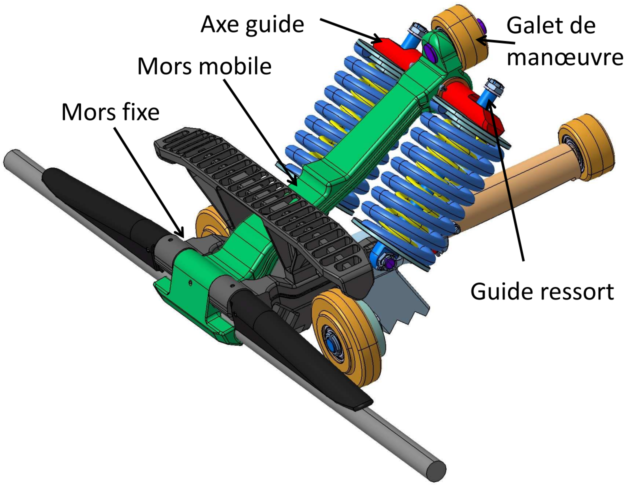
Résolution d'un problème stationnaire de type f(x)=0 pour l'étude d'une loi entrée sortie

Objectifs :
- Mettre en oeuvre sous Python, trois méthodes de résolution de problème stationnaire
- Valider le cahier des charges d'une pince de télésiège par utilisation de la loi entrée sortie géométrique

1 Contexte

Les sièges ou cabines débrayables peuvent ralentir lors de leur passage aux stations de départ et d'arrivée, puis reprendre leur vitesse de croisière ensuite, permettant alors un chargement et déchargement facile des passagers, tout en autorisant une vitesse de montée rapide.

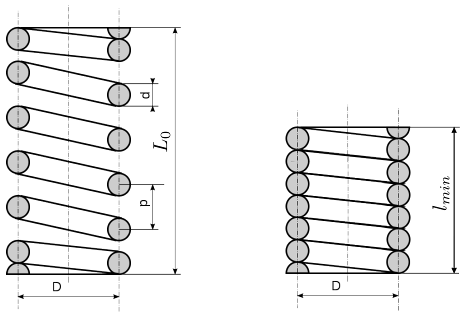


La pince est notamment composée d'un mors fixe et d'un mors mobile, qui permettent de fixer le siège sur le câble ou, au contraire, de l'en désolidariser. On s'intéresse ici à la phase de désolidarisation où la pince doit pouvoir s'ouvrir suffisamment pour permettre son extraction du câble. On y associe le cahier des charges partiel suivant :

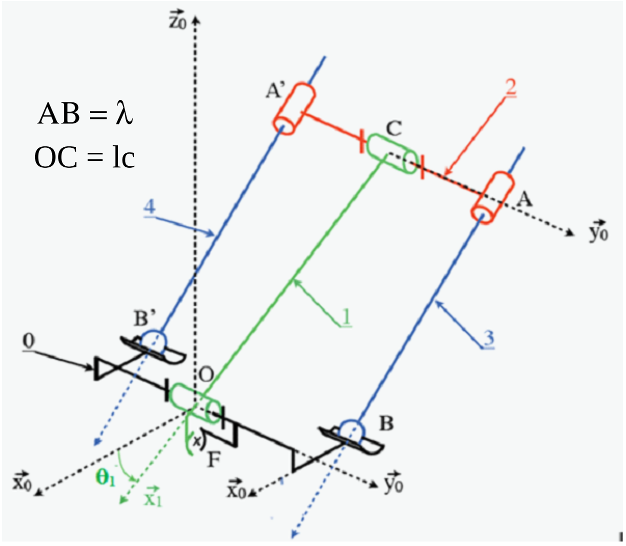
Fonction	Critère	Niveau	Limite
Désolidariser la cabine du câble	Ouverture de la pince (°)	25	mini

2 Problématique et mise en équation

La phase d'ouverture nécessite d'écraser le ressort pour ouvrir la pince, cependant les stries limitent l'écrasement du ressort. En effet, une fois les spires du ressort en contact les une des autres il est presque impossible d'en réduire d'avantage sa longueur l, notée alors l_{min}.



Le schéma cinématique simplifié du mécanisme est donné sur la figure ci-contre. La loi entrée-sortie $\lambda = f_{E/S}(\theta_1)$ reliant les paramètres θ_1 et λ s'écrit :



$$\lambda = \sqrt{x_B^2 + z_B^2 + l_c^2 - 2x_B l_c \cos(\theta_1) + 2z_B l_c \sin(\theta_1)}$$

avec $x_B = 280mm$, $z_B = 33mm$ et $l_c = 541mm$.

Étant donnée la longueur minimale du ressort $l_{min} = 220mm$, on obtient la valeur minimale du paramètre λ, notée $\lambda_{min} = 276mm$. On cherche alors à déterminer la valeur θ_{1max} associée à cette valeur de façon à valider les exigences du cahier des charges.

La fonction $f_{E/S}$ n'a pas d'inverse évident. Pour calculer la valeur de θ_{1max} on introduit une fonction nouvelle fonction f :

$$f(\theta_1) = \sqrt{x_B^2 + z_B^2 + l_c^2 - 2x_B l_c \cos(\theta_1) + 2z_B l_c \sin(\theta_1)} - \lambda_{min}$$

L'objectif de ce devoir est d'écrire et d'étudier plusieurs algorithmes permettant d'approcher la valeur de l'angle max telle que la fonction précédente soit nulle.

Petit conseil avant de débuter :
n'oublier pas les unités du système international. Longueurs en m et angles en rad.

3 Résolution

La fonction $f(\theta_1)$ est continue et monotone sur l'intervalle $[0°, 45°]$. Il s'agit alors d'écrire le programme permettant de résoudre l'équation à partir des différentes méthodes.

Question 1 - *Définir sous python les paramètres géométriques nécessaires pour la création de la fonction $f(\theta_1)$.*
Question 2 - *Créer la fonction $f(\theta_1)$. Tracer cette fonction pour $\theta_1 \in [0°, 45°]$.*
Pour arrêter les différentes méthodes de résolution, on définit un seuil de convergence :

$$\frac{|f(\theta_1)|}{\lambda_{min}} < 10^{-8}$$

3.1 Méthode par dichotomie

Question 3 - *Résoudre l'équation par la méthode par dichotomie pour $\theta_1 \in [0°, 45°]$. Vous implémenterez un compteur permettant de connaître le nombre d'itérations réalisées par cette méthode.*

3.2 Méthode de Newton

Question 4 - *Résoudre l'équation par la méthode de Newton, le premier point sera à l'abscisse $30°$. Vous implémenterez un compteur permettant de connaître le nombre d'itérations réalisées par cette méthode.*

3.3 Méthode de Newton sans la fonction dérivée

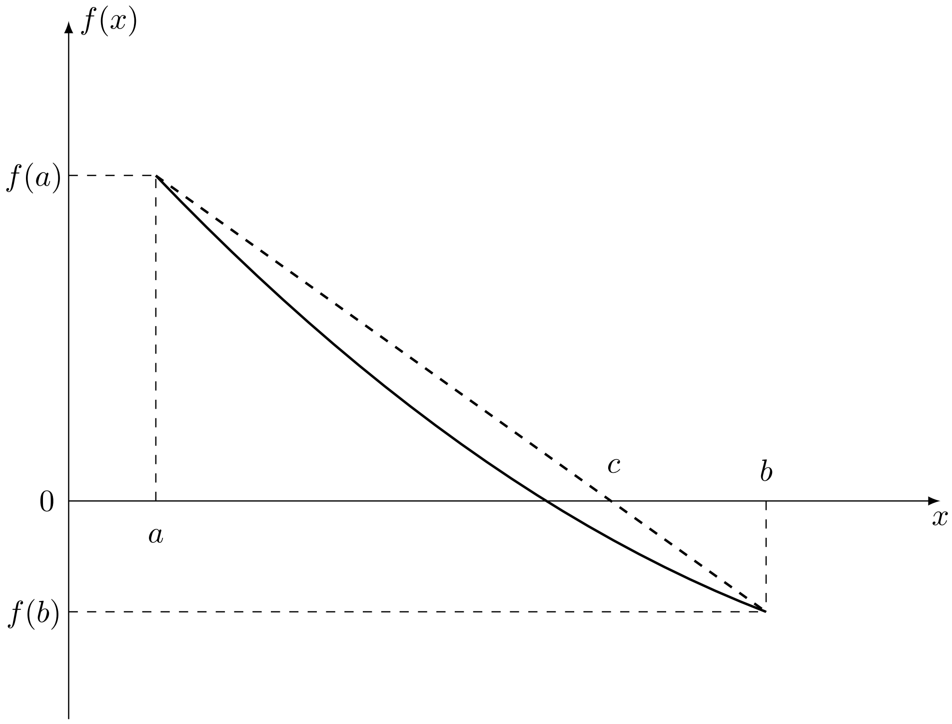
La méthode de Newton, oblige à connaitre l'expression de $f'(x)$, ce qui peut parfois être lourd à exprimer et prendre beaucoup de temps de calcul.

Question 5 - *Proposer une fonction* `deriv(f,h,x)` *prenant pour argument une fonction* `f` *et deux réels* `h` *(pas de dérivation) et* `x` *(abscisse) et retournant la dérivée numérique à 1 pas à droite de* `f` *en* `x`*.*
Question 6 - *Résoudre l'équation par la méthode de Newton en utilisant la dérivation numérique. Vous implémenterez un compteur permettant de connaître le nombre d'itérations réalisées par cette méthode.*

3.4 Méthode de la corde de Lagrange

Principe

Au lieu de scinder l'intervalle initial $[a,b]$ en deux intervalles de même longueur, la méthode de la corde de Lagrange cherche à valoriser la borne la plus proche de la solution en cherchant l'intersection c entre l'axe des abscisses et la corde reliant le point $\big(a, f(a)\big)$ au point $\big(b, f(b)\big)$.



L'algorithme qui en découle est identique à celui de la méthode par dichotomie.

Question 7 - *Donner l'expression de c en fonction de a, b, $f(a)$ et $f(b)$.*
Question 8 - *Résoudre l'équation par la méthode de la corde de Lagrange pour $\theta_1 \in [0°, 45°]$. Vous implémenterez un compteur permettant de connaître le nombre d'itérations réalisées par cette méthode. Comparer le compteur des méthode par dichotomie et de la corde de Lagrange pour $\lambda_{min} = 266mm$ et $\lambda_{min} = 296mm$. Conclure.*

4 Synthèse

Question 9 - *Réaliser la synthèse des différentes méthodes utilisée.*