MPSI

Programme de colle - semaine 12 du 15/12/2025 au 21/12/2025

1 Suites réelles

(*) : démonstrations à savoir

- Exercices sur le programme précédent.
- Opérations sur les limites :
  - Somme (*)
  - Produit (* uniquement le cas $(u_n v_n)$ avec (u_n) bornée et $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$).
  - Inverse.
- Théorème d'encadrement (*), minoration (par une suite qui tend vers $+\infty$).
- Théorème de la limite monotone (*, cas d'une suite croissante majorée), suites adjacentes (*, bien distinguer la définition et le théorème).
- Suite extraite (définition). Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \in \overline{\mathbb{R}}$, alors toute suite extraite de (u_n) tend aussi vers ℓ.
  Si $u_{2k} \xrightarrow[k\to+\infty]{} \ell$ et $u_{2k+1} \xrightarrow[k\to+\infty]{} \ell$, alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.
  Théorème de Bolzano-Weierstrass (aucun exercice fait, démonstration non exigible).
- Limite de suite complexe (aucun exercice fait)
- Aucun résultat vu sur les suites récurrentes, les exercices doivent être guidés.

2 Loi de composition interne

Uniquement en question de cours

- Partie stable par une lci.
- Associativité, commutativité, élément neutre, élément inversible, distributivité d'une lci par rapport à une autre.

3 Exercices faits

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Étudier (par encadrement) la convergence de la suite (u_n) définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \lfloor kx \rfloor$$

2. **La série harmonique**, première méthode
   Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$.

   a) Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \dfrac{1}{k}$.
   On pourra encadrer la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ sur $[k, k+1]$ entre deux constantes et intégrer, dessin bienvenu.

   b) En déduire par sommation un encadrement de (S_n).

   c) Donner un équivalent de (S_n).

3. **La série harmonique**, deuxième méthode
   Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$.

   a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $u_n = S_n - \ln n$ et $v_n = S_n - \ln(n+1)$.
   Montrer que (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
   On utilisera à deux reprises l'inégalité classique $\forall x \in]-1, +\infty[,\ \ln(1+x) \leqslant x$.

   b) Donner un équivalent de (S_n).

4. **La série harmonique alternée.** *Peut être scindé, le a) et le b) sont indépendants.*
   Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k+1}}{k}$.

   a) i) Montrer que (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.
      ii) Montrer que (S_n) converge. Soit ℓ sa limite.

   b) i) Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t$.
      Par un encadrement, déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$.
      ii) En écrivant S_n sous forme intégrale, déterminer ℓ.
      On partira de $\displaystyle\int_0^1 t^{k-1}\,\mathrm{d}t$.