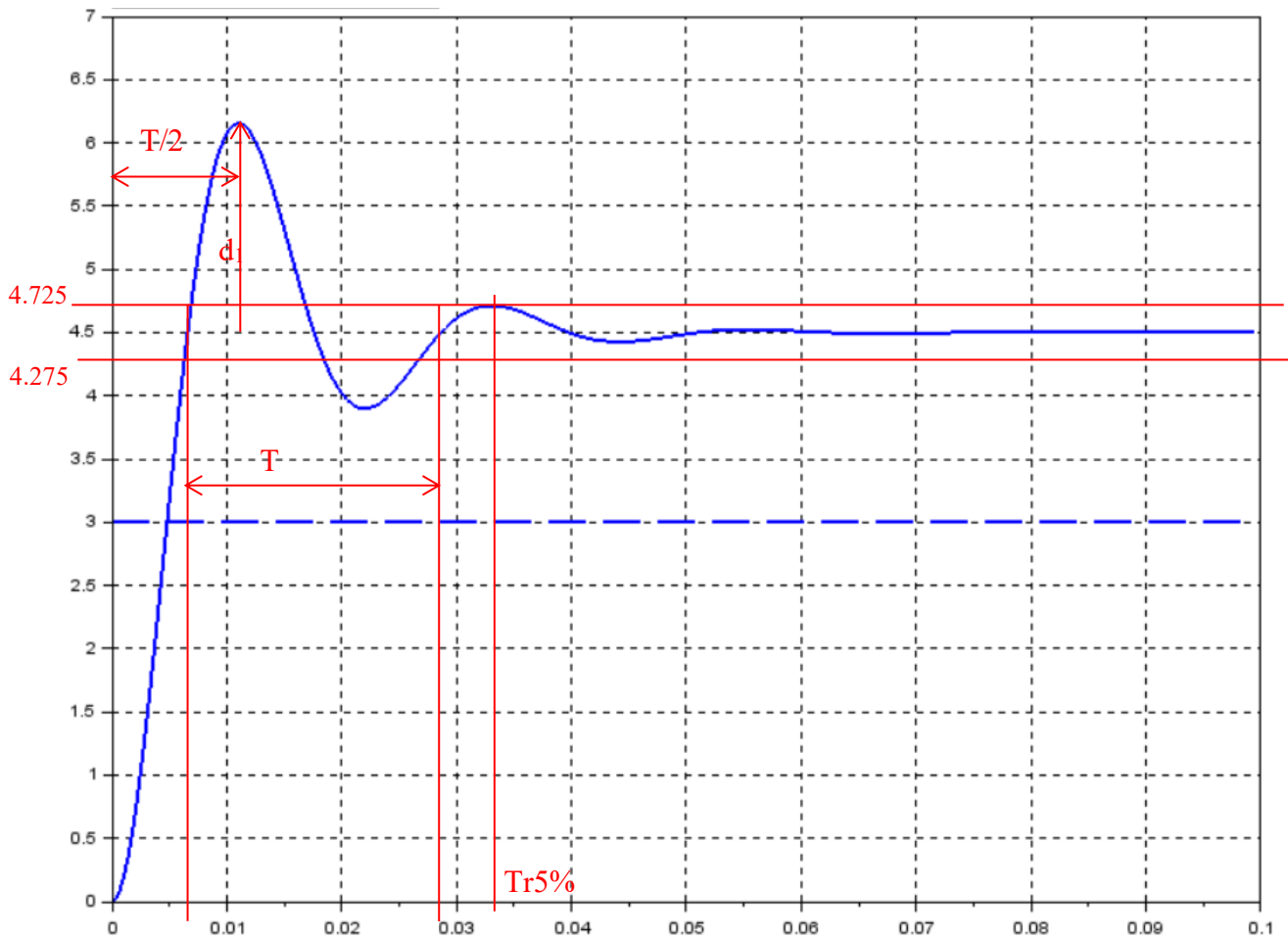
Exercice :

1)

- Erreur statique : $e(\infty) - s(\infty) = 3 - 4.5 = -1.5$
- Temps de réponse : bande à $\pm 5\%$ de V.A. = $\pm 0.225 \Rightarrow$ borne sup = 4.725 et borne inf = 4.275

On mesure $tr_{5\%} \approx 0.033$ s

- 1^{er} dépassement : $d_{1\%} \approx \frac{6.2-4.5}{4.5} * 100 \approx 37\%$



2)

La consigne est de type indicielle : échelon de 3

La réponse présente une tangente à l'origine nulle et des pseudo oscillations caractéristiques d'un système du second ordre $\Rightarrow H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0}p + \frac{1}{\omega_0^2}p^2}$

- $K = \frac{s(\infty)}{e(\infty)} = \frac{4.5}{3} = 1.5$
- On utilise le 1^{er} dépassement ($d_{1\%} \approx 0.37$) et l'abaque donnant l'évolution des dépassements relatifs (on prend le 1^{er}) en fonction du coefficient d'amortissement. On trouve $\xi \approx 0.3$.

Autre solution, on utilise la formule: $d_{1\%} = e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$ ce qui donne : $\xi = \frac{|\ln(d_{1\%})|}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(d_{1\%})}} \approx 0.3$

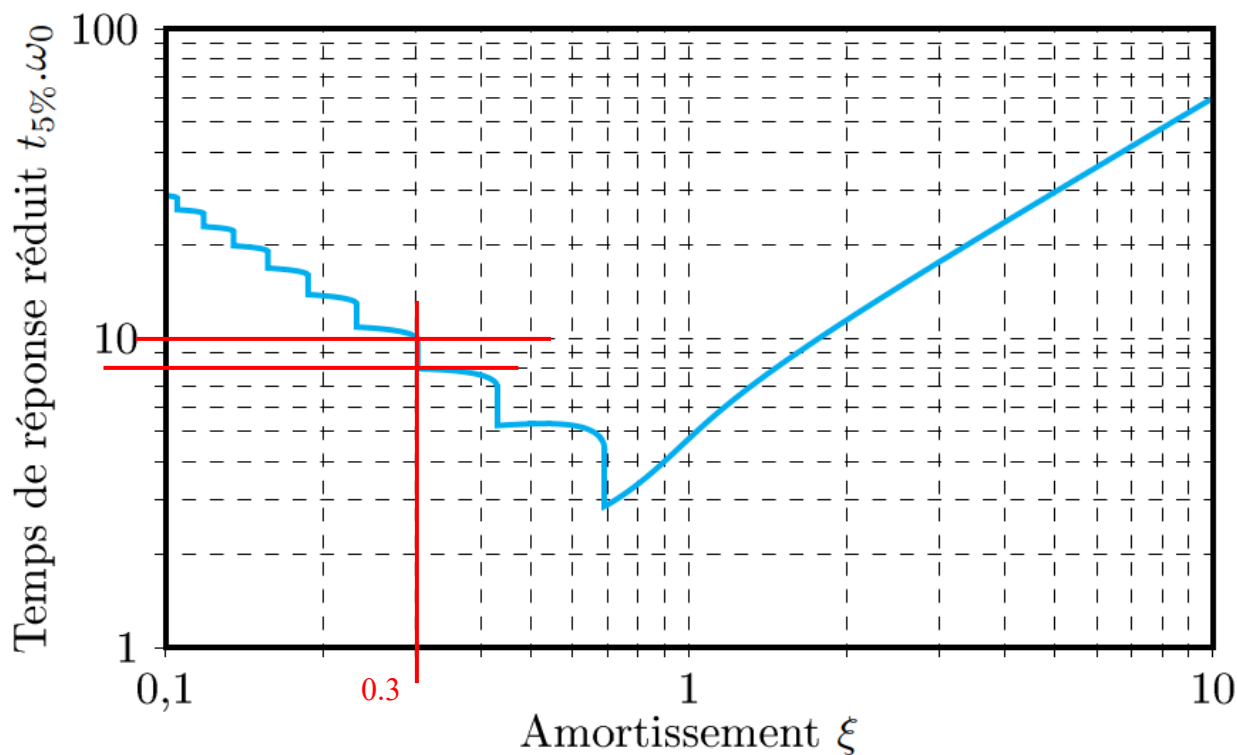
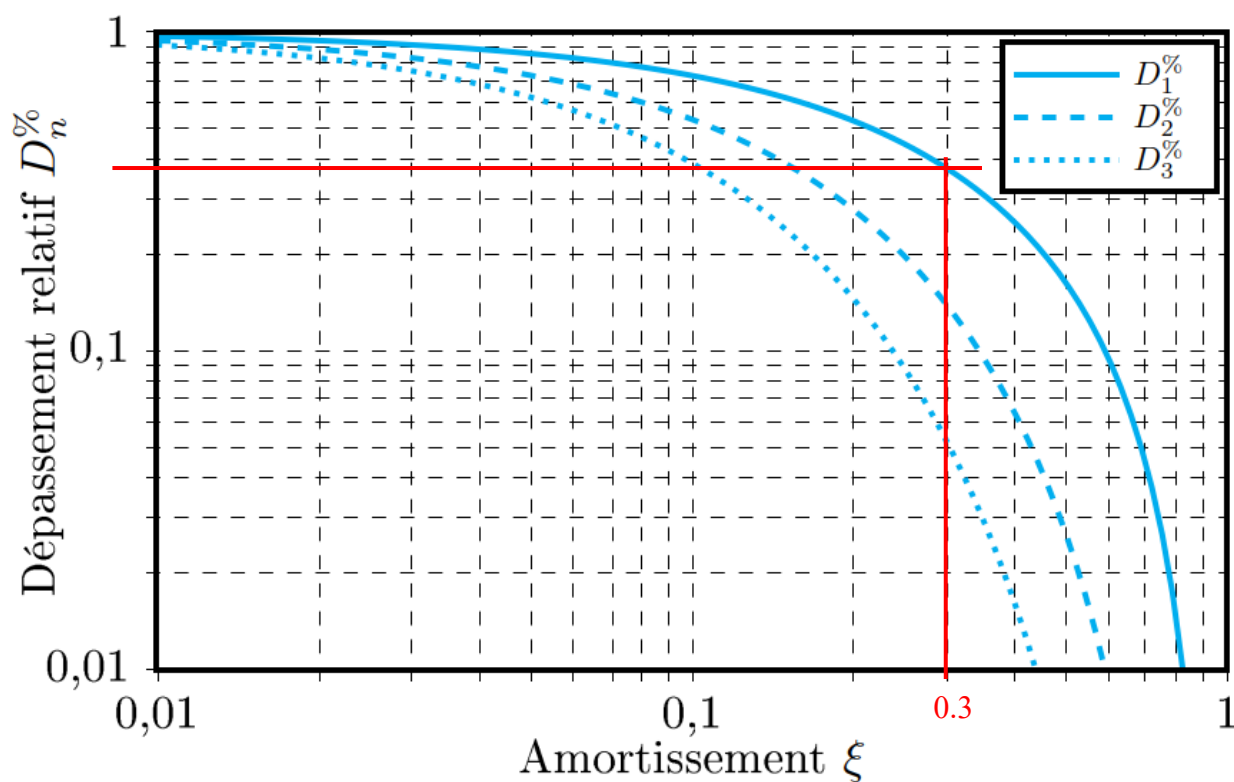
- On utilise le temps de réponse ($tr_{5\%} \approx 0.033$ s) et l'abaque donnant le temps de réponse réduit ($\omega_0 \cdot tr_{5\%}$) en fonction du coefficient d'amortissement. On trouve $\omega_0 \cdot tr_{5\%} \approx$ entre 8 et 10. La détermination de ω_0 n'est pas précise. On voit sur la courbe de réponse qu'au niveau du 3^{ème} dépassement, la courbe tangente la borne sup de la bande à $\pm 5\%$ de la V.A. cela justifie la portion verticale de la courbe de l'abaque ($\omega_0 \cdot tr_{5\%} = f(\xi)$).

Mieux vaut utiliser l'expression de la pseudo période ($T = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1-\xi^2}}$) pour déterminer précisément ω_0 . On

mesure $T \approx 0.022$ s, d'où : $\omega_0 \approx 290$ rad/s

D'où :

$$H(p) = \frac{1.5}{1 + \frac{2 \cdot 0.3}{290} p + \frac{1}{290^2} p^2}$$



Problème :

Q1. On a par définition : $\omega_m(t) = \frac{d\theta_m(t)}{dt}$ soit $\int_0^t \omega_m(u) du = \theta_m(t)$. C'est un système intégrateur.

On transpose cette relation dans le domaine de Laplace (en supposant les conditions de Heaviside) :

$$\Omega_m(p) = p \cdot \theta_m(p) \implies \frac{\theta_m(p)}{\Omega_m(p)} = \frac{1}{p}$$

Ce qui confirme l'action intégrale placée dans le schéma-bloc entre $\Omega_m(p)$ et $\theta_m(p)$: intégrer dans le domaine temporel revient à diviser par p dans le domaine de Laplace.

Q2. On transpose l'équation (2) dans le domaine de Laplace (conditions de Heaviside non nécessaires ici car pas de dérivée) :

$$C_m(p) = k_c \cdot I(p) \implies \frac{C_m(p)}{I(p)} = k_c$$

On a donc $H_I(p) = k_c$ un gain pur.

Q3. Par lecture du schéma-bloc, on trouve :

$$\varepsilon_I(p) = K_{conv} C_{mC}(p) - I(p) = K_{conv} C_{mC}(p) - \frac{1}{k_c} C_m(p)$$

Pour que le système soit bien asservi, on doit alors vérifier $C_m(p) = C_{mC}(p) \implies \varepsilon_I(p) = 0$ d'où :

$$\left(K_{conv} - \frac{1}{k_c} \right) C_m(p) = 0 \implies K_{conv} = \frac{1}{k_c}$$

Q4. En s'appuyant sur la formule de Black, on trouve :

$$M_C(p) = K_{conv} \frac{\frac{K_3}{p}}{1 + \frac{K_3}{p}} k_c. \text{ Or } K_{conv} = \frac{1}{k_c}$$

donc $M_C(p) = \frac{K_3}{K_3 + p}$. On a affaire à un ordre 1.

Q5. On met $M_C(p)$ sous forme canonique soit $M_C(p) = \frac{1}{1 + \frac{1}{K_3} p}$ d'où la constante de temps $\tau_c = \frac{1}{K_3}$.

Pour vérifier $\tau_c < 1 \text{ ms}$ on a la condition $K_3 > 1000 \text{ s}^{-1}$.

Q6. On utilise l'équation (4) que l'on transpose dans le domaine de Laplace sous les conditions de Heaviside :

$$\begin{aligned} J \cdot p \cdot \Omega_m(p) &= C_m(p) - C_r(p) - f \cdot \Omega_m(p) \implies (J \cdot p + f) \Omega_m(p) = C_m(p) - C_r(p) \\ \implies \frac{\Omega_m}{C_m(p) - C_r(p)} &= \frac{1}{J \cdot p + f} \end{aligned}$$

On a donc bien affaire à un système d'ordre 1 : $H_m(p) = \frac{1}{J \cdot p + f} \implies H_m(p) = \frac{\frac{1}{f}}{1 + \frac{J}{f} \cdot p}$.

Par identification, on en déduit : $\boxed{K_m = \frac{1}{f}}$ et $\boxed{\tau_m = \frac{J}{f}}$.

Q7. La réponse présente un régime transitoire et une tangente à l'origine de pente non nulle, ce qui confirme que $H_m(p)$ est assimilable à un 1^{er} ordre. On se place dans les conditions de Heaviside (en $t_0 = 2\text{ s}$ et $\omega_0 = 100\text{ rad/s}$) et on identifie ses coefficients caractéristiques :

— le gain K_m tel que $\omega_m(\infty) = K_m \cdot C_0$ soit $\boxed{K_m = \frac{400}{50} = 8\text{ rad s}^{-1}\text{ N}^{-1}\text{ m}^{-1}}$;

— la constante de temps τ_m tel que $\omega_m(\tau_m) = 0,63 \cdot \omega_m(\infty)$ soit $\boxed{\tau_m = 2\text{ s}}$.

On en déduit également :

— $f = \frac{1}{K_m}$ soit $\boxed{f = 0.125\text{ N m rad}^{-1}\text{ s}}$;

— $J = \frac{\tau_m}{K_m}$ soit $\boxed{J = 0.25\text{ kg m}^2}$.

Q8. Par lecture du schéma-bloc, il vient : $\boxed{H_{BO\Omega}(p) = C_2(p) \cdot M_C(p) \cdot H_m(p)}$. On en déduit :

$$\boxed{H_{BO\Omega}(p) = \frac{K_2 K_m}{T_2} \frac{(1 + T_2 \cdot p)}{p(1 + \tau_m \cdot p)}}$$

Q9. Elle est d'ordre 2, de classe 1 et de gain $\frac{K_2 K_m}{T_2}$. On a deux pôles évidents : $\boxed{p_1 = 0}$ et $\boxed{p_2 = -\frac{1}{\tau_m}}$

et un zéro $\boxed{z = -\frac{1}{T_2}}$.

Q10. Pour $T_2 = \tau_m$ on a alors : $\boxed{H_{BO\Omega}(p) = \frac{K_2 K_m}{\tau_m} \frac{1}{p}}$.

Q11. On a un retour unitaire donc : $\boxed{H_{BF\Omega}(p) = \frac{\Omega_m(p)}{\Omega_m C(p)} \Big|_{C_r(p)=0} = \frac{H_{BO\Omega}(p)}{1 + H_{BO\Omega}(p)}}$.

Alors : $H_{BF\Omega}(p) = \frac{K_2 K_m}{\tau_m p + K_2 K_m} = \frac{1}{\tau_v p + 1}$ avec $\boxed{\tau_v = \frac{\tau_m}{K_2 K_m}}$.

Q12. On peut utiliser la formule de Black pour exprimer $H_{per}(p)$:

$$\begin{aligned} H_{per}(p) &= -\frac{H_m(p)}{1 + H_{BO\Omega}(p)} = -\frac{\frac{K_m}{1 + \tau_m p}}{1 + \frac{K_2 K_m}{\tau_m} \frac{1}{p}} \\ \implies H_{per}(p) &= -\frac{K_m \cdot p}{p(1 + \tau_m \cdot p) + \frac{K_2 K_m}{\tau_m} (1 + \tau_m p)} \\ \implies H_{per}(p) &= -\frac{\frac{\tau_m}{K_2} \cdot p}{1 + (\tau_m + \frac{\tau_m}{K_2 K_m})p + (\frac{\tau_m^2}{K_2 K_m})p^2} \end{aligned}$$

Q13. Pour $C_r(t)$ un échelon d'amplitude C_0 , on a par définition : $C_r(p) = \frac{C_0}{p}$. Le système étant supposé stable, on a par application du théorème de la valeur finale (TVF) :

$\lim_{t \rightarrow +\infty} \omega_m(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \Omega_m(p)$. De plus, pour $\Omega_{mC}(p) = 0$, on a : $\Omega_m(p) = H_{per}(p) \cdot C_r(p)$, d'où :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \omega_m(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \left(-\frac{\frac{\tau_m}{K_2} \cdot p}{1 + (\tau_m + \frac{\tau_m}{K_2 K_m})p + (\frac{\tau_m^2}{K_2 K_m})p^2} \right) \cdot \frac{C_0}{p} = \lim_{p \rightarrow 0} \left(-\frac{\tau_m}{K_2} p \right) \cdot C_0 = 0 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

Une perturbation en échelon $C_r(t)$ n'entraîne aucune modification sur la vitesse, le système est donc bien robuste.

Q14. En utilisant, la formule de Black, on a : $H_{BF}(p) = \frac{K_1 \frac{1}{1 + \tau_v \cdot p} \frac{1}{p}}{1 + K_1 \frac{1}{1 + \tau_v \cdot p} \frac{1}{p}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{K_1} p + \frac{\tau_v}{K_1} p^2}$.

Q15. On détermine les pôles de $H_{BF}(p)$ soit les racines de :

$$1 + \frac{1}{K_1} p + \frac{\tau_v}{K_1} p^2 = 0 \quad \text{soit} \quad 1 + \frac{1}{100} p + \frac{0,033}{100} p^2 = 0$$

On a alors $\boxed{p_3 = -15 + 53i}$ et $\boxed{p_4 = -15 - 53i}$. Les pôles étant à partie réelle strictement négative, on en conclut que le système est stable.

Q16. On identifie : $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{K_1}{\tau_v}}}$ et $\boxed{\xi = \frac{1}{2\sqrt{K_1 \tau_v}}}$ (et $\boxed{K = 1}$). A.N. : $\omega_0 \simeq 55 \text{ rad/s}$ et $\xi \simeq 0,28$.

Q17. On relève sur l'abaque $t_{5\%} \cdot \omega_0 \simeq 11$ d'où $\boxed{t_{5\%} \simeq 0,2}$ s soit $200 \text{ ms} < 500 \text{ ms}$: le CDC est validé.

Q18. On calcule l'erreur statique ε_s du système :

$$\begin{aligned} \varepsilon_s &= \lim_{p \rightarrow 0} p(\theta_{mC}(p) - \theta(p)) \quad \text{par application du TVF} \\ \Rightarrow \varepsilon_s &= \lim_{p \rightarrow 0} p \left(\frac{1}{p} - H_{BF}(p) \frac{1}{p} \right) = \lim_{p \rightarrow 0} (1 - H_{BF}(p)) = 1 - 1 = 0 \text{ rad} \end{aligned}$$

L'erreur statique est bien nulle comme imposée par le cahier des charges.

Q19. On reprend le calcul précédent de l'erreur statique en employant une entrée $\theta_{mC}(p)$ en rampe unitaire soit $\theta_{mC}(p) = \frac{1}{p^2}$. On a donc :

$$\begin{aligned} \varepsilon_t &= \lim_{p \rightarrow 0} p \left(\frac{1}{p^2} - H_{BF}(p) \frac{1}{p^2} \right) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{p} \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{K_1} p + \frac{\tau_v}{K_1} p^2} \right) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{p} \left(\frac{\frac{1}{K_1} p + \frac{\tau_v}{K_1} p^2}{1 + \frac{1}{K_1} p + \frac{\tau_v}{K_1} p^2} \right) \\ &= \lim_{p \rightarrow 0} \left(\frac{\frac{1}{K_1} + \frac{\tau_v}{K_1} p}{1 + \frac{1}{K_1} p + \frac{\tau_v}{K_1} p^2} \right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\varepsilon_t = \frac{1}{K_1}} \end{aligned}$$

L'erreur de trainage est donc non nulle contrairement à l'exigence du cahier des charges.

Q20. On identifie la fonction de transfert en boucle fermée par lecture inverse :

$$\begin{aligned}\theta_m(p) &= \frac{1}{p} \frac{1}{1 + \tau_v p} (K_4 \cdot p \theta_{mC}(p) + K_1 (\theta_{mC}(p) - \theta_m(p))) \\ \Rightarrow \theta_m(p) \left(1 + K_1 \frac{1}{p(1 + \tau_v \cdot p)} \right) &= \frac{(K_4 \cdot p + K_1)}{p(1 + \tau_v \cdot p)} \theta_{mC}(p) \\ \Rightarrow H_{BF}^n(p) &= \frac{\frac{(K_4 \cdot p + K_1)}{p(1 + \tau_v \cdot p)}}{1 + K_1 \frac{1}{p(1 + \tau_v \cdot p)}} = \frac{1 + \frac{K_4}{K_1} p}{1 + \frac{1}{K_1} p + \frac{\tau_v}{K_1} p^2}\end{aligned}$$

Q21. On reprend le calcul de l'erreur de trainage avec la nouvelle expression de $H_{BF}^n(p)$:

$$\begin{aligned}\varepsilon_t &= \lim_{p \rightarrow 0} p \left(\frac{1}{p^2} - H_{BF}^n(p) \frac{1}{p^2} \right) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{p} \left(1 - \frac{1 + \frac{K_4}{K_1} p}{1 + \frac{1}{K_1} p + \frac{\tau_v}{K_1} p^2} \right) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{p} \left(\frac{(\frac{1}{K_1} - \frac{K_4}{K_1})p + \frac{\tau_v}{K_1} p^2}{1 + \frac{1}{K_1} p + \frac{\tau_v}{K_1} p^2} \right) \\ \Rightarrow \boxed{\varepsilon_t = \frac{1 - K_4}{K_1}}\end{aligned}$$

Pour annuler l'erreur de trainage, il suffit de choisir $\boxed{K_4 = 1}$.