MPSI

Programme de colle - semaine 11 du 08/12/2025 au 14/12/2025

1 Relations binaires

- Ne pas commencer par un exercice théorique avec une relation binaire “artificielle”.
- Relation d’ordre (relation réflexive, transitive, antisymétrique). Ordre partiel, total.
  Exemples : ordre usuel dans $\mathbb{R}$, inclusion dans $\mathcal{P}(E)$.
  Définition de la divisibilité dans $\mathbb{Z}$. La divisibilité dans $\mathbb{N}$ est une relation d’ordre, celle dans $\mathbb{Z}$ n’en est pas une (*).
- Relation d’équivalence (relation binaire réflexive, transitive, symétrique). Congruences dans $\mathbb{Z}$: définition. C’est une relation d’équivalence (*). Compatibilité avec les opérations (*). Exemples d’utilisation.
- **Ce qui suit concerne l’ordre usuel dans** $\mathbb{R}$. Les techniques habituelles sont à connaître (utilisation des variations, factorisation, tableau de signe).
- Propriétés élémentaires des inégalités : compatibilité avec les opérations, transitivité, etc.
  On mettra l’accent sur la rigueur dans les raisonnements sur les inégalités : il est indispensable de se demander à chaque étape ce qu’on fait et pourquoi on a le droit de le faire.
- Valeur absolue. Propriétés (produit, inverse, etc).
  Interprétation en terme de distance. Encadrement : $|x| \leqslant a \quad \Leftrightarrow \quad -a \leqslant x \leqslant a$.
  Inégalité triangulaire : $|x+y| \leqslant |x| + |y|$.
- Partie (fonction) majorée, minorée, bornée. Majorant, minorant.
  A est bornée $\quad \Leftrightarrow \quad \exists M \in \mathbb{R}^+ \,/\, \forall x \in A,\ |x| \leqslant M$.
- Plus grand élément d’une partie, maximum d’une fonction, borne supérieure. Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure (admis).
  De même avec min, inf.
- Sur les max/sup : rester raisonnable (exemple : dire si tel ensemble (simple) admet ou pas un plus grand élément / une borne supérieure et justifier, éventuellement avec un schéma à l’appui).
- Partie entière d’un réel, division euclidienne dans $\mathbb{Z}$.

2 Suites réelles

La définition de la limite est à savoir dans cette colle. Elle n’a pas (encore) été utilisée pour démontrer les propriétés habituelles (opérations sur les limites, encadrement) mais on pourra donner des exercices de recherche de limite utilisant ces propriétés.

- Généralités : suite (réelle) majorée, bornée, etc.
- Définition d’une suite convergente (avec ε).
  Unicité de la limite (*), toute suite convergente est bornée (*). Si une suite u converge vers un réel $\ell > 0$, alors à partir d’un certain rang, $u_n > 0$.
- Limite infinie.
- **Ne pas interroger sur ce qui suit (pas encore vu) :**
  - Théorème de la limite monotone, suites adjacentes.
  - Suite récurrentes non linéaires.
  - Suite extraite. Nous avons juste vu sans écrire la démonstration que

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \quad \Leftrightarrow \quad u_{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$$

  - Limite de suite complexe.

3 Exercices faits

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $3^{4n+3} \equiv 2[5]$.

2. Inégalités à montrer du type :

   a) $\forall x \in \mathbb{R}^-$, $|e^x - 1| \leqslant |x|$

   b) $\forall x, y \in [1, +\infty[$, $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leqslant \dfrac{|x-y|}{2}$

3. Dire si les ensembles suivants sont majorés, minorés, admettent un sup, un max, etc (et justifier).

   i) $A = \left\{ \dfrac{1}{n}\,,\, n \in \mathbb{N}^* \right\}$

   ii) $B = \left\{ 1 + \dfrac{1}{x}\,,\, x \in \mathbb{R}^{*+} \right\}$

4. Soit $x \in \mathbb{R}$. Étudier (par encadrement) la convergence de la suite (u_n) définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \lfloor kx \rfloor$$

5. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$.

   a) Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \dfrac{1}{k}$.

   On pourra encadrer la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ *sur* $[k, k+1]$ *entre deux constantes et intégrer, dessin bienvenu.*

   b) En déduire par sommation un encadrement de (S_n).

   c) Donner un équivalent de (S_n).